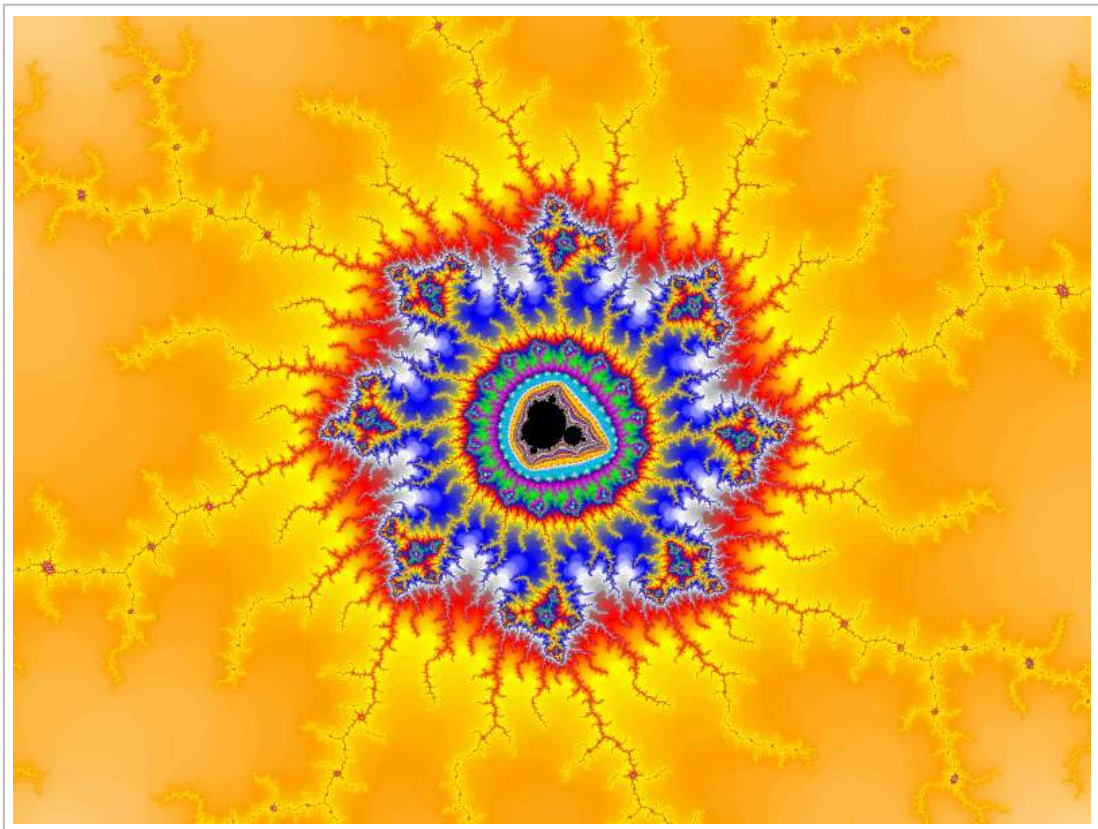


Problemi d'esame 3

2025



LORENZO ROI

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Febbraio 2026. 

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di **B. Mandelbrot** centrato nel punto $(-1.20657, -0.316074)$ e ingrandito $5,3 \times 10^8$ volte.

Titolo: **Cellula frattale.**

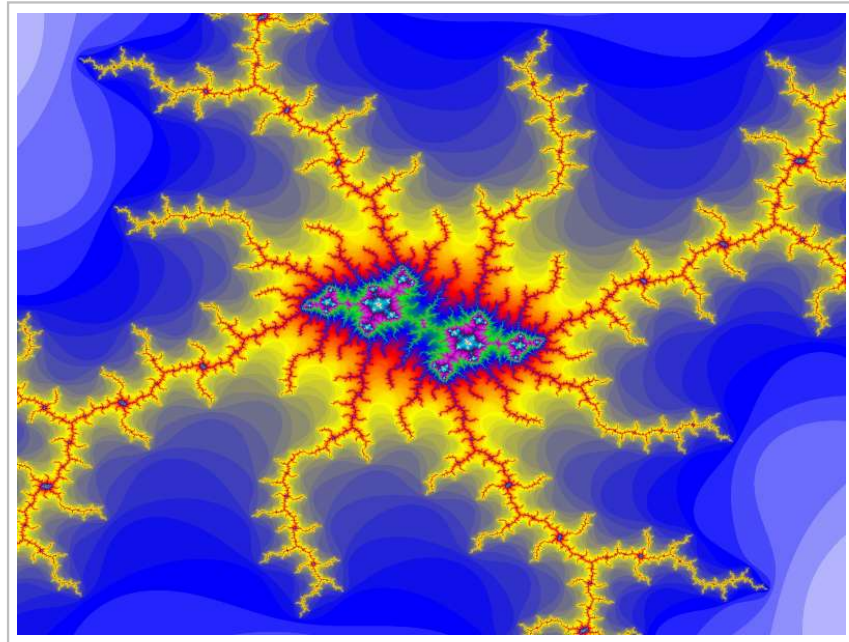
INTRODUZIONE

Testi e soluzioni dei problemi e quesiti assegnati negli anni 2019, 2023, 2024 e 2025 nella sessione ordinaria degli esami di Stato di liceo scientifico per gli indirizzi di ordinamento (LI02) e opzione scienze applicate (LI03).

In **appendice** si riporta il solo testo delle prove suppletive e straordinarie.

Questo documento è il seguito di una precedente raccolta ([ProblemiEsame2.pdf](#)) di temi proposti agli esami di Stato negli anni 2015-2018.

Lorenzo Roi



Insieme di Julia della copertina

INDICE

Esame 2019	1
problema 1	1
problema 2	2
quesito 1	3
quesito 2	3
quesito 3	3
quesito 4	4
quesito 5	4
quesito 6	4
quesito 7	4
quesito 8	5
Esame 2023	38
problema 1	38
problema 2	39
quesito 1	39
quesito 2	39
quesito 3	39
quesito 4	40
quesito 5	40
quesito 6	40
quesito 7	40
quesito 8	40
Esame 2024	63
problema 1	63
problema 2	63
quesito 1	64
quesito 2	64
quesito 3	65
quesito 4	65
quesito 5	65
quesito 6	65
quesito 7	65
quesito 8	65

Esame 2025	96
problema 1	96
problema 2	97
quesito 1	98
quesito 2	98
quesito 3	98
quesito 4	98
quesito 5	98
quesito 6	99
quesito 7	99
quesito 8	99
APPENDICE	128
Esame 2019 suppletiva	129
Esame 2019 straordinaria	133
Esame 2023 suppletiva	136
Esame 2023 straordinaria	139
Esame 2024 suppletiva	142
Esame 2024 straordinaria	145
Esame 2025 suppletiva	147
Esame 2025 straordinaria	150

ESAME 2019

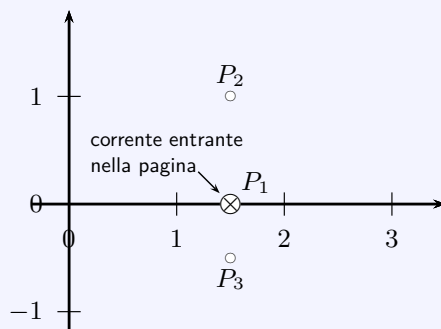
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

• Problema n. 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \quad g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in \mathbb{R} con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g .
- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti per i punti:



$$P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right), \quad P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right) \quad \text{e} \quad P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2,0 \text{ A}$, i_2 e i_3 . Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico generato dalle correnti i_1 , i_2 e i_3 , lungo il contorno di S , a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3 .

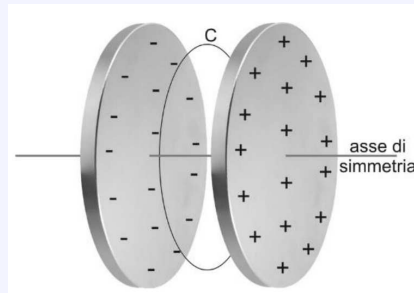
(continua)

- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0,20 \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1,5 \times 10^{-2} \text{ T}$ perpendicolare alla regione S . Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a $5,0 \text{ mA}$. Determinare il valore di ω .

Soluzione

• Problema n. 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R , poste a distanza d , dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico \vec{B} . Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di \vec{B} , espressa in Tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \quad \text{con } r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k , spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di \vec{B} e del campo elettrico \vec{E} nei punti interni al condensatore?
- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r . Determinare la circuitazione di \vec{B} lungo C e da essa ricavare che il flusso di \vec{E} , attraverso la superficie circolare delimitata da C , è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right).$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$.

Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F , individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F , specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f . Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f , l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^b f(t) dt$.

Soluzione

Questionario

- Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f .

Soluzione

- È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2017} + x^{2019}.$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x}.$$

Soluzione

- Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S , determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

Soluzione

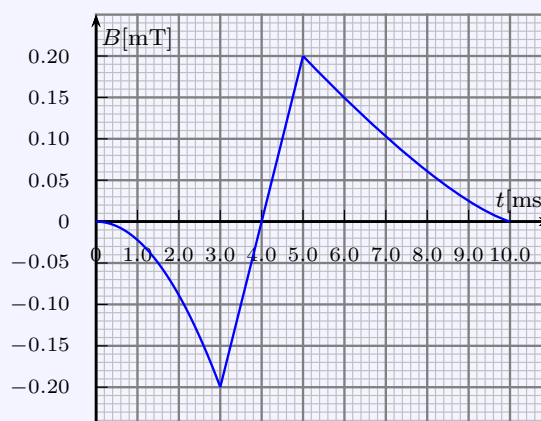
4. Dati i punti $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10, 8, 7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S .

Soluzione

5. Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.
- Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
 - Quale è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
 - Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

Soluzione

6. Una spira di rame, di resistenza $R = 4,0 \text{ m}\Omega$, racchiude un'area di 30 cm^2 ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla spira varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:



- a) da 0,0 ms a 3,0 ms;
- b) da 3,0 ms a 5,0 ms;
- c) da 5,0 ms a 10,0 ms.

Soluzione

7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0,80c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

Soluzione

8. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1,00 \text{ mT}$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38,1 \text{ cm}$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10,5 \text{ cm}$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con \vec{B} .

Soluzione

COSTANTI FISICHE

carica elementare	e	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
massa del protone	m_p	$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
velocità della luce	c	$2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

Per dimostrare l'esistenza di due estremi della funzione

$$g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2} \quad (1)$$

definita nel dominio \mathbb{R} dal prodotto di due funzioni continue e derivabili, calcoliamo innanzitutto la sua derivata prima $g'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= a \cdot e^{2x-x^2} + (ax + b)(2 - 2x)e^{2x-x^2} \\ &= e^{2x-x^2} (a + 2ax - 2ax^2 + 2b - 2bx) \\ &= e^{2x-x^2} \cdot [(a + 2b) + 2x(a - b) - 2ax^2] \end{aligned} \quad (2)$$

e ne studiamo il segno $g'(x) \geq 0$. Poiché $e^{2x-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ il segno dipende dalle soluzioni della disequazione

$$-2ax^2 + 2x(a - b) + (a + 2b) \geq 0 \quad (3)$$

coinvolgente il secondo fattore di (2). L'equazione associata a tale disequazione presenta le soluzioni

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(a - b) \pm \sqrt{(a - b)^2 + 2a(a + 2b)}}{-2a} \\ &= \frac{(a - b) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 4ab}}{2a} \\ &= \frac{(a - b) \pm \sqrt{2a^2 + (a + b)^2}}{2a} \end{aligned} \quad (4)$$

e poiché $\Delta/4 = 2a^2 + (a+b)^2 > 0$ con $a \neq 0$, il segno di $g'(x)$ dipende dal solo parametro a , coefficiente del termine quadratico in (3). Posto

$$x_1 = \frac{(a-b) + \sqrt{\Delta/4}}{2a}, \quad x_2 = \frac{(a-b) - \sqrt{\Delta/4}}{2a}, \quad (5)$$

le soluzioni sono

$$a < 0, \implies x \leq x_1 \quad \vee \quad x \geq x_2$$

oppure

$$a > 0, \implies x_2 \leq x \leq x_1$$

rispettivamente riassunte graficamente nelle figg. 1 e 2.

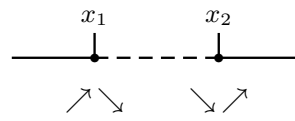


Fig. 1. Segno di $g'(x)$ con $a < 0$.

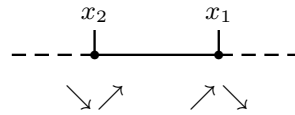


Fig. 2. Segno di $g'(x)$ con $a > 0$.

In entrambi i casi la funzione g presenta un massimo e un minimo relativi. Per dimostrare che questi estremi sono pure di massimo e minimo assoluti, ribadita la continuità di g nel dominio \mathbb{R} in quanto prodotto di funzioni continue, studiamo il limite di $g(x)$ agli estremi $\pm\infty$ del dominio, limite che riscriviamo come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}}. \quad (6)$$

Poiché valgono i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax + b) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(a + \frac{b}{x} \right) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x^2 - 2x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \end{aligned} \quad (7)$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty,$$

la (6) costituisce un caso di indeterminazione della forma ∞/∞ . Per risolverla analizziamo l'esistenza del limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore di (6) cioè

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{D(ax + b)}{D[e^{x^2 - 2x}]} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{(2x - 2)e^{x^2 - 2x}}. \quad (8)$$

Poiché per il primo fattore al denominatore risulta

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x - 2) = \pm\infty$$

e per il fattore esponenziale vale ancora il risultato (7) e $a \neq 0$, il limite della precedente è

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{(2x - 2)e^{x^2 - 2x}} = 0 \quad (9)$$

cosicché, per l'esistenza del limite (8), possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital e concludere che pure

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}} = 0. \quad (10)$$

Questo risultato assicura l'esistenza di un asintoto orizzontale coincidente con l'asse x per cui, ripresi gli andamenti circa la crescita/decrecita della g (figg. 1 e 2), possiamo concludere che i valori x_1 e x_2 sono rispettivamente punti di massimo e di minimo assoluto. A conferma di ciò, osservato come il segno di g sia dipendente solo dal fattore lineare, ci aspettiamo che sia $g(x_1) > 0$ e $g(x_2) < 0$ indipendentemente dal valore di a . Difatti

$$g(x_1) > 0 \implies ax_1 + b > 0$$

da cui, per (5),

$$a \cdot \frac{(a - b) + \sqrt{\Delta/4}}{2a} + b > 0 \implies \frac{(a + b) + \sqrt{\Delta/4}}{2} > 0 \implies \sqrt{\Delta/4} > -(a + b).$$

Quest'ultima è certamente soddisfatta se $a + b > 0$ mentre se $a + b < 0$ è possibile elevare al quadrato ed, esplicitato $\Delta/4$, ottenere

$$2a^2 + (a + b)^2 > (a + b)^2 \implies 2a^2 > 0$$

pure soddisfatta. Allo stesso modo si dimostra che $g(x_2) < 0$.

– Affinché i grafici di f e g si intersechino nel punto $A(2, 1)$ devono valere le condizioni

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ g(2) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 4a - 2 + b = 1 \\ (2a + b)e^0 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 4a - 3 + 1 - 2a = 0 \\ b = 1 - 2a \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

■ Posto $a = 1$ e $b = -1$, la prima funzione da studiare è

$$f(x) = x^2 - x - 1, \quad (11)$$

equazione che rappresenta una parabola con la concavità rivolta nel verso positivo delle ordinate, di vertice

$$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right),$$

e che interseca l'asse x nei punti di ascissa

$$x^2 - x - 1 = 0 \implies x_{a,b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e l'asse y in $B(0, -1)$.

Lo studio di

$$g(x) = (x - 1)e^{2x - x^2} \quad (12)$$

inizia richiamando quanto già svolto precedentemente ossia come tale funzione possiede l'asintoto di equazione $y = 0$ in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - 1)e^{2x - x^2} = 0$$

e come sia $g(x) \geq 0$ se $x \geq 1$. Inoltre, ripresa la derivata prima e calcolati in base a (5) i valori di x_1 e x_2 , abbiamo

$$g'(x) \geq 0 \quad \text{nell'insieme} \quad x \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad x \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

segno che riassumiamo graficamente nella fig. 3

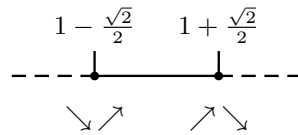


Fig. 3. Segno di $g'(x)$ con $a = 1$ e $b = -1$.

Il calcolo della derivata seconda $g''(x)$ dà

$$\begin{aligned} g''(x) &= e^{2x - x^2}(-4x + 4) + e^{2x - x^2}(2 - 2x)(-2x^2 + 4x - 1) \\ &= e^{2x - x^2}[-4(x - 1) - 2(x - 1)(-2x^2 + 4x - 1)] \\ &= 2e^{2x - x^2}(x - 1)(2x^2 - 4x - 1) \end{aligned}$$

per cui $g''(x) \geq 0$ comporta lo studio di

$$x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$$

$$2x^2 - 4x - 1 \geq 0 \implies x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

per cui, quest'ultima, è soddisfatta da

$$x \leq x_3 \quad \vee \quad x \geq x_4 \quad \text{cioè} \quad x \leq 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad x \geq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Combinando i due termini nel grafico di fig. 4 deduciamo che $g''(x) \geq 0$ negli insiemi $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 1$ oppure $x \geq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ dove g avrà la concavità rivolta verso l'alto.

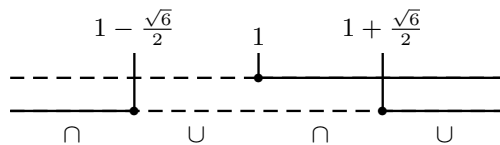


Fig. 4. Segno di $g''(x)$ con $a = 1$ e $b = -1$.

Osservato come varia il segno di $g(x)$ e delle sue prime due derivate, verifichiamo per la funzione g l'esistenza di una simmetria centrale rispetto al punto di ascissa 1 e ordinata $g(1) = 0$ ossia $C(1, 0)$. Pertanto, per confermare quanto richiesto dal testo, ottenute le equazioni della simmetria $\sigma(1, 0)$ con centro C

$$\sigma(1, 0): \begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 1 \\ \frac{y+y'}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = 2-x \\ y' = -y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2-x' \\ y = -y' \end{cases} \quad (13)$$

e riscritta la g nella forma

$$y = (x-1)e^{2x-x^2} \quad (14)$$

sostituiamo l'ultima coppia di equazioni cosicché la precedente diviene

$$\begin{aligned} -y' &= (2-x'-1) \cdot e^{2(2-x')-(2-x')^2} \quad \cdot (-1) \\ y' &= (x'-1) \cdot e^{[4-2x'-4-(x')^2+4x']} \\ y' &= (x'-1)e^{2x'-(x')^2}: \end{aligned}$$

l'invarianza dell'equazione così ottenuta rispetto alla (14) dimostra l'esistenza della simmetria centrale di centro C .

Per verificare la mutua tangenza tra f e g ci assicuriamo innanzitutto che $B(0, -1)$ appartenga pure al grafico di g : difatti $g(0) = -1 \cdot e^0 = -1$.

Il calcolo delle rispettive derivate fornisce inoltre

$$\begin{aligned} f'(x) = 2x - 1 &\implies f'(0) = -1 \\ g'(x) = e^{2x-x^2}(-2x^2 + 4x - 1) &\implies g'(0) = e^0(0+0-1) = -1 \end{aligned}$$

per cui essendo

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases}$$

i rispettivi grafici sono, come richiesto, tangenti in $B(0, -1)$.

Il calcolo delle ordinate degli estremi e dei punti di flesso fornisce*

$$\begin{aligned} x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} &\implies g(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(2 - \sqrt{2} - \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}e}{2} \\ x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} &\implies g(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}e}{2} \end{aligned}$$

mentre per i punti di flesso, in aggiunta a $C(1, 0)$, abbiamo

$$g\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \exp\left(2 \pm \sqrt{6} - \frac{5}{2} \mp \sqrt{6}\right) = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} e^{-1/2}.$$

* $\exp(\dots)$ è una scrittura alternativa a $e^{(\dots)}$ e talvolta più opportuna tipograficamente.

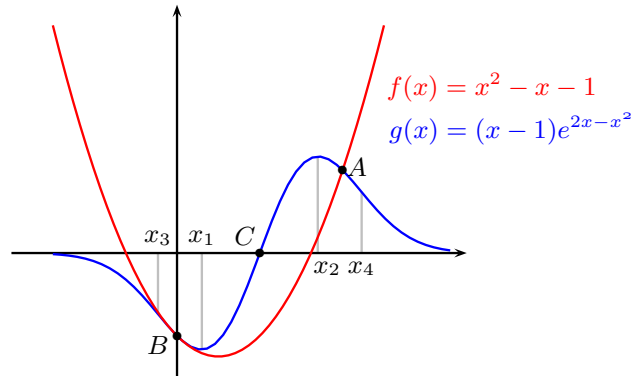


Fig. 5. Grafici delle funzioni f e g .

La figura 5 riporta i grafici di entrambe le funzioni.

La regione S di cui si chiede il calcolo dell'area è evidenziata nella figura 6 e il suo valore discende dalla soluzione dell'integrale

$$\mathcal{A}(S) = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx$$

che esplicitamente è

$$\mathcal{A}(S) = \int_0^2 [(x - 1)e^{2x - x^2} - x^2 + x + 1] dx. \quad (15)$$

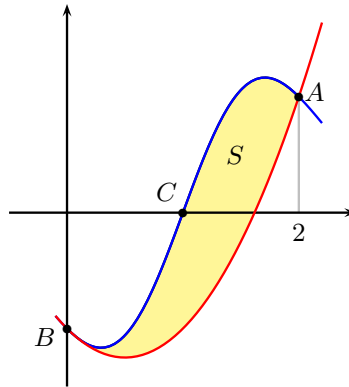


Fig. 6. Regione S compresa tra i grafici di f e g .

Sfruttando la proprietà di addittività il calcolo procede immediato per i termini elementari

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(S) &= \int_0^2 (x - 1)e^{2x - x^2} dx + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 \\
 &= \int_0^2 (x - 1)e^{2x - x^2} dx + \left(-\frac{8}{3} + 2 + 2 \right) \\
 &= \frac{4}{3} - \int_0^2 (x - 1)e^{2x - x^2} dx, \quad (16)
 \end{aligned}$$

mentre rimane il calcolo che coinvolge la funzione g . D'altra parte, come dimostrato precedentemente, la funzione integranda possiede quale centro di simmetria il punto $C(1, 0)$ che è pure il punto medio del segmento di estremi B e A per cui il suo integrale definito dev'essere nullo come evidenziato graficamente dalla figura 7).

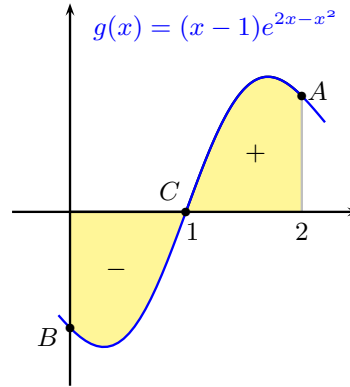


Fig. 7. Trapezoidi coinvolti in $\int_0^2 g(x)dx = 0$.

Procedendo in termini più formali, tale integrale si può suddividere nella somma

$$\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx = \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \int_1^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx \quad (17)$$

e riscriviamo il secondo addendo in una forma alternativa tramite il cambio di variabile rappresentato dalla (13) $x' = -x+2$. Difatti, calcolato il differenziale della nuova variabile

$$dx' = -dx \quad \text{e aggiornati gli estremi} \quad x'_{inf} = -1+2 = 1, \quad x'_{sup} = -2+2 = 0,$$

l'integrale (17) si modifica come

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \int_1^0 (2-x'-1)e^{2(2-x')-(2-x')^2} (-dx') \\ &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx - \int_1^0 (1-x')e^{2x'-(x')^2} dx' \end{aligned}$$

e quindi, sfruttando la proprietà dell'inversione degli estremi, ottenere quanto aspettato

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \int_1^0 (x'-1)e^{2x'-(x')^2} dx' \\ &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx - \int_0^1 (x'-1)e^{2x'-(x')^2} dx' = 0. \end{aligned}$$

In definitiva, ripresa la (16), l'area della regione S è

$$\mathcal{A}(S) = \left(\frac{4}{3} - 0\right) \text{m}^2 = \frac{4}{3} \text{m}^2 \approx 1,3333 \text{m}^2. \quad (18)$$

Nota 1. Per il calcolo di $\int_0^2 g(x)dx$ nella (16) si può procedere pure in modo esplicito osservando che la derivata dell'esponente è $D(2x - x^2) = 2(1 - x)$. Ciò suggerisce di introdurre la nuova variabile di integrazione $t = 2x - x^2$ il cui differenziale è

$$dt = 2(1 - x)dx \implies (x - 1)dx = -\frac{dt}{2}$$

cosicché

$$\begin{aligned} \int (x - 1)e^{2x - x^2} dx &= \int e^t \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{2x - x^2} + c \end{aligned}$$

per cui

$$\int_0^2 (x - 1)e^{2x - x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{2x - x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Nota 2. Con la medesima sostituzione gli estremi di integrazione sono entrambi nulli per cui, a maggior ragione, è $\int_0^2 g(x)dx = 0$.

■ Per comprendere come varia la circuitazione del campo magnetico dobbiamo innanzitutto individuare quali correnti sono concatenate o meno al contorno della regione S posizionando adeguatamente i punti P_1 , P_2 e P_3 e siccome questi hanno ascissa pari a $3/2$ converrà calcolare le corrispondenti ordinate sui grafici di g ed f . Poiché

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2} - 1\right) \exp\left(2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2} e^{3/4} \approx 1,05 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

allora P_1 e P_2 appartengono alla regione S in quanto le rispettive ordinate soddisfano la disuguaglianza

$$-\frac{1}{4} < y_{P_1}, y_{P_2} < 1,05,$$

mentre $P_3 \notin S$ perché $y_{P_3} = -1/2 < -1/4$ (fig. 8).

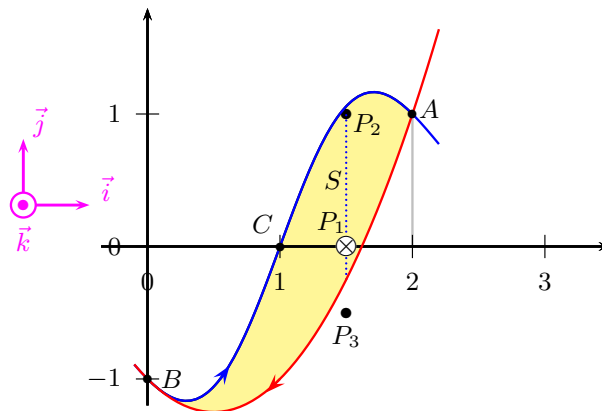


Fig. 8. Correnti comprese entro il contorno di S e terna di riferimento.

La corrente i_3 di conseguenza non è concatenata con il percorso quindi non influisce sulla circuitazione del campo magnetico. Introdotta la terna destrorsa costituita dai vettori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} (\vec{k} è uscente dal foglio) e detto γ il contorno di S che supponiamo di percorrere nel verso orario (fig. 8) cosicché $i_1 = 2\text{ A} > 0$, per il teorema di Ampère sulla circuitazione Γ avremo

$$\Gamma(\gamma) = \mu_0(i_1 + i_2) = \mu_0(2\text{ A} + i_2). \quad (19)$$

Pertanto:

– supposto $\Gamma(\gamma) > 0$ per cui $2\text{ A} + i_2 > 0$ e quindi $i_2 > -2\text{ A}$, le possibilità che si presentano sono

se $-2\text{ A} < i_2 < 0 \implies i_2$ avrà verso concorde con il versore \vec{k} ,

se $i_2 > 0 \implies i_2$ entrante e concorde con $-\vec{k}$ (come i_1),

se $i_2 = 0 \implies \Gamma(\gamma) = \mu_0(2\text{ A})$.

– se invece $\Gamma(\gamma) \leq 0$ per cui $2\text{ A} + i_2 \leq 0$ e quindi $i_2 \leq -2\text{ A}$, i_2 non potrà che essere sempre negativa e quindi con verso concorde con \vec{k} cioè uscente dal piano di S .

■ La rotazione della regione S nel campo magnetico $\vec{B} = B\vec{k}$ con $B = 1,5 \times 10^{-2}\text{ T}$ genera una variazione di flusso magnetico $\Phi(\vec{B})$ e induce una tensione nel contorno conduttore che, dotato di resistenza $R = 0,20\ \Omega$, viene percorso da una corrente il cui valore massimo è $i_{max} = 5 \times 10^{-3}\text{ A}$.

Per ottenere il valore della velocità angolare ω , definiamo innanzitutto due grandezze:

– il vettore \vec{S} di modulo uguale all'area (18) $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A} = 4/3\text{ m}^2$, perpendicolare al piano (variabile nel tempo) della regione S ,

– l'angolo α tra i vettori \vec{B} e \vec{S} .

Nell'ipotesi, fornita dal testo, che la velocità angolare ω con cui ruota la spira sia costante, la dipendenza dal tempo t dell'angolo α dev'essere rappresentata da una relazione lineare per cui poniamo $\alpha = \omega t + \alpha_0$ con α_0 fase iniziale.

Il flusso del campo magnetico attraverso S è dato dal prodotto scalare

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S},$$

e, nell'ipotesi del testo, questa grandezza assume la forma esplicita

$$\Phi(\vec{B}) = B\mathcal{A} \cos \alpha = B\mathcal{A} \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (20)$$

Tale variazione di flusso genera nella spira una tensione indotta V (o forza elettromotrice) che, per la legge dell'induzione elettromagnetica (o legge di Faraday-Neumann), è descritta dalla

$$V(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -B\mathcal{A}\omega[-\sin(\omega t + \alpha_0)] = B\mathcal{A}\omega \sin(\omega t + \alpha_0) \quad (21)$$

e di conseguenza il bordo conduttore di S viene percorso da una corrente elettrica $i(t)$ che invece segue la legge di Ohm

$$V(t) = Ri(t) \implies i(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{B\mathcal{A}\omega}{R} \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (22)$$

Osservato come la corrente dipenda dal tempo con legge armonica, l'intensità massima è quindi rappresentata dall'ampiezza di (22)

$$i_{max} = \frac{BA\omega}{R}$$

dalla quale, esplicitata l'incognita della velocità angolare, otteniamo il risultato

$$\omega = \frac{Ri_{max}}{BA} = \frac{(0,20 \Omega)(5 \times 10^{-3} \text{ A})}{(1,5 \times 10^{-2} \text{ T})(1,33 \text{ m}^2)} = 5,0125 \times 10^{-2} \text{ rad/s} \approx 0,05 \text{ rad/s.}$$

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

- Il testo propone la funzione

$$|B(t)| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \cdot r \quad (1)$$

per descrivere l'andamento dell'intensità del campo magnetico al variare della distanza r dall'asse di simmetria del condensatore e, soprattutto, dal tempo t . Dato che quest'ultimo viene misurato in secondi (s) per cui il suo quadrato, t^2 , è in s^2 , segue che la grandezza a^2 dev'essere omogenea a t^2 per cui pure la sua unità di misura dev'essere il s^2 e quindi l'unità di a è il secondo.

Per determinare l'unità di misura della costante k , riscriviamo la (1) sostituendo alle grandezze coinvolte le rispettive unità di misura sapendo che il testa (T) è relativa al campo magnetico e il metro (m) è l'unità di r . Abbiamo quindi

$$\text{T} = \frac{k \cdot \text{s}}{\sqrt{(\text{s}^2)^3}} \cdot \text{m}$$

che, semplificata, diviene

$$\text{T} = \frac{k \cdot \text{s}}{\sqrt{\text{s}^6}} \cdot \text{m} = \frac{k \cdot \text{s}}{\text{s}^3} \cdot \text{m} \implies \text{T} = \frac{k \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

per cui, esplicitata la costante k risulta

$$k = \frac{\text{T} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}. \quad (2)$$

In aggiunta, se consideriamo che su un tratto rettilineo di lunghezza l , percorso dalla corrente i ed immerso in un campo magnetico B agisce la forza $F = ilB$ per cui il campo B è pure dato da $B = F/il$, il tesla si può esprimere come

$$\text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Inoltre, per la II legge della dinamica, il newton (N) in termini di unità fondamentali è

$$\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

per cui, inserendo tali relazioni nella (2), riportiamo le unità di k alle unità fondamentali del Sistema Internazionale ossia

$$\begin{aligned} k &= \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{A} \cdot \text{m}^2} \\ &= \frac{\text{s}^2}{\text{A} \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \end{aligned}$$

La legge di Ampère-Maxwell nel caso di assenza di correnti concatenate si scrive come

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}. \quad (3)$$

Questa espressione lega la variazione nel tempo del flusso del campo elettrico \vec{E} , $d\Phi(\vec{E})/dt$, con la circuitazione $\Gamma(\vec{B})$ del campo magnetico e il fattore $i_s = \epsilon_0 d\Phi(\vec{E})/dt$ costituisce la cosiddetta corrente di spostamento introdotta da Maxwell per salvaguardare la continuità della corrente nei punti in cui è presente un campo elettrico variabile nel tempo.

Tra le direzioni dei campi elettrico e magnetico, vi è una relazione di perpendicolarità in tutto lo spazio compreso tra le armature del condensatore: nel caso che il flusso di \vec{E} stia aumentando per cui $d\Phi(\vec{E})/dt > 0$, la corrente di spostamento i_s ha verso concorde con la corrente che porta le cariche sull'armatura positiva e il vettore \vec{B} ha il verso di figura 1 e le sue linee di forza sono delle circonferenze concentriche aventi il centro sull'asse di simmetria e giacenti su piani perpendicolari a questo asse. Il verso di \vec{B} è opposto se $d\Phi(\vec{E})/dt < 0$.

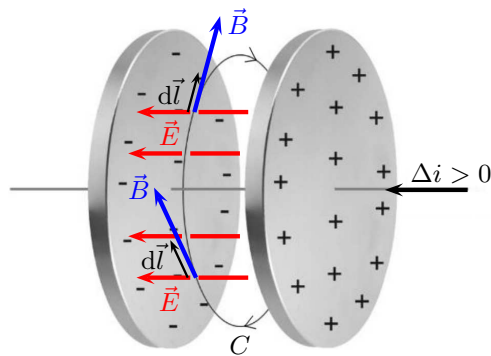


Fig. 1. Condensatore piano, corrente in aumento e campi.

- Richiamata la definizione di circuitazione tramite l'integrale di linea

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (4)$$

oppure, in termini meno formali

$$\Gamma(\vec{B}) = \sum_C \vec{B} \cdot \Delta\vec{l},$$

questa grandezza coinvolge il differenziale $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ che rappresenta il prodotto scalare tra il campo \vec{B} e l'elemento differenziale di percorso $d\vec{l}$. Il suo calcolo lungo la circonferenza C di raggio r disposta tra le armature del condensatore in un piano perpendicolare all'asse e avente centro sull'asse stesso (fig. 1) si semplifica non appena si osservi come in ogni punto di C siano paralleli i vettori \vec{B} e $d\vec{l}$: ne segue che

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos 0^\circ = B dl$$

per cui la (4) diviene

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_C B dl. \quad (5)$$

Data inoltre la simmetria cilindrica esistente, lungo C il modulo B è costante e (5) si semplifica ulteriormente in

$$\Gamma(\vec{B}) = B \oint_C dl = 2\pi r B \quad (6)$$

dove $\oint_C dl = 2\pi r$ rappresenta nient'altro che la lunghezza di C .

Nota la circuitazione, dalla (3) possiamo isolare il differenziale del flusso

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \implies d\Phi(\vec{E}) = \frac{\Gamma(\vec{B}) dt}{\mu_0 \epsilon_0}$$

e quindi con il risultato (6) ottenere

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi r B dt}{\mu_0 \epsilon_0}.$$

Poiché la dipendenza dal tempo del modulo di \vec{B} è nota dalla (1), ne discende anche la dipendenza da t del differenziale del flusso

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi r}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \cdot r = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{t \cdot dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}. \quad (7)$$

Se quindi risolviamo l'integrale definito nell'intervallo $[0, t]$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \int_0^t \frac{t \cdot dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \quad (8)$$

potremo determinare l'espressione finita di $\Phi(\vec{E})$. Con tale obiettivo, definiamo il cambio di variabile

$$z = t^2 + a^2, \quad dz = 2t dt \implies t dt = \frac{1}{2} dz,$$

e l'integrale indefinito associato al precedente si riscrive

$$\begin{aligned} \int \frac{t \cdot dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z^3}} = \frac{1}{2} \int z^{-3/2} dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{1-(3/2)}}{1-(3/2)} + c = -\frac{1}{\sqrt{z}} + c \\ &= -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + c \end{aligned}$$

per cui (8) si esplicita in

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{E}) &= \frac{2\pi kr^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right]_0^t = \frac{2\pi kr^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2}} \right] \\ &= \frac{2\pi kr^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right] \quad (a > 0),\end{aligned}\quad (9)$$

che costituisce il risultato richiesto.

– Per giungere alla d.d.p. V è necessario conoscere il campo elettrico \vec{E} dato che, in un condensatore con armature a distanza d , tra queste grandezze sussiste la relazione $V = E d$. Se quindi \vec{S} è il vettore perpendicolare al cerchio di bordo C , modulo $S = \pi r^2$ e verso concorde con \vec{E} , la definizione di flusso per il campo elettrico implica

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = E S \cos 0^\circ = E \cdot (\pi r^2) \quad (10)$$

in quanto i due vettori coinvolti sono, appunto, paralleli e concordi. Sostituendo in quest'ultima la (9)

$$E(\pi r^2) = \frac{2\pi kr^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right]$$

abbiamo l'espressione per il campo elettrico

$$E = \frac{2k}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right]$$

dalla quale, per $V = E d$ si ha subito

$$V = \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right]. \quad (11)$$

– L'andamento asintotico del campo magnetico si trova calcolando il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |B(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr \cdot t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}. \quad (12)$$

A questo scopo riscriviamo la funzione ad argomento del limite estraendo dalla radice al denominatore il fattore t^3

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr \cdot t}{\sqrt{\left[t^2 \left(1 + \frac{a^2}{t^2} \right) \right]^3}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr \cdot t}{t^3 \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{t^2} \right)^3}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr}{t^2 \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{t^2} \right)^3}}.$$

Poiché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{t^2} = 0 \quad \text{cosicché} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{t^2} \right)^3} = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr}{t^2} = 0,$$

il limite richiesto è nullo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |B(t)| = 0$$

e pertanto il campo magnetico si annulla asintoticamente. La ragione di ciò sta nell'andamento, pure asintotico della la d.d.p. tra le armature. Difatti la d.d.p. espressa dalla (11) tende al valore costante

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right] = \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0 a}$$

in quanto (si veda più avanti)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} = 0.$$

Poiché il campo è proporzionale a V tramite la $V = E d$ e a sua volta, il flusso lo è al campo, $\Phi(\vec{E}) = E(\pi r^2)$, ne segue che

$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{così come, per (3)} \quad \Gamma(\vec{B}) \rightarrow 0$$

e quindi l'annullarsi del campo magnetico.

▪ Definita la funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}, \quad (a > 0) \quad (13)$$

se

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \quad (14)$$

è una primitiva (e, a parte il segno, lo conferma la (9)), allora deve soddisfare la proprietà $F'(t) = f(t)$. Difatti il calcolo della sua derivata prima fornisce

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\frac{1}{(t^2 + a^2)} \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + a^2}} \\ &= -\frac{t}{(t^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} = f(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Inoltre il grafico di (14) passa per l'origine in quanto è immediato notare che $F(0) = 1/a - 1/a = 0$.

– Iniziamo lo studio del grafico di F con $t \in \mathbb{R}$ determinandone innanzitutto il segno: se moltiplichiamo entrambi i membri della disequazione

$$F(t) \geq 0 \quad \implies \quad \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \geq 0$$

per il denominatore comune positivo, questa è equivalente alla

$$a \geq \sqrt{t^2 + a^2} \quad \implies \quad a^2 \geq t^2 + a^2$$

dalla quale discende $t^2 \leq 0$, soddisfatta solo se $t = 0$. Pertanto $F(t) < 0$ se $t \neq 0$ oppure $F(0) = 0$.

Circa eventuali simmetrie il calcolo di $F(-t)$

$$F(-t) = \frac{1}{\sqrt{(-t)^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra la validità dell'identità $F(-t) = F(t)$ per cui F è una funzione pari con un grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

La funzione è continua nel dominio \mathbb{R} in quanto composta da funzioni pure continue e con denominatore diverso dallo zero cosicché gli unici limiti sono $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t)$. Osservato che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} = 0$$

essendo

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (t^2 + a^2) = +\infty, \quad \text{per cui se } z = t^2 + a^2 \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} = 0,$$

allora

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{a}$$

dato che il secondo addendo è una costante. La retta orizzontale $y_a = -1/a$ è quindi un asintoto per F e poiché

$$F(t) - y_a > 0 \quad \implies \quad F(t) - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} > 0$$

è $F(t) > y_a$ e il grafico di F appartiene al semipiano superiore dei due definiti dall'asintoto. La derivata prima $F'(t)$ è data dalla (13) e il suo segno è

$$F'(t) \geq 0 \quad \implies \quad -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \geq 0 \quad \implies \quad -t \geq 0 \quad \implies \quad t \leq 0$$

per cui la F possiede un massimo in $(0, 0)$ (fig. 2).

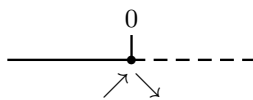


Fig. 2. Segno di $F'(t)$.

Il calcolo della $F''(t)$ dà

$$\begin{aligned} F''(t) &= - \left[\frac{(t^2 + a^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(t^2 + a^2)^{1/2} \cdot 2t^2}{(t^2 + a^2)^3} \right] \\ &= - \frac{t^2 + a^2 - 3t^2}{(t^2 + a^2)^{5/2}} = \frac{2t^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

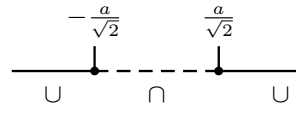


Fig. 3. Segno di $F''(t)$.

per cui

$$F''(t) \geq 0 \implies 2t^2 - a^2 \geq 0 \implies t \leq -\frac{a}{\sqrt{2}} \vee t \geq \frac{a}{\sqrt{2}},$$

insieme nel quale le concavità sono rivolte nel verso delle ordinate positive (fig. 3).

I punti di flesso sono invece $t_{1,2} = \pm a/\sqrt{2}$ con ordinate

$$F\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 3}{3a} \quad (16)$$

e le pendenze in tali punti si ottengono dal calcolo della derivata prima (15) cioè

$$F'\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pm \frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}a^2\right)^3}} = \frac{\mp \frac{a}{\sqrt{2}}}{a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{2}{3a^2\sqrt{3}}.$$

Il grafico di $F(t)$ è rappresentato quindi nella figura 4.

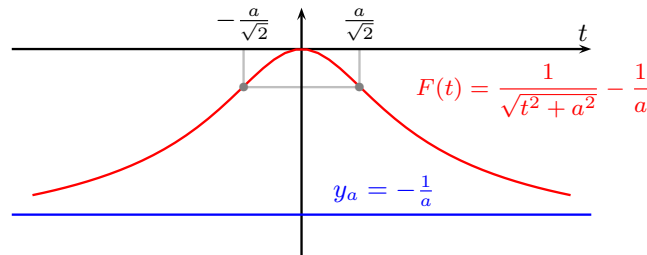


Fig. 4. Grafico della funzione $F(t)$, punti di flesso e asintoto.

- Per dedurre il grafico di $f(t)$ da quello di $F(t)$ va ricordato che
 - a) $f(t)$ è la derivata prima di $F(t)$ cioè $F'(t) = f(t)$ cosicché $F''(t) = f'(t)$.
 - b) Poiché $F(t)$ è pari, la sua derivata prima $F'(t)$ è dispari e, comunque, tale proprietà emerge immediatamente dalla validità dell'identità $f(-t) = -f(t)$.

Possiamo quindi circoscrivere lo studio qualitativo all'intervallo illimitato $t \in]-\infty, 0]$ e analizzare, con l'aiuto della rappresentazione grafica, l'andamento del coefficiente angolare delle rette tangenti al grafico di figura 4.

Innanzitutto vale il limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$$

in quanto, per l'andamento asintotico di $F(t)$ le rette tangenti tendono a disporsi parallelamente all'asse dei valori di t (fig. 5).

Quindi, procedendo nel verso di t crescente, la pendenza di $F(t)$ rimane positiva ma va crescendo e raggiunge il valore massimo quando $t = -a/\sqrt{2}$ (fig. 6) ossia quando la $F(t)$ presenta il primo flesso: formalmente $F''(-a/\sqrt{2}) = f'(-a/\sqrt{2}) = 0$.

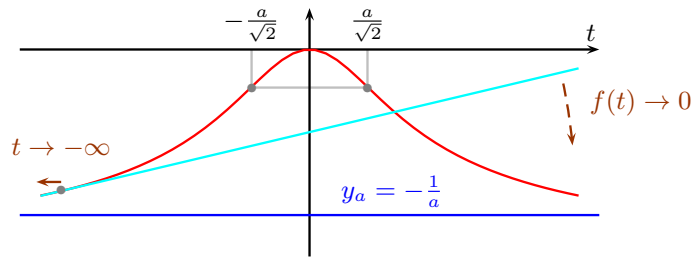


Fig. 5. Grafico della funzione $F(t)$ e retta tangente con $t \rightarrow -\infty$.

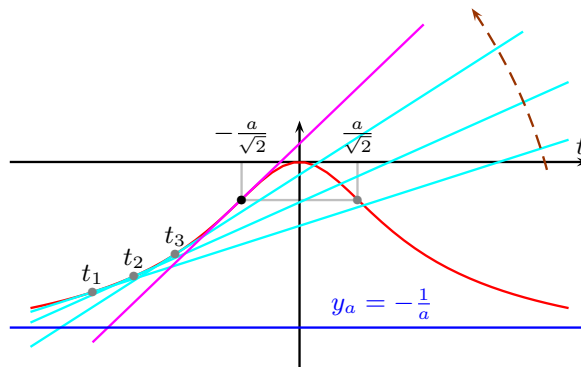


Fig. 6. Grafico della funzione $F(t)$ e tangenti con t crescente e $t < -a/\sqrt{2}$.

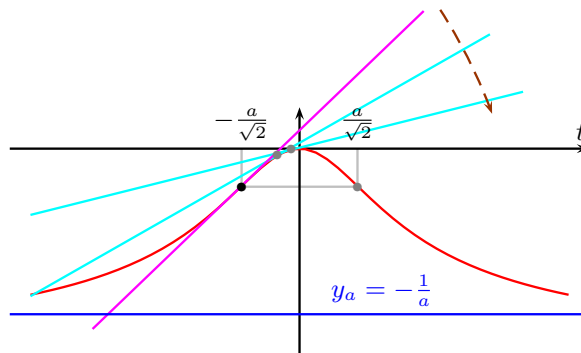


Fig. 7. Grafico della funzione $F(t)$ e tangenti con t crescente e $-a/\sqrt{2} < t \leq 0$.

Successivamente l'inclinazione, pur rimanendo positiva, tende a diminuire fino ad annullarsi in corrispondenza di $t = 0$ (fig. 7.).

Sulla base di queste osservazioni e sfruttando la simmetria dispari di $f(t)$ proponiamo nella figura 8 un suo grafico approssimativo dove riportiamo le ascisse dei suoi punti di massimo e minimo che, come detto, coincidono con i punti di flesso di $F(t)$.

– Per la simmetria dispari di $f(t)$, l'area \mathcal{A} della regione evidenziata in figura 8 è data dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = -2 \cdot \int_0^{a/\sqrt{2}} f(t) dt, \quad (17)$$

dove il segno negativo si giustifica in quanto nell'intervallo $[0, a/\sqrt{2}]$ l'integrale fornirebbe

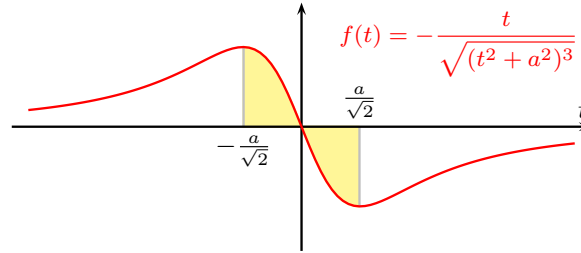


Fig. 8. Grafico della funzione $f(t)$ e punti di estremo.

un valore negativo dato che $f(t) < 0$.

Poiché $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$ abbiamo che (17) diviene

$$\mathcal{A} = -2[F(t)]_0^{a/\sqrt{2}} = -2\left[F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - 0\right]$$

ma, ripreso il risultato (16), troviamo

$$\mathcal{A} = -2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6} - 3}{3a}\right) = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{3a}.$$

– Il calcolo dell'integrale

$$\int_{-b}^b f(t) dt \quad (18)$$

è invece immediato e fornisce un risultato nullo in quanto, per la simmetria dispari di $f(t)$ e degli estremi di integrazione, esso esprime la somma di due trapezoidi di aree uguali ma algebricamente di segno opposto (fig. 9).

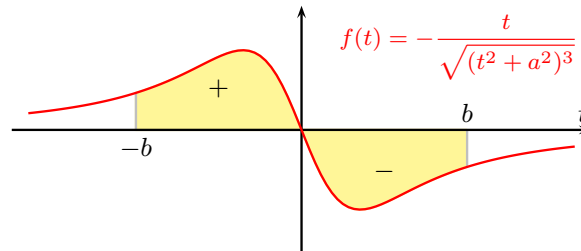


Fig. 9. Aree della funzione $f(t)$ e loro segno.

Più formalmente, l'integrale (18) si può suddividere nella somma

$$\int_{-b}^b f(t) dt = \int_{-b}^0 f(t) dt + \int_0^b f(t) dt \quad (19)$$

e definito il cambio di variabile

$$t = -z, \quad \implies \quad dt = -dz, \quad \implies \quad z_{inf} = -(-b) = b, \quad z_{sup} = 0$$

si può riscrivere il primo addendo di (19)

$$\int_{-b}^0 f(t)dt = \int_b^0 f(-z)(-dz) = \int_b^0 [-f(z)](-dz) = \int_b^0 f(z)dz = -\int_0^b f(z)dz$$

dove si sono utilizzate la simmetria di $f(t)$ e, nell'ultimo passaggio, la proprietà dell'inversione degli estremi di integrazione. In tal modo l'integrale (19) si riduce alla somma di due valori opposti

$$\int_{-b}^b f(t)dt = -\int_0^b f(t)dt + \int_0^b f(t)dt = 0.$$

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Assegnata la funzione f nella forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d}, \quad d \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p(x) = \text{polinomio}, \quad (1)$$

il suo grafico interseca l'asse x nei punti di ascisse $x_1 = 0$ e $x_2 = 12/5$ per cui questi valori devono essere le soluzioni dell'equazione $f(x_{1,2}) = 0$ che, essendo f data da un rapporto, si riflettono su $p(x_{1,2}) = 0$. Supponendo che il grado del polinomio $p(x)$ sia $m \in \mathbb{N}$, $p(x)$ si potrà scomporre nel prodotto

$$p(x) = (x - 0)\left(x - \frac{12}{5}\right) \cdot q(x) = x\left(x - \frac{12}{5}\right)q(x) \quad (2)$$

con $q(x)$ a sua volta polinomio di grado $n = m - 2$.

L'esistenza di due asintoti verticali di equazioni $x = \pm 3$ impone invece che il denominatore $D(x) = x^2 + d$ si annulli in corrispondenza di tali valori: pertanto

$$D(\pm 3) = 0 \quad \implies \quad (\pm 3)^2 + d = 0 \quad \implies \quad d = -9.$$

Inoltre il numeratore dovrà soddisfare la condizione $p(\pm 3) \neq 0$.

Con tali informazioni la funzione f assume la forma

$$f(x) = \frac{x\left(x - \frac{12}{5}\right)q(x)}{x^2 - 9}, \quad (3)$$

ma la presenza nel suo grafico dell'asintoto orizzontale di equazione $y = 5$ implica che il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{sia } a) \text{ finito e } b) \text{ pari a } 5.$$

La prima condizione è soddisfatta se sono uguali i gradi dei polinomi a numeratore e a denominatore e poiché il grado del denominatore è 2, allora il grado n di $q(x)$ dev'essere $n = 0$. $q(x)$ è perciò una costante e poniamo $q(x) = a$. La seconda condizione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

permette di determinare a in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax(x - \frac{12}{5})}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2(1 - \frac{12}{5x})}{x^2(1 - \frac{9}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(1 - \frac{12}{5x})}{1 - \frac{9}{x^2}},$$

e poiché

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x^2} = 0$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(1 - \frac{12}{5x})}{1 - \frac{9}{x^2}} = a \implies a = 5. \quad (4)$$

La funzione richiesta è, in definitiva,

$$f(x) = \frac{5x(x - \frac{12}{5})}{x^2 - 9} = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 3\}, \quad (5)$$

e la ricerca dei suoi estremi si fonda sul calcolo della derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x - 12)(x^2 - 9) - 2x(5x^2 - 12x)}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{12x^2 - 90x + 108}{(x^2 - 9)^2} = \frac{6(2x^2 - 15x + 18)}{(x^2 - 9)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

e sullo studio del suo segno, $f'(x) \geq 0$. Quest'ultimo dipende solo dal termine quadratico a numeratore di (6) per cui

$$2x^2 - 15x + 18 \geq 0 \implies x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{4} = \begin{matrix} \nearrow 6 \\ \searrow 3/2 \end{matrix}$$

e quindi $f'(x) \geq 0$ nell'insieme $]-\infty, 3/2] \cup [6, +\infty[$. Nella rappresentazione grafica del segno della derivata prima e degli intervalli in cui f è crescente/decrescente (fig. 1) appare evidente che $x_M = 3/2$ è l'ascissa di un massimo relativo proprio mentre $x_m = 6$ quella di un minimo relativo proprio.

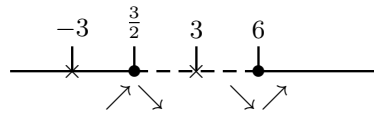


Fig. 1. Segno di $f'(x)$.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

La funzione polinomiale, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2017} + x^{2019}, \quad (1)$$

di grado 2019 e somma di potenze dispari della variabile x , è una funzione dispari: difatti

$$g(-x) = \sum_{n=1}^{1010} (-x)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{1010} [-(x^{2n-1})] = -\sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Inoltre i suoi limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

in quanto g si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2019} \left(\frac{1}{x^{2018}} + \frac{1}{x^{2016}} + \cdots + \frac{1}{x^2} + 1 \right)$$

e il termine di grado massimo ha limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2019} = \pm\infty$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{2018}} + \frac{1}{x^{2016}} + \cdots + \frac{1}{x^2} + 1 \right) = 1.$$

Circa le proprietà di g notiamo che essa assume agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ i valori

$$g(1) = \sum_{n=1}^{1010} (1)^{2n-1} = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}^{1010 \text{ volte}} = 1010 > 0 \quad (3)$$

e quindi per simmetria

$$g(-1) = -g(1) = -1010 < 0. \quad (4)$$

Inoltre la sua derivata prima

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots + 2017x^{2016} + 2019x^{2018} \\ &= \sum_{n=1}^{1010} (2n-1) \cdot x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{1010} (2n-1)(x^{n-1})^2 \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5)$$

è costituita dalla somma di potenze pari di x cosicché certamente soddisfa la diseuguaglianza

$$g'(x) > 0 \quad x \in [-1, 1]. \quad (6)$$

Tali proprietà soddisfano le ipotesi del teorema degli zeri (o di B. Bolzano) per cui deve esistere un valore $x_0 \in [-1, 1]$ tale che $g(x_0) = 0$. Inoltre, data la positività di $g'(x)$ con $x \in [-1, 1]$ e quindi per la monotonia strettamente crescente in tale intervallo, tale valore è unico e non può che essere, per la simmetria, $x_0 = 0$: difatti non solo risulta

$$g(0) = \sum_{n=1}^{1010} (0)^{2n-1} = 0$$

ma pure tale valore emerge evidente nella riscrittura di g come prodotto

$$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2016} + x^{2018}):$$

difatti tale prodotto si annulla solo per $x = 0$ in quanto il secondo fattore è diverso dallo zero per ogni $x \in \mathbb{R}$.

• Il limite richiesto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} \quad (7)$$

comporta evidentemente lo studio di una indeterminazione del tipo ∞/∞ in quanto entrambe le funzioni coinvolte possiedono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1,1^x = +\infty.$$

Analizziamo quindi l'eventuale applicabilità del teorema di De L'Hôpital determinando il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{D[1,1^x]}. \quad (8)$$

Ripresa la (5) ed eseguendo la derivata del denominatore otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{D[1,1^x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{1010} (2n-1)(x^{n-1})^2}{1,1^x \cdot \ln(1,1)}$$

che rientra ancora nel caso ∞/∞ in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{1010} (2n-1)(x^{n-1})^2 = +\infty.$$

Osserviamo comunque come il polinomio a numeratore abbia ora il grado massimo pari a 2018 e quindi inferiore di una unità rispetto a 2019. Ciò suggerisce di procedere comunque allo stesso modo per altre 2018 volte ottenendo alla fine, a numeratore, una costante k mentre al denominatore avremo il termine

$$1,1^x \cdot [\ln(1,1)]^{2019}.$$

Poiché il limite di questo termine è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1,1^x \cdot [\ln(1,1)]^{2019} = +\infty \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k,$$

esiste di conseguenza il limite dell'ultimo rapporto ed è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{1,1^x \cdot [\ln(1,1)]^{2019}} = 0.$$

Diviene quindi possibile applicare a ritroso il teorema di De L'Hôpital per 2018 volte e concludere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = 0.$$

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Sia $x > 0$ la misura della lunghezza del lato del quadrato di base e $h > 0$ l'altezza del parallelepipedo (fig. 1). L'area S della superficie totale è evidentemente

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot (\text{area di base}) + 4 \cdot (\text{area faccia laterale}) = 2(x^2) + 4(hx) \\ &= 2x^2 + 4hx \end{aligned} \quad (1)$$

e poiché devono valere le limitazioni $x > 0$ e $h > 0$ per cui pure $hx > 0$, dalla (1) discende

$$4hx = S - 2x^2 > 0 \implies S - 2x^2 > 0 \implies x^2 < \frac{S}{2} \implies x < \sqrt{\frac{S}{2}}. \quad (2)$$

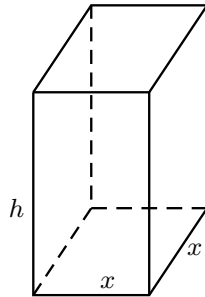


Fig. 1. Parallelepipedo rettangolo e sue dimensioni.

La somma y delle lunghezze degli spigoli è la grandezza da studiare e in termini delle dimensioni del parallelepipedo è data dalla

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot (\text{somma spigoli di base}) + 4 \cdot (\text{altezza}) = 2(4x) + 4h \\ &= 8x + 4h. \end{aligned} \quad (3)$$

Tale grandezza dipende da entrambe le dimensioni del parallelepipedo e per poterla studiare va riportata ad una sola variabile. A tal fine utilizziamo l'informazione sull'area complessiva esplicitando h nella (1)

$$h = \frac{S - 2x^2}{4x} : \quad (4)$$

sostituita questa espressione nella (3) riduciamo la funzione y ad una sola variabile aggiungendovi le limitazioni (2)

$$\begin{cases} y = 8x + 4 \left(\frac{S - 2x^2}{4x} \right) = 8x + \frac{S}{x} - 2x = 6x + \frac{S}{x} \\ 0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}. \end{cases}$$

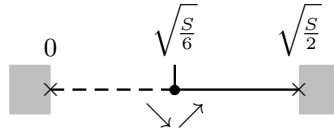


Fig. 2. Segno di y' e crescita/decrecenza di y .

Per la ricerca del minimo di y calcoliamo la sua derivata prima e ne studiamo il segno

$$y' = 6 - \frac{S}{x^2} \geq 0 \implies 6x^2 - S \geq 0 \implies x^2 \geq \frac{S}{6} \implies x \geq \sqrt{\frac{S}{6}}$$

rappresentandolo poi nella figura 2 assieme alle limitazioni.

La funzione y presenta quindi un minimo in corrispondenza di $x_{min} = \sqrt{S/6}$ cui corrisponde un'altezza del parallelepipedo che, dalla (4), risulta

$$\begin{aligned} h &= \frac{S}{4x_{min}} - \frac{x_{min}}{2} = \frac{\sqrt{6S}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{6}} \\ &= \sqrt{S} \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12} \right) = \sqrt{\frac{S}{6}} = x_{min} \end{aligned}$$

per cui, in definitiva, il parallelepipedo che minimizza la somma delle lunghezze degli spigoli si riduce ad un cubo.

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Assegnati i punti nello spazio $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$ e definito il punto generico $P(x, y, z)$ le distanze \overline{PA} e \overline{PB} sono espresse dalle

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2} \quad (1)$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \quad (2)$$

per cui la relazione $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB}$ si esplicita in

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2]$$

e sviluppando i quadrati

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + z^2 + 1 + 2z = 2x^2 + 8 + 8x + 2y^2 + 8 - 8y + 2z^2 + 2 - 4z$$

e riducendo i termini simili, otteniamo l'equazione in tre variabili del luogo S

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0. \quad (3)$$

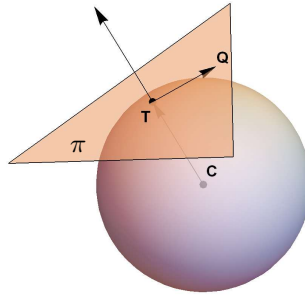


Fig. 1. Sfera, centro C e punto T di tangenza del piano π .

Tale equazione rientra nella forma canonica della sfera $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ avente come centro il punto di coordinate $C(-a/2, -b/2, -c/2)$ e raggio $r^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/4 - d$. Nel nostro caso, l'equazione (3) rappresenta una sfera (fig. 1) di centro

$$C\left(-\frac{12}{2}, \frac{8}{2}, \frac{6}{2}\right) \equiv (-6, 4, 3)$$

e raggio

$$r^2 = 36 + 16 + 9 - 13 \implies r^2 = 48 \implies r = 4\sqrt{3}.$$

- La verifica che $T(-10, 8, 7) \in S$ si esegue sostituendo le coordinate di T nell'equazione (3)

$$(-10)^2 + 8^2 + 7^2 + 12(-10) - 8 \cdot 8 - 6 \cdot 7 + 13 = 0$$

e poiché l'uguaglianza è verificata,

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0 \implies 0 = 0$$

la risposta è affermativa.

- Il vettore \overrightarrow{CT} che collega il centro C della sfera con il punto T (in fig. 1 è applicato al punto T) è perpendicolare al piano π tangente in T a S . Se quindi $Q(x, y, z)$ è un punto di π , il piano si può descrivere tramite il prodotto scalare

$$\pi: \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 \tag{4}$$

che sintetizza la perpendicolarità tra \overrightarrow{CT} e \overrightarrow{TQ} . Poiché

$$\overrightarrow{CT} = (-10 + 6, 8 - 4, 7 - 3) \equiv (-4, 4, 4), \quad \overrightarrow{TQ} = (x + 10, y - 8, z - 7)$$

il prodotto (4) si esplicita in

$$\begin{aligned} \pi: (-4, 4, 4) \cdot (x + 10, y - 8, z - 7) &= 0 \\ -4(x + 10) + 4(y - 8) + 4(z - 7) &= 0 & : 4 \\ -x - 10 + y - 8 + z - 7 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi l'equazione rappresentativa del piano è

$$\pi: x - y - z + 25 = 0.$$

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

• La prima domanda chiede di determinare la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti a seguito di un lancio di 4 dadi non superi 5. Se quindi indichiamo con d_1, d_2, d_3 e d_4 i numeri usciti nel lancio, va calcolata la probabilità

$$P(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5). \quad (1)$$

Poiché gli esiti possibili per un dado sono 6 e questi si possono ripetere per ciascuno dei 4 dadi, il numero N delle possibili uscite, tutte equiprobabili, è pari a $N = 6^4$ pari al numero delle disposizioni con ripetizione di 6 oggetti a gruppi di 4.

Il numero di casi con somma $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5$ si possono elencare: difatti

- se $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 4$ allora tutti e 4 i dadi devono presentare come esito il numero 1 ossia (1,1,1,1) e questa eventualità si può presentare solo in $n_1 = 1$ modalità.
- Per avere un'uscita $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 5$ uno dei 4 dadi deve presentare il numero 2 mentre i rimanenti 3 presenteranno il numero 1. Tale situazione si può presentare in 4 modi diversi che elenchiamo come

$$(2, 1, 1, 1) \vee (1, 2, 1, 1) \vee (1, 1, 2, 1) \vee (1, 1, 1, 2)$$

ed è equivalente al numero delle combinazioni di 4 oggetti a gruppi di uno ossia

$$C_{4,1} = \binom{4}{1} = 4.$$

Utilizzando la definizione classica di probabilità, il valore cercato è quindi

$$P(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5) = \frac{n_1 + C_{4,1}}{N} = \frac{1 + 4}{6^4} = \frac{5}{6^4} \approx 0,0039.$$

• Perché sia $P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n)$ con $n \in \mathbb{N}_0$ osserviamo che in un lancio di un dado solo i numeri 3 e 6 sono multipli di 3 mentre 4 non lo sono. I casi favorevoli all'evento richiesto si ottengono sottraendo dai 6^4 casi possibili i 4^4 casi che nel prodotto non presentano il 3 o il 6. Ne segue

$$P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n) = \frac{6^4 - 4^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 0,8025.$$

Anziché procedere con il calcolo combinatorio, la probabilità richiesta si può ottenere anche sfruttando i teoremi sulla probabilità. Poiché in un dado 4 sono i numeri non multipli di 3, (1, 2, 4, 5), definito $E_1 = (1, 2, 4, 5)$ come l'evento che vede l'uscita di uno di questi numeri nel lancio del primo dado, allora la probabilità di questo evento è $p(E_1) = 4/6$. L'evento composto

$$E = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge E_4$$

rappresenta invece il caso che non vi siano multipli di 3 nel lancio dei 4 dadi. Per il teorema della probabilità composta e osservato che ciascun evento E_i è indipendente dagli altri abbiamo

$$P(E) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3) \cdot p(E_4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{4}{6}\right)^4.$$

Infine, poiché siamo interessati all'evento contrario la sua probabilità è data

$$P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n) = 1 - P(E) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 0,8025.$$

• Per il calcolo della probabilità che in un lancio compaia come numero più elevato il 4, $P(d_{max} = 4)$, dobbiamo escludere la presenza dei numeri 5 e 6 in ogni dado cosicché il numero delle disposizioni con ripetizione di 4 “oggetti” a gruppi di 4 è pari a 4^4 . Tra questi eventi vi possono essere uscite coinvolgenti solo i numeri 1, 2, e 3 per cui il numero 4 non sarebbe presente. Volendo invece che lo sia, questi 3^4 casi vanno esclusi dal calcolo dei casi favorevoli cosicché il numero di questi ultimi è $4^4 - 3^4$. La probabilità richiesta è perciò

$$P(d_{max} = 4) = \frac{4^4 - 3^4}{6^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{175}{1296} \approx 0,1350.$$

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

La legge di Faraday-Neumann dell'induzione elettromagnetica afferma che la tensione indotta (o forza elettromotrice) V in un circuito è legata alla variazione $d\Phi(\vec{B})/dt$ di flusso del campo magnetico \vec{B} dalla relazione

$$V = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \quad (1)$$

dove il segno negativo a fattore indica, a sua volta, la legge di Lenz.

Poiché la spira di rame ha una resistenza pari a $R = 4,0 \text{ m}\Omega$, la legge di Ohm applicata ad essa dà

$$V = Ri(t) \quad (2)$$

mentre la definizione di flusso per una spira piana caratterizzata dal vettore \vec{S} che supponiamo parallelo e concorde al campo \vec{B} fornisce

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \quad (3)$$

con $S = 30 \text{ cm}^2$. Aggregando le ultime due in (1) discende

$$Ri(t) = -\frac{d(BS)}{dt} \implies Ri(t) = -S\frac{dB}{dt}$$

in quanto S non dipende dal tempo t e, quale costante, si può estrarre dalla derivata e porre a fattore. La corrente $i(t)$ dipende quindi dalla variazione del campo come

$$i(t) = -\frac{S}{R} \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (4)$$

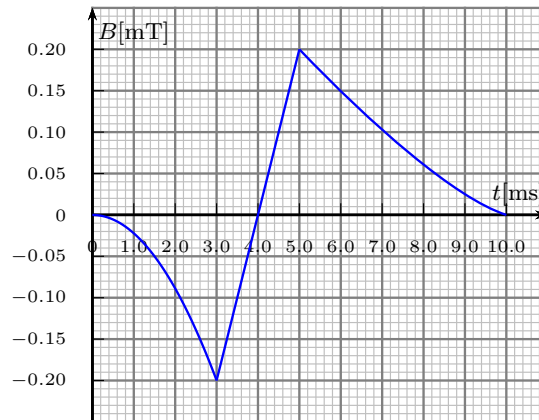


Fig. 1. Dipendenza del campo magnetico $B(t)$ dal tempo t .

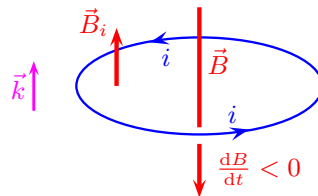


Fig. 2. Variazione di \vec{B} e verso della corrente con $t \in [0, 3]$ ms.

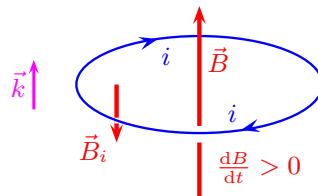


Fig. 3. Variazione di \vec{B} e verso della corrente con $t \in [4, 5]$ ms.

Fissata una direzione positiva tramite il versore \vec{k} (fig. 2), nel primo intervallo dove $0 \leq t \leq 3$ ms, l'andamento grafico di $B(t)$ (fig. 1) mostra un campo inizialmente nullo che assume via via valori decrescenti negativi e quindi con derivata negativa, $dB/dt < 0$. La corrente indotta, per la (4), ha di conseguenza segno positivo e genera un campo magnetico indotto \vec{B}_i con verso opposto a \vec{B} (fig. 2).

Per $3 \text{ ms} < t \leq 5 \text{ ms}$ il campo aumenta con andamento lineare crescente e, inizialmente negativo, assume in $[4, 5]$ ms valori positivi (fig. 3).

La sua derivata è costante e positiva

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{B(5) - B(3)}{(5 - 3)\text{ms}} = \frac{[0,2 - (-0,2)]\text{mT}}{2 \text{ ms}} \\ &= 0,2 \text{ mT/ms} = 0,2 \text{ T/s} > 0 \end{aligned}$$

e di conseguenza la corrente indotta (4) è negativa con intensità costante pari a

$$i(t) = -\frac{(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{(4 \times 10^{-3} \Omega)} \cdot 0,2 \text{ T/s} = -0,15 \text{ A}.$$

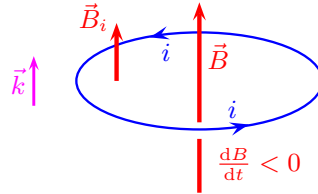


Fig. 4. Variazione di \vec{B} e verso della corrente con $t \in [5, 10]$ ms.

Infine con $5 \text{ ms} < t \leq 10 \text{ ms}$ il campo decresce fino ad annullarsi per cui $dB/dt < 0$ e la corrente ridiventa positiva (fig. 4). Riassumiamo tali osservazioni nello schema seguente:

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 3 \text{ ms}, & \quad \frac{dB}{dt} < 0 \implies i(t) > 0, \\ 3 \text{ ms} < t \leq 5 \text{ ms}, & \quad \frac{dB}{dt} = 0,2 \text{ T/s} \implies i(t) = -0,15 \text{ A}, \\ 5 \text{ ms} < t \leq 10 \text{ ms}, & \quad \frac{dB}{dt} < 0 \implies i(t) > 0. \end{aligned}$$

Il calcolo dei valori medi della corrente indotta nei tre intervalli deve far uso, formalmente, dell'espressione matematica che definisce il valor medio \bar{f} di una funzione nell'intervallo $[a, b]$ ossia

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (5)$$

Definiti per comodità di scrittura i tre istanti $t_1 = 3 \text{ ms}$, $t_2 = 5 \text{ ms}$, $t_3 = 10 \text{ ms}$, l'applicazione di tale integrale nel primo intervallo assume la forma

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{(t_1 - 0)} \cdot \int_0^{t_1} i(t) dt$$

che, per la (4) scriviamo come

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} \left(-\frac{S}{R} \cdot \frac{dB}{dt} \right) dt = -\frac{S}{t_1 R} \cdot \int_0^{t_1} \left(\frac{dB}{dt} \right) dt \quad (6)$$

dove si è estratto dall'integrale il fattore $-S/R$ in quanto costante. Poiché in ambito matematico è nota la proprietà

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a) \quad (7)$$

che, a seconda della notazione utilizzata, può assumere le forme alternative

$$\int_a^x f'(t) dt = \int_a^x \left(\frac{df}{dx} \right) dx = \int_a^x df,$$

e collegate alla nozione di differenziale $df = (df/dx)dx$, allora la (6) si riduce alla

$$\bar{i}_1 = -\frac{S}{t_1 R} \cdot \int_0^{t_1} dB$$

e quindi per la (7)

$$\bar{i}_1 = -\frac{S}{t_1 R} \cdot [B(t_1) - B(0)].$$

Dedotti dal grafico di figura 1 i valori $B(t_1) = -0,2 \text{ mT}$ e $B(0) = 0 \text{ mT}$, troviamo

$$\bar{i}_1 = -\frac{(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(-0,2 \times 10^{-3} \text{ T})}{(3 \times 10^{-3} \text{ s})(4 \times 10^{-3} \Omega)} = 0,05 \text{ A}.$$

Nel secondo intervallo il valore medio della corrente \bar{i}_2 è, per (5), dato dall'integrale

$$\bar{i}_2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$$

che, con le medesime deduzioni precedenti, riportiamo come

$$\bar{i}_2 = -\frac{S}{(t_2 - t_1)R} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dB = -\frac{S}{(t_2 - t_1)R} \cdot [B(t_2) - B(t_1)].$$

Essendo $B(t_2) = 0,2 \text{ mT}$, il calcolo numerico fornisce il valore

$$\bar{i}_2 = -\frac{(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2)[(0,2 + 0,2) \times 10^{-3} \text{ T}]}{[(5 - 3) \times 10^{-3} \text{ s}](4 \times 10^{-3} \Omega)} = -0,15 \text{ A}.$$

Analogamente, il valor medio \bar{i}_3 della corrente indotta è rappresentato da

$$\bar{i}_3 = \frac{1}{t_3 - t_2} \cdot \int_{t_2}^{t_3} i(t) dt$$

che si riconduce all'espressione

$$\bar{i}_3 = -\frac{S}{(t_3 - t_2)R} \cdot \int_{t_2}^{t_3} dB = -\frac{S}{(t_3 - t_2)R} \cdot [B(t_3) - B(t_2)]$$

e quindi al valore

$$\bar{i}_3 = -\frac{(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2)[(0 - 0,2) \times 10^{-3} \text{ T}]}{[(10 - 5) \times 10^{-3} \text{ s}](4 \times 10^{-3} \Omega)} = 0,03 \text{ A}.$$

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Definiti i due sistemi di riferimento $Oxyz$, solidale al laboratorio, e $O'x'y'z'$ solidale alla navicella in moto lungo l'asse x con velocità relativa ad O pari a $v = 0,80c$ (fig. 1) e indicati come

$$\Delta t = 2 \text{ ns} = 2 \times 10^{-9} \text{ s}, \quad \text{e} \quad \Delta x = 25 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (1)$$

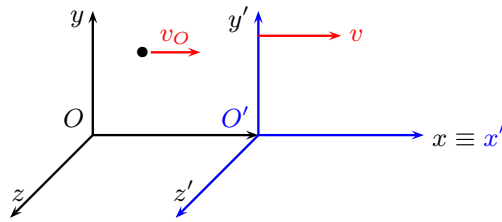


Fig. 1. Sistemi di riferimento inerziali O e O' .

rispettivamente, l'intervallo di tempo e lo spostamento della particella rilevati in laboratorio, la velocità di questa nel sistema di origine O è evidentemente data dal rapporto

$$v_O = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25 \times 10^{-2} \text{ m}}{2 \times 10^{-9} \text{ s}} = 1,25 \times 10^8 \text{ m/s} = 0,417 c. \quad (2)$$

Per moti relativi lungo l'asse comune, la velocità v'_x osservata nel sistema O' in moto con velocità v rispetto ad O , è collegata alla velocità v_x , rilevata dall'osservatore O , dalle trasformazioni di Lorentz per le velocità

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z. \quad (3)$$

Identificato v_O con v_x , la prima delle (3) fornisce la velocità

$$v'_x = \frac{v_O - v}{1 - \frac{v_O v}{c^2}} = \frac{0,417 c - 0,8 c}{1 - \left(\frac{0,417 \cdot 0,8 c^2}{c^2} \right)} = -0,575 c = -1,73 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

La distanza percorsa $\Delta x'$ e rilevata nel sistema O' così come l'intervallo di tempo $\Delta t'$ trascorso per O' si deducono applicando le trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

che, poiché si stanno considerando intervalli, si riflettono nelle

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ciascuna delle quali con i valori presenti in (1) fornisce il risultato

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{25 \times 10^{-2} \text{ s} - (0,8 c) \cdot 2 \times 10^{-9} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0,8)^2}} = -0,383 \text{ m} \\ \Delta t' &= \frac{2 \times 10^{-9} \text{ s} - (0,8/c) \cdot 25 \times 10^{-2} \text{ m}}{\sqrt{1 - (0,8)^2}} = 2,22 \times 10^{-9} \text{ s}. \end{aligned}$$

Notiamo infine che la velocità media v'_x rilevata dalla navicella si ottiene pure dal rapporto delle ultime due grandezze $v'_x = \Delta x' / \Delta t'$.

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Una particella con carica e , qual è il protone, immessa in un campo magnetico \vec{B} con velocità \vec{v} è soggetta alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

Se si scompone la velocità nella somma di due componenti, \vec{v}_\perp vettore componente perpendicolare al campo magnetico \vec{B} e \vec{v}_\parallel vettore componente parallelo a \vec{B} per cui

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel,$$

la forza di Lorentz si riscrive come

$$\vec{F} = e(\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} = e(\vec{v}_\perp \times \vec{B}) + e(\vec{v}_\parallel \times \vec{B}) = e\vec{v}_\perp \times \vec{B} \quad (2)$$

in quanto i due vettori \vec{v}_\parallel e \vec{B} sono paralleli per cui $\vec{v}_\parallel \times \vec{B} = \vec{0}$.

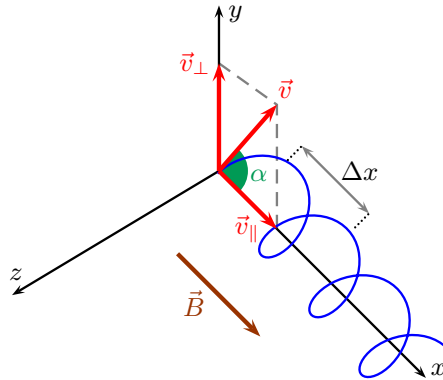


Fig. 1. Traiettoria del protone, velocità e campo magnetico.

Supposto il vettore \vec{B} parallelo all'asse x (fig. 1), la (2) mostra come tale forza debba agire nel piano yz avendo nulla, in ogni istante del moto, la sua componente lungo l'asse x . Sempre dalla (2) ricaviamo il suo modulo

$$F = ev_\perp B \quad (3)$$

che, essendo costante, è responsabile del moto circolare uniforme della particella nel piano yz . Poiché lungo l'asse x nella direzione del campo non agiscono forze, la particella procede di moto rettilineo uniforme con la velocità v_\parallel . La combinazione di questi due moti genera, appunto, la traiettoria ad elica cilindrica richiamata dal testo.

Considerando il moto sul piano yz , l'applicazione della seconda legge della dinamica fornisce la relazione

$$ev_\perp B = m \frac{v_\perp^2}{r}$$

essendo r il raggio della circonferenza e v_{\perp}^2/r l'accelerazione centripeta del moto. Da quest'ultima relazione possiamo determinare la componente v_{\perp} ossia

$$v_{\perp} = \frac{eBr}{m} \quad (4)$$

e quindi, sostituendo i dati del problema e i valori delle **costanti** fisiche, ottenere il suo valore

$$v_{\perp} = \frac{(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-3} \text{ T})(10,5 \times 10^{-2} \text{ m})}{1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 1,01 \times 10^4 \text{ m/s.}$$

Se T è il periodo di rotazione, la cinematica del moto circolare fornisce pure la relazione

$$v_{\perp} = \frac{2\pi r}{T} \quad (5)$$

per cui uguagliandola con (4) discende

$$\frac{eBr}{m} = \frac{2\pi r}{T} \implies T = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (6)$$

Poiché il passo Δx dell'elica (fig. 1) è la distanza percorsa alla velocità v_{\parallel} nell'intervallo di tempo T la cinematica del moto rettilineo uniforme assicura $\Delta x = v_{\parallel} \cdot T$ e quindi la componente parallela al campo della velocità è, per la (6),

$$v_{\parallel} = \frac{\Delta x}{T} = \frac{eB\Delta x}{2\pi m} \quad (7)$$

e numericamente

$$v_{\parallel} = \frac{(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-3} \text{ T})(38,1 \times 10^{-2} \text{ m})}{2\pi(1,673 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 5,81 \times 10^3 \text{ m/s.}$$

Ottenute in (4) e (7) le due componenti della velocità, il suo modulo è

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$$

che, con i valori numerici trovati risulta

$$v = \sqrt{(1,01 \times 10^4)^2 + (5,81 \times 10^3)^2} \text{ m/s} = 1,17 \times 10^4 \text{ m/s.} \quad (8)$$

Infine l'angolo α che il vettore velocità \vec{v} forma con la direzione del campo magnetico (fig. 1) è

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \implies \alpha = \text{arctg}\left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}\right), \quad (9)$$

per cui, introdotti i valori numerici delle due componenti, assume il valore

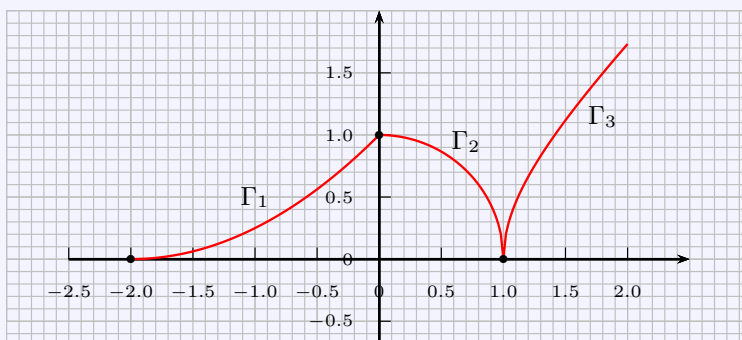
$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{1,01 \times 10^4}{5,81 \times 10^3}\right) = 60,1^\circ.$$

ESAME 2023

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

• Problema n. 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1 , dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3 .



- a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2, 2]$, utilizzando le equazioni:

$$y = a(x + 2)^2 \quad x^2 + y^2 + b = 0 \quad x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a, b, c .

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2.$$

- b) A partire dal grafico della funzione f , dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.
- c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$, definita nell'intervallo $[-2, 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h . Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.
- d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

Soluzione

• **Problema n. 2**

Fissato un parametro reale a , con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a .

- Al variare del parametro a , determinare il dominio di f_a , studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.
- Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.
- Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a . Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1} .
- Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1} , la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

Soluzione

Quesiti

- Sia ABC un triangolo rettangolo in A . Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A .
Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC .

Soluzione

- Un dado truccato con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
 - un numero primo
 - un numero almeno pari a 3
 - un numero al più pari a 3.

Soluzione

- Considerata la retta r passante per i due punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1, -6, 7)$ e tangente a r .

Soluzione

4. Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V , stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Soluzione

5. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Soluzione

6. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1.$$

Soluzione

7. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0. \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a , b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di \mathbb{R} in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Soluzione

8. Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Soluzione

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

a) Poiché l'equazione $y = a(x + 2)^2$ rappresentativa dell'arco di parabola Γ_1 assicura l'annullarsi dell'ordinata y in corrispondenza dell'ascissa $x = -2$, è sufficiente imporre il passaggio per $(0, 1)$ per determinare l'unico parametro incognito a ossia

$$(0, 1) \in \Gamma_1 \implies 1 = a(0 + 2)^2 \implies a = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Circa l'arco di circonferenza Γ_2 osservato che il suo raggio è unitario, il passaggio per $(0, 1)$ implica

$$(0, 1) \in \Gamma_2 \implies 0^2 + 1^2 + b = 0 \implies b = -1. \quad (2)$$

Infine, il passaggio per $(1, 0)$ dell'iperbole Γ_3 fornisce il valore di c

$$(1, 0) \in \Gamma_3 \implies 1^2 - 0^2 + c = 0 \implies c = -1 \quad (3)$$

per cui l'espressione analitica di f risulta

$$f : \begin{cases} y = \frac{1}{4}(x+2)^2, & -2 \leq x < 0 \wedge 0 \leq y < 1 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, & 0 \leq x < 1 \wedge 0 < y \leq 1 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0, & 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{3} \end{cases} \quad (4)$$

e all'estremo destro f assume il valore $f(2) = \sqrt{3}$.

Poiché i grafici Γ_2 e Γ_3 sono descritti da equazioni nella forma implicita, riscriviamo la funzione f con la variabile y esplicitata a primo membro

$$f : \begin{cases} y = \frac{1}{4}(x+2)^2, & -2 \leq x < 0 \wedge 0 \leq y < 1 \\ y = \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \wedge 0 < y \leq 1 \\ y = \sqrt{x^2-1}, & 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{3} \end{cases} \quad (5)$$

e ciò ci permette un più agevole calcolo delle derivate.

Manifestamente il grafico della funzione continua f mostra come esista la derivata destra nel punto di ascissa -2 e come questa sia nulla in quanto questo punto è il vertice della parabola se estesa in \mathbb{R} , mentre in $x = 2$ esiste la sola derivata sinistra. Non è invece derivabile in $x = 0$ e in $x = 1$ mentre nei punti dell'insieme $] -2, 2[- \{0, 1\}$ la funzione non presenta problemi di derivabilità.

La dimostrazione di queste affermazioni discende dallo studio dei limiti dei rapporti incrementali associati: in $x = -2$ risulta

$$f'_+(-2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4}h^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{4} = 0$$

per cui la retta tangente è lo stesso asse x ossia $y = 0$.

Per determinare la derivata sinistra in $x = 2$ e la relativa retta tangente riprendiamo l'espressione (5) con la variabile y esplicitata a primo membro

$$y = \sqrt{x^2 - 1} = f(x) \quad (6)$$

per poi costruire il rapporto incrementale

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\sqrt{(2+h)^2 - 1} - \sqrt{2^2 - 1}}{h} = \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 3} - \sqrt{3}}{h}. \quad (7)$$

Poiché il limite dell'espressione (7) è indeterminato (caso $0/0$), riscriviamo la stessa moltiplicando il numeratore e il denominatore per $\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 3} - \sqrt{3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3}} &= \frac{h^2 + 4h + 3 - 3}{h(\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{h + 4}{\sqrt{h^2 + 4h + 3} + \sqrt{3}}, \end{aligned}$$

cosicché il limite sinistro di questo rapporto è

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h+4}{\sqrt{h^2+4h+3}+\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

in quanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \sqrt{h^2+4h+3} = \sqrt{0+0+3} = \sqrt{3}.$$

In alternativa possiamo derivare l'equazione (6) che, indipendentemente dai limiti imposti può essere definita in $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

calcolandola poi in $x = 2$

$$f'_-(2) = \frac{2}{\sqrt{4-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

La retta tangente risulta pertanto

$$y - f(2) = f'_-(2)(x - 2) \quad \implies \quad y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 2)$$

ossia

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 1). \quad (9)$$

Nel punto di ascissa $x = 0$ non esiste la retta tangente ma essendo il coefficiente angolare sinistro dato dalla $y' = \frac{2}{4}(x+2)$ calcolata in $x = 0$ cioè $y'_-(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ mentre, manifestamente quello destro è $y'_+(0) = 0$, questo punto risulta per la funzione f , un punto angoloso.

Se $x = 1$, la funzione f non è derivabile e presenta in questo punto una cuspide con retta tangente verticale $x = 1$. Ciò si giustifica graficamente ricordando le proprietà geometriche della circonferenza e dell'iperbole dato che quest'ultima presenta il suo vertice nel punto $(1, 0)$. Formalizziamo queste osservazioni riprendendo l'equazione esplicita (5) $y = \sqrt{1-x^2}$ di Γ_2 e studiamo il limite del rapporto incrementale sinistro in $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-(1+h)^2} - 0}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-2h-h^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left[-\frac{\sqrt{-2h-h^2}}{(-h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\sqrt{\frac{-2}{h} - 1} \right) = -\infty \quad (10) \end{aligned}$$

in quanto $\lim_{h \rightarrow 0^-} (-2/h) = +\infty$. Per quanto riguarda il rapporto incrementale dell'arco di iperbole Γ_3 , ancora da (5), risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(1+h)^2-1} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2h+h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2}{h} + 1} = +\infty \quad (11)$$

in quanto $\lim_{h \rightarrow 0^+} (2/h) = +\infty$.

Come accennato, per i valori interni al dominio $[-2, 2]$ di f e ad esclusione di $\{0, 1\}$ le espressioni (5) non presentano problemi di derivabilità.

b) A partire dal grafico della funzione f , la derivata f' nell'intervallo $[-2, 0]$ dev'essere crescente e positiva assumendo agli estremi i valori $f'_+(-2) = 0$ e $f'_-(0) = 1$. Diversamente in $[0, 1[$ e a partire da $f'_+(0) = 0$, la derivata f' è decrescente e negativa e, come determinato precedentemente studiando il rapporto incrementale (10), presenta il limite sinistro in $x = 1$ pari a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty.$$

Nell'intervallo $]1, 2]$ la funzione f' è decrescente e positiva e presenta agli estremi i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

entrambi giustificati dal precedente studio dei rapporti incrementali (11) e (8). Pertanto il grafico di f' (fig. 1) presenta un asintoto verticale di equazione $x = 1$ e tale valore rappresenta un punto di discontinuità di seconda specie mentre $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie.

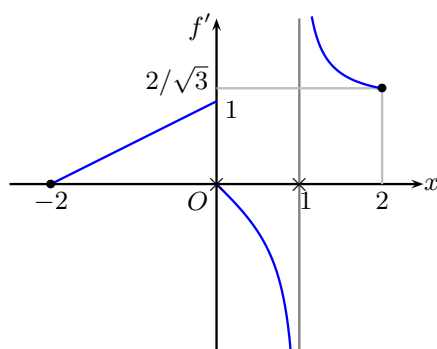


Fig. 1. Grafico qualitativo di $f'(x)$.

In termini analitici, il calcolo delle derivate dei tre rami di f e a partire dalle equazioni (5) fornisce per f' le equazioni

$$f' : \begin{cases} y' = \frac{1}{2}x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1 \\ y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, & 1 < x \leq 2. \end{cases} \quad (12)$$

La continuità della funzione f garantisce, per il teorema di Torricelli-Barrow, l'esistenza della funzione integrale

$$F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt \quad (13)$$

per cui, al fine di individuare i suoi intervalli di convessità e concavità dovremo studiare il segno della sua derivata seconda. D'altra parte per il citato teorema è anche $F'(x) = f(x)$

per cui $F''(x) = f'(x)$ e quindi dobbiamo reinterpretare la (12) riscrivendola come

$$F'' : \begin{cases} y'' = \frac{1}{2}x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ y'' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1 \\ y'' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, & 1 < x \leq 2. \end{cases} \quad (14)$$

Il segno di questa funzione è positivo o nullo nei due sottoinsiemi

$$y'' = \frac{1}{2}x + 1 \geq 0 \quad \text{se} \quad -2 \leq x < 0,$$

$$y'' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad \text{se} \quad 1 < x \leq 2,$$

mentre è negativo in

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < 1.$$

Pertanto la funzione $F(x)$ è convessa in $[-2, 0[\cup]1, 2]$ mentre è concava in $]0, 1[$ (fig. 2). Sebbene la funzione F sia derivabile in tutto il suo dominio $[-2, 2]$ e quindi pure continua, non è dotata di derivata seconda in $x = 0$ e $x = 1$. D'altra parte in corrispondenza di questi valori la sua derivata prima risulta $F'(0) = f(0) = 1$ e $F'(1) = f(1) = 0$ cosicché in $x = 0$ essa presenta un flesso obliquo mentre in $x = 1$ possiede un flesso orizzontale.

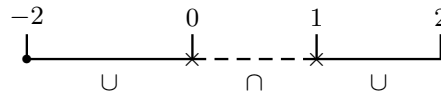


Fig. 2. Segno di $F''(x)$.

c) La funzione di equazione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ è invertibile in quanto risulta monotona crescente nell'intervallo chiuso $[-2, 0]$ avendo essa in $x \in]-2, 0[$ derivata prima $y' = \frac{1}{2}x + 1 > 0$ e nulla solo nell'estremo $x = -2$. Poiché il suo codominio è l'intervallo chiuso $[0, 1]$, l'espressione rappresentativa dell'inversa h si ottiene risolvendo la sua equazione nell'incognita x

$$(x+2)^2 = 4y \quad \Longrightarrow \quad |x+2| = 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\sqrt{y} - 2,$$

seguita dalla trasformazione di simmetria di equazioni $x_1 = y \wedge y_1 = x$ che permette di associare all'asse orizzontale la variabile indipendente x_1 . L'equazione analitica cercata è quindi

$$h: y_1 = 2\sqrt{x_1} - 2 \quad \text{con} \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{e} \quad -2 \leq y_1 \leq 0. \quad (15)$$

La sua derivata è

$$h': y_1' = \frac{1}{\sqrt{x_1}} > 0 \quad \text{se} \quad 0 < x_1 \leq 1$$

per cui h possiede la medesima monotonia crescente della funzione iniziale ma non è invece derivabile nel punto di ascissa nulla in quanto la retta tangente è qui verticale.

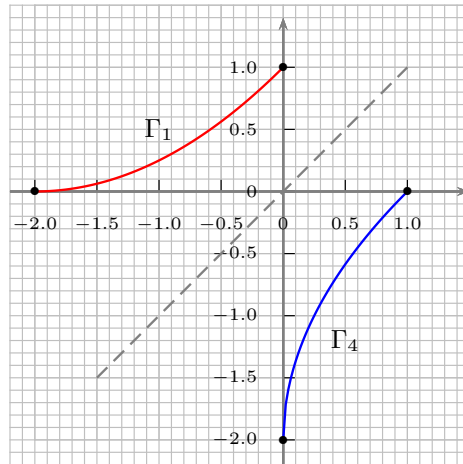


Fig. 3. Grafico Γ_4 dell'inversa h e Γ_1 .

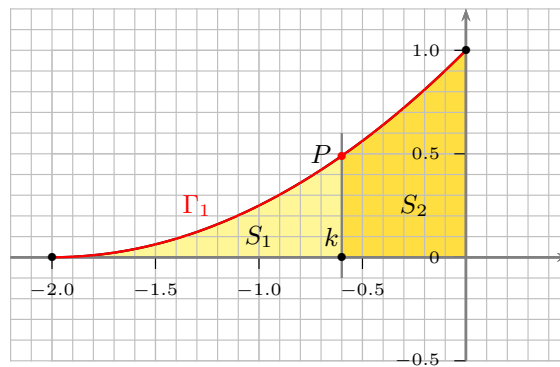


Fig. 4. Regione S e sue parti $S = S_1 \cup S_2$.

Il grafico Γ_4 è, per la trasformazione applicata, il simmetrico di Γ_1 rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (fig. 3).

d) Determiniamo il valore del parametro k della retta $r: x = k$ ($-2 < k < 0$) che divide la regione S in due parti equivalenti $\mathcal{A}(S_1) = \mathcal{A}(S_2)$ (in colore nella figura 4) esprimendo le due aree tramite gli integrali definiti

$$\mathcal{A}(S_1) = \mathcal{A}(S_2) \implies \int_{-2}^k \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \int_k^0 \frac{1}{4}(x+2)^2 dx,$$

dalla quale è pure

$$\int_{-2}^k (x+2)^2 dx = \int_k^0 (x+2)^2 dx. \tag{16}$$

Poiché l'integrale indefinito della funzione integranda $(x+2)^2$ è dato dalle primitive

$$\int (x+2)^2 dx = \frac{(x+2)^3}{3} + c,$$

riscriviamo la (16) come

$$\left| \frac{(x+2)^3}{3} \right|_{-2}^k = \left| \frac{(x+2)^3}{3} \right|_k^0$$

che, esplicitata, si riduce all'equazione nell'incognita k

$$\frac{(k+2)^2}{3} - 0 = \frac{8}{3} - \frac{(k+2)^3}{3}.$$

La sua soluzione dà infine il valore del parametro k

$$(k+2)^3 = 4 \implies k+2 = \sqrt[3]{4} \implies k = -2 + \sqrt[3]{4} \approx -0,4126.$$

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

a) La funzione razionale fratta f_a

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \quad (1)$$

è espressa dal rapporto di due polinomi dello stesso grado. Escluso dal testo il caso $a = 0$, la stessa funzione si può riscrivere in forme alternative con l'eseguire la divisione del numeratore $N(x)$ e denominatore $D(x)$ così da giungere alla forma

$$f_a(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

con $Q(x)$ polinomio quoziente e $R(x)$ polinomio resto. Pertanto disposti opportunamente il numeratore e il denominatore nello schema seguente e procedendo nel modo usuale

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -ax & 0 & 1 \\ -x^2 & & a & x^2 - a \\ \hline 0 & -ax & a & \end{array}$$

otteniamo per la funzione il quoziente di grado zero $Q(x) = 1$ mentre il resto risulta $R(x) = a(1-x)$. Riscriviamo quindi la funzione come

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1 + \frac{a(1-x)}{x^2 - a}, \quad (2)$$

forma che ci permette di riconoscere facilmente la presenza di un asintoto orizzontale in quanto il secondo addendo, come vedremo, si annulla per $x \rightarrow \infty$.

In ogni caso, l'unica condizione che determina il dominio è legata al denominatore che dev'essere

$$D(x) = x^2 - a \neq 0 \quad (3)$$

le cui soluzioni dipendono dal segno del parametro a : si delineano pertanto due diverse possibilità: $a > 0$ oppure $a < 0$.

- *Condizione* $a > 0$. Nell'ipotesi che sia $a > 0$, la condizione (3) è risolta dai valori

$$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \pm\sqrt{a}$$

e nel caso sia $\sqrt{a} \neq 1$ la funzione (2) presenta i due asintoti verticali di equazione $x = \pm\sqrt{a}$ in quanto sussistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{a}} f_a(x) = \infty$$

essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{a}} (x^2 - a) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{a}} a(1 - x) = a(1 \mp \sqrt{a}) \neq 0.$$

In corrispondenza dei valori $x = \pm\sqrt{a}$, la funzione f_a possiede quindi due punti di discontinuità di seconda specie.

Se invece $\sqrt{a} = 1$ cioè $a = 1$, la funzione si riduce alla

$$f_1(x) = 1 + \frac{1-x}{x^2-1} = 1 - \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \quad (4)$$

con dominio $x \neq \pm 1$. L'equazione (4) caratterizza una funzione omografica con asintoto verticale $x = -1$ il cui grafico è quello di una iperbole equilatera traslata. In questo caso la f_1 ha in $x = 1$ una discontinuità di terza specie in quanto il limite in questo punto per la scomposizione (4), è

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Manifestamente la funzione (4) possiede pure un asintoto orizzontale di equazione $y_A = 1$ in quanto valgono i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1 \quad \text{poiché} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

- *Condizione* $a < 0$. Nel caso sia $a < 0$ il dominio di f_a è l'insieme \mathbb{R} dei reali poiché il denominatore $D(x)$ non si annulla. Inoltre, dato che i polinomi del numeratore $N(x)$ e del denominatore $D(x)$ sono funzioni continue, lo è pure la f_a . Nel dominio \mathbb{R} non vi sono pertanto punti di discontinuità o asintoti verticali mentre sussiste ancora l'asintoto orizzontale $y_A = 1$ avendosi, per lo studio dei limiti delle funzioni razionali fratte,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{a(1-x)}{x^2-a}\right] = 1$$

con

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(1-x)}{x^2-a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax(1/x-1)}{x^2(1-a/x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(1/x-1)}{x(1-a/x^2)} = 0$$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2) = 0$.

b) Le intersezioni con l'asintoto orizzontale $y_A = 1$ si determinano studiando l'equazione $f_a(x) - y_A = 0$ che, in base alla (2), diviene

$$1 + \frac{a(1-x)}{x^2-a} - 1 = 0 \quad \implies \quad \frac{a(1-x)}{x^2-a} = 0$$

e cioè

$$1 - x = 0 \implies x = 1.$$

Indipendentemente dal parametro $a \neq \{0, 1\}$, tutte le curve Ω_a della famiglia f_a passano quindi per il punto $(1, f_a(1)) \equiv (1, 1)$.

Possiamo ritrovare questo risultato ed estenderlo, riprendendo l'espressione (1)

$$y = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

che, portata a forma intera e non appena si sia posto a fattore il parametro a diviene

$$y(x^2 - a) = x^2 - ax \implies x^2(y - 1) + a(x - y) = 0.$$

La famiglia di grafici Ω_a descritta da questa equazione potrà passare per dei punti fissi cioè con coordinate indipendenti dal parametro, se sono soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2(y - 1) = 0. \end{cases}$$

E poiché questo sistema è risolto dalle coppie

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

ne discende che, in aggiunta all'intersezione con l'asintoto orizzontale, tutti i grafici Ω_a passano pure per l'origine.

Poiché la derivata prima è

$$f'_a(x) = 0 + a \left[\frac{-(x^2 - a) - 2x(1 - x)}{(x^2 - a)^2} \right] = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2} \quad (5)$$

ed essa, nell'origine, assume il valore indipendente da a

$$f'_a(0) = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

allora le curve Ω_a , in aggiunta al passaggio per l'origine, possiedono in questo punto la medesima retta tangente t

$$t: y - f_a(0) = f'_a(0)(x - 0) \implies y - 0 = x \implies y = x$$

e questa coincide con la bisettrice del I e III quadrante.

c) Per determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni, studiamo il segno della derivata prima (5)

$$f'_a(x) = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2} \quad (6)$$

per cui appare necessario supporre quale sia il segno del parametro a .

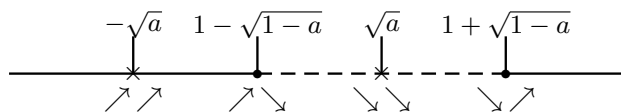


Fig. 1. Segno di $f'_a(x)$ con $0 < a < 1$.

• *Condizione* $0 < a < 1$. Se quindi $0 < a < 1$, il termine responsabile della variazione di segno di f'_a è il polinomio quadratico $x^2 - 2x + a$. Pertanto

$$f'_a(x) \geq 0 \iff x^2 - 2x + a \geq 0$$

e le soluzioni sono gli intervalli illimitati

$$x \leq 1 - \sqrt{1-a} \quad \vee \quad x \geq 1 + \sqrt{1-a}.$$

Tenendo presente il dominio $x \neq \pm\sqrt{a}$ e le disuguaglianze ($a \in]0, 1[$)

$$-\sqrt{a} < 1 - \sqrt{1-a}, \quad \sqrt{a} < 1 + \sqrt{1-a},$$

riassumiamo nello schema 1 il segno complessivo di f'_a e, simbolicamente, la sua monotonia. La originaria f_a raggiunge perciò un massimo (relativo) in corrispondenza dell'ascissa $x_M = 1 - \sqrt{1-a}$ ed un minimo in $x_m = 1 + \sqrt{1-a}$ mentre risulta crescente in intorno dell'asintoto verticale di equazione $x = -\sqrt{a}$ e decrescente in corrispondenza di $x = \sqrt{a}$.

• *Condizione* $a < 0$. Nel caso sia $a < 0$, dalla (6) dev'essere

$$f'_a(x) \geq 0 \quad \text{se} \quad x^2 - 2x + a \leq 0$$

che è risolta dai valori dell'intervallo

$$1 - \sqrt{1-a} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-a}. \quad (7)$$

Considerando che, in tal caso, il dominio è l'insieme \mathbb{R} , riassumiamo graficamente il segno complessivo nella figura 2 con la quale evidenziamo la presenza di un massimo e di un minimo in corrispondenza, rispettivamente, delle ascisse $x_M = 1 + \sqrt{1-a}$ e $x_m = 1 - \sqrt{1-a}$.

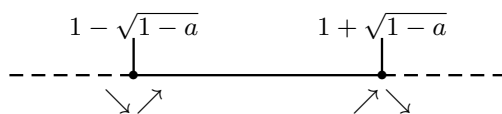


Fig. 2. Segno di $f'_a(x)$ con $a < 0$.

Ponendo, come richiesto $a = -1$, la funzione è descritta dall'equazione

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x-1}{x^2+1}, \quad (8)$$

è positiva o nulla in $x^2 + x \geq 0$ ossia in $x \leq -1 \vee x \geq 0$, dalla (5) possiede derivata prima

$$f'_{-1}(x) = \frac{-(x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

il cui segno, per la (7), è positivo nell'intervallo

$$1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Il calcolo della derivata seconda fornisce

$$\begin{aligned} f''_{-1}(x) &= \frac{(-2x+2)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1)[(-2x+2)(x^2+1) - 4x(-x^2+2x+1)]}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(x^3 - 3x^2 - 3x + 1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned} \quad (9)$$

per cui il suo segno dipende dal polinomio cubico $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \geq 0$. Poiché questo polinomio si annulla per $x = -1$ lo si può scomporre utilizzando il metodo di Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -3 & -3 & 1 & \\ -1 & & -1 & 4 & -1 & \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 & \end{array}$$

nei fattori $(x+1)(x^2 - 4x + 1) \geq 0$. Poiché il segno di questi è

$$x+1 \geq 0 \implies x \geq -1$$

$$x^2 - 4x + 1 \geq 0 \implies x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \implies x \leq 2 - \sqrt{3} \vee x \geq 2 + \sqrt{3}$$

segue in fig. 3 il segno complessivo di f''_{-1} .

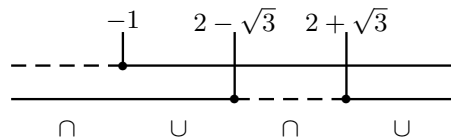


Fig. 3. Segno di $f''_{-1}(x)$.

La funzione possiede quindi tre punti di flesso aventi ascisse

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2 - \sqrt{3}, \quad x_3 = 2 + \sqrt{3}$$

e risulta concava per $x < -1$ oppure per $x \in [x_2, x_3]$, convessa in $[-1, x_2]$ e per $x \geq x_3$. Considerando che $f_{-1}(x) \geq 0$ per $x \leq -1 \vee x \geq 0$ e che essa interseca l'asintoto in $x = 1$, riportiamo in figura 4 il grafico Ω_{-1} (in blu i punti di flesso). I punti più significativi sono:

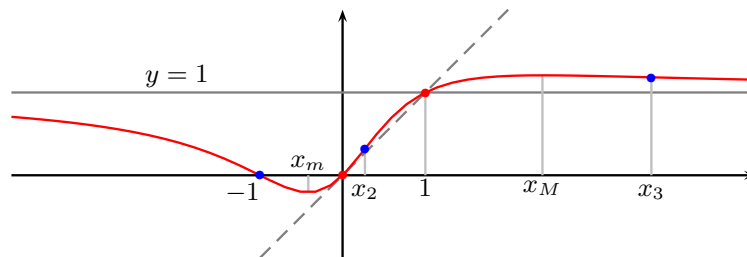


Fig. 4. Grafico Ω_{-1} di f_{-1} .

il minimo assoluto: $(1 - \sqrt{2}, f_{-1}(1 - \sqrt{2})) \Rightarrow \left(1 - \sqrt{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx (-0,414; -0,207)$,

il massimo assoluto: $(1 + \sqrt{2}, f_{-1}(1 + \sqrt{2})) \Rightarrow \left(1 + \sqrt{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx (2,414; 1,207)$,

i flessi: $(-1, 0)$, $(2 - \sqrt{3}, f_{-1}(2 - \sqrt{3})) \Rightarrow \left(2 - \sqrt{3}; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx (0,268; 0,317)$

$(2 + \sqrt{3}, f_{-1}(2 + \sqrt{3})) \Rightarrow \left(2 + \sqrt{3}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx (3,732; 1,183)$

d) Esprimiamo l'area della regione \mathcal{R} compresa tra il grafico Ω_{-1} , la bisettrice del primo quadrante e la retta di equazione $x = \sqrt{3}$ (fig. 5) con l'integrale definito (10)

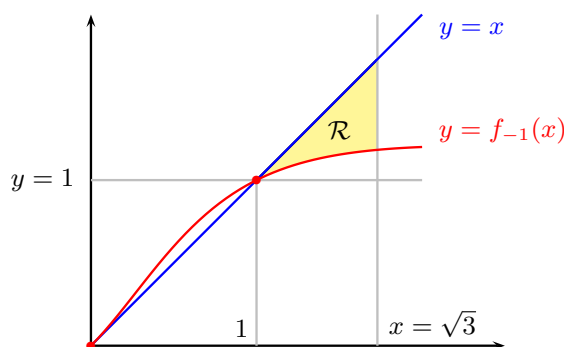


Fig. 5. Regione compresa tra Ω_{-1} e le rette $y = x$ e $x = \sqrt{3}$.

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_1^{\sqrt{3}} [x - f_{-1}(x)] dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left[x - \left(1 + \frac{x-1}{x^2+1} \right) \right] dx \quad (10)$$

dove abbiamo utilizzata l'espressione (8) della funzione f_{-1} . La funzione integranda si può ulteriormente scomporre nei termini

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(x - 1 - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

per cui, riconosciuto l'integrale elementare dell'arcotangente e passando all'integrale indefinito, abbiamo

$$\int \left(x - 1 - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \arctg(x) - \int \frac{x dx}{x^2+1}.$$

L'integrale rimasto si può riportare ad uno elementare con la sostituzione $t = x^2 + 1$ dalla quale $dt = 2x dx$,

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t},$$

per cui le corrispondenti primitive sono

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c.$$

L'area (10) è in definitiva

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{R}) &= \left| \frac{x^2}{2} - x + \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right|_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln 4 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \\ &= 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,1832. \end{aligned}$$

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Siano $\angle ABC = \beta$ e $\angle ACB = \gamma$ gli angoli acuti del triangolo rettangolo $\triangle ABC$ e, costruito il quadrato $BCDE$ sull'ipotenusa BC , siano H e K le proiezioni del centro O sui prolungamenti dei lati AB e AC (fig. 1).

• Per una prima dimostrazione di carattere sintetico consideriamo i triangoli rettangoli HBO e KCO . Le rispettive ipotenuse hanno la medesima lunghezza $\overline{OB} = \overline{OC}$ essendo esse pari alla metà delle diagonali del quadrato $BCDE$. Le ampiezze degli angoli $\angle HBO$ e $\angle KCO$ sono

$$\angle HBO = \angle HBC + \angle CBO = \beta + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

e

$$\begin{aligned} \angle KCO &= \pi - \angle ACO = \pi - (\angle ACB + \angle BCO) \\ &= \pi - \left(\gamma + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{4} - \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

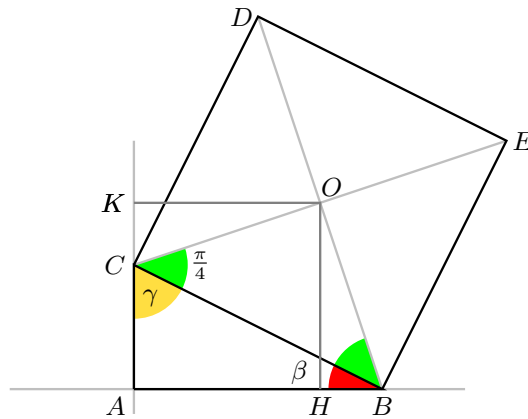


Fig. 1. Triangolo rettangolo ABC e quadrato $BCDE$ sull'ipotenusa.

D'altra parte in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari cosicché in $\triangle ABC$ vale la relazione

$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \implies \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta. \quad (3)$$

Sostituita quest'ultima nella (2)

$$\angle KCO = \frac{3\pi}{4} - \gamma = \frac{3\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{\pi}{4} + \beta = \angle HBO.$$

I due triangoli rettangoli sono quindi congruenti e, in particolare, hanno congruenti i cateti OH e OK .

• Per una dimostrazione alternativa di carattere trigonometrico, sia $\overline{BC} = 2l$ la misura dell'ipotenusa BC cosicché i segmenti OB e OC misurano $\overline{OB} = \overline{OC} = 2l/\sqrt{2} = l\sqrt{2}$. Nel triangolo rettangolo HBO , l'ampiezza dell'angolo HBO è, per la (1),

$$\angle HBO = \beta + \frac{\pi}{4}$$

cosicché il cateto OH è

$$\overline{OH} = \overline{OB} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = l\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right). \quad (4)$$

Nel triangolo KCO , l'angolo KCO misura, come visto in (2),

$$\angle KCO = \frac{3\pi}{4} - \gamma$$

e di conseguenza

$$\overline{OK} = \overline{OC} \operatorname{sen} \angle KCO = l\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \gamma\right). \quad (5)$$

Poiché per la (3) sussiste la relazione

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

questa sostituita nella (5), dà

$$\overline{OK} = l\sqrt{2} \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right] = l\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \beta\right) = l\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$$

e quindi, per la (4), concludiamo che $\overline{OK} = \overline{OH}$.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Se a è la probabilità che in un lancio escano i numeri dispari 1, 3, 5 cioè, più formalmente

$$p(1) = p(3) = p(5) = a, \quad (1)$$

allora, per la proprietà enunciata del dado truccato, è anche

$$p(2) = p(4) = p(6) = 2a. \quad (2)$$

Poiché in un lancio è certa l'uscita di un numero tra 1 e 6, la corrispondente probabilità P equivale ad un evento certo ossia è $P = 1$. Ne segue che, essendo l'uscita di un dato numero incompatibile con i rimanenti, dev'essere

$$P = 1 = \sum_{i=1}^6 p(i) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6)$$

e quindi in base alle precedenti

$$1 = a + 2a + a + 2a + a + 2a = 9a \implies a = \frac{1}{9}. \quad (3)$$

Primo caso. Ricordata la definizione di numero primo ossia come un numero intero maggiore di 1 e divisibile solo per 1 e per sé stesso, la probabilità P_1 di uscita di un numero primo è data dalla $P_1 = p(2) + p(3) + p(5)$ in quanto gli eventi di uscita di 2, 3 e 5 sono incompatibili. Per le relazioni precedenti risulta quindi

$$P_1 = 2a + a + a = 4a = \frac{4}{9}.$$

Secondo caso. Allo stesso modo, l'uscita di un numero almeno pari a 3 equivale all'uscita dei numeri 3, 4, 5 e 6 per cui

$$P_2 = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = a + 2a + a + 2a = 6a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Terzo caso. Affinché esca un numero al massimo pari a 3, devono presentarsi i numeri 3, 2 e 1 per cui

$$P_3 = p(3) + p(2) + p(1) = a + 2a + a = 4a = \frac{4}{9}.$$

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Assegnati i punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$ nel sistema cartesiano $Oxyz$, sia

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (1, 5, -1)$$

il vettore che li collega (fig. 1). Detto $P(x, y, z)$ un punto qualsiasi della retta r , il vettore $\overrightarrow{AP} = (x - 1, y + 2, z - 0)$ è collineare ad \overrightarrow{AB} per cui rappresentiamo la retta r tramite la condizione di collinearità come $\overrightarrow{PA} = t\overrightarrow{AB}$ con $t \in \mathbb{R}$. Da questa deriva la sua espressione cartesiana

$$r : \begin{cases} x - x_A = t(x_B - x_A) \\ y - y_A = t(y_B - y_A) \\ z - z_A = t(z_B - z_A) \end{cases} \implies \begin{cases} x - 1 = t(2 - 1) \\ y + 2 = t(3 + 2) \\ z - 0 = t(-1 - 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = -t. \end{cases} \quad (1)$$

Il piano π passante per il centro $C(1, -6, 7)$ della sfera è ortogonale alla retta r e deve passare per il punto di tangenza T . Per determinarne l'equazione, sia $P(x, y, z)$ un suo punto generico per cui i vettori (fig. 1)

$$\overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CP} = (x - x_C, y - y_C, z - z_C) = (x - 1, y + 6, z - 7)$$

dovranno essere perpendicolari. Questa proprietà impone l'annullarsi del loro prodotto scalare

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \implies (x - 1) + 5(y + 6) - (z - 7) = 0$$

per cui di conseguenza otteniamo

$$\pi: x + 5y - z + 36 = 0. \quad (2)$$

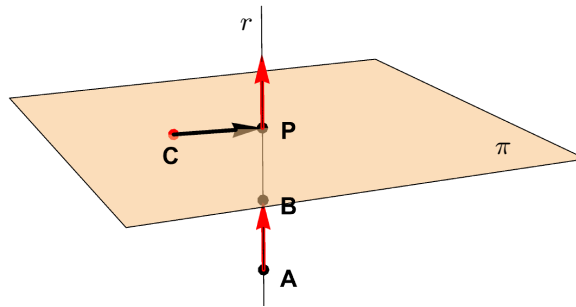


Fig. 1. Perpendicolarità tra retta r e piano π .

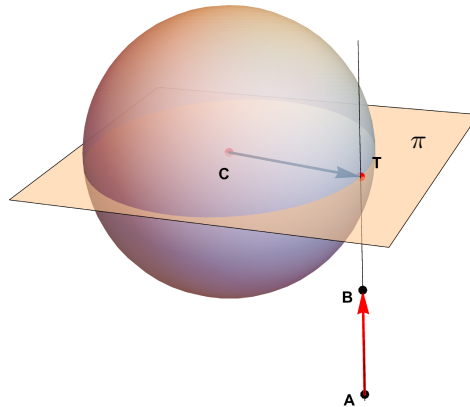


Fig. 2. Appartenenza di T al piano π e alla sfera.

Poiché $r \cap \pi = \{T\}$, determiniamo le coordinate del punto di tangenza T (fig. 2) intersecando retta e piano. È a tal fine sufficiente inserire le equazioni (1) nella (2)

$$(t + 1) + 5(5t - 2) - (-t) + 36 = 0 \implies t = -1 \quad (3)$$

dalla quale il valore del parametro t che individua sulla retta il punto T . Le coordinate di T sono quindi

$$T: \begin{cases} x_T = -1 + 1 = 0 \\ y_T = 5(-1) - 2 = -7 \\ z_T = -(-1) = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Ne segue che la lunghezza del raggio della sfera, pari al modulo di \overrightarrow{CT} , risulta

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2 + (z_C - z_T)^2} \\ &= \sqrt{(1 - 0)^2 + (-6 + 7)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{38}, \end{aligned}$$

mentre l'equazione della sfera è, in definitiva,

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2 \implies (x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = 38.$$

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Il testo del quesito non specifica quale parallelepipedo si intenda e, in particolare, quali siano gli angoli (α e β nella fig. 1) che determinano la direzione degli spigoli che collegano le due basi quadrate. Se quindi alla lunghezza $x > 0$ del lato delle due basi quadrate e all'altezza $h > 0$ si aggiungono pure queste ulteriori due variabili il problema non è, con le usuali conoscenze, risolvibile.

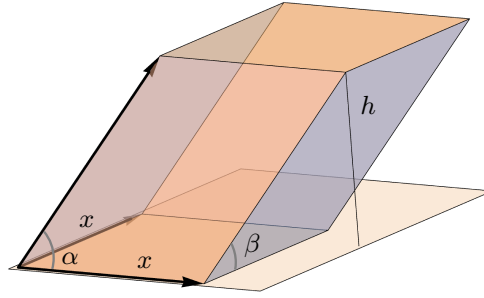


Fig. 1. Generico parallelepipedo (a base quadrata) definito da tre vettori.

Interpretiamo pertanto il testo considerando il caso particolare di un parallelepipedo rettangolo dove gli angoli sono tutti retti (fig. 2). In tal caso il suo volume \mathcal{V} è dato dall'espressione

$$\mathcal{V} = x^2 \cdot h \quad x > 0 \wedge h > 0 \quad (1)$$

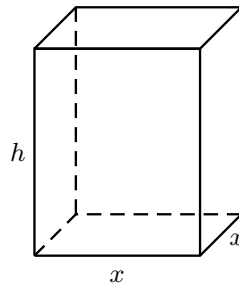


Fig. 2. Parallelepipedo rettangolo a base quadrata e sue dimensioni.

mentre l'area totale risulta

$$\mathcal{A} = 2x^2 + 4xh. \quad (2)$$

Quest'ultima espressione contiene due variabili ma, poiché è noto \mathcal{V} , ricaviamo dalla (1) l'altezza h

$$h = \frac{\mathcal{V}}{x^2} \quad (3)$$

e, sostituendola in (2), otteniamo

$$\mathcal{A}(x) = 2\left(x^2 + \frac{2x\mathcal{V}}{x^2}\right) = 2\left(x^2 + \frac{2\mathcal{V}}{x}\right) \quad x > 0. \quad (4)$$

Per determinarne il minimo calcoliamo la derivata di questa funzione

$$\mathcal{A}'(x) = 2\left(2x - \frac{2\mathcal{V}}{x^2}\right) = 4\left(\frac{x^3 - \mathcal{V}}{x^2}\right) \quad x > 0. \quad (5)$$

È quindi

$$\mathcal{A}'(x) \geq 0 \iff x^3 - \mathcal{V} \geq 0 \iff x \geq \sqrt[3]{\mathcal{V}} \quad (6)$$

ossia il minimo dell'area è raggiunto in corrispondenza di $x_m = \sqrt[3]{\mathcal{V}}$ (fig. 3).

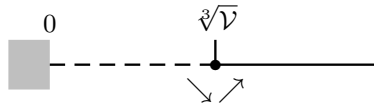


Fig. 3. Segno di \mathcal{A}' e punto di minimo.

Poiché la diagonale della base quadrata è pari a $x\sqrt{2}$, calcoliamo la lunghezza della diagonale d applicando il teorema di Pitagora al triangolo in colore nella figura 4

$$d(x) = \sqrt{(x\sqrt{2})^2 + h^2}$$

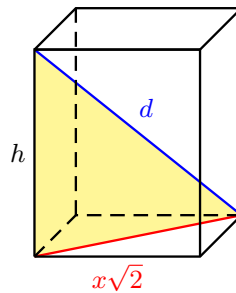


Fig. 4. Elementi che concorrono alla diagonale del parallelepipedo.

dalla quale sostituendo la (3) otteniamo

$$d(x) = \sqrt{2x^2 + \frac{\mathcal{V}^2}{x^4}} \quad x > 0. \quad (7)$$

La sua derivata fornisce l'espressione

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + (\mathcal{V}^2/x^4)}} \cdot \left(4x - \frac{4\mathcal{V}^2}{x^5}\right)$$

il cui segno dipende dall'unico termine

$$4x - \frac{4\mathcal{V}^2}{x^5} \geq 0 \implies \frac{4(x^6 - \mathcal{V}^2)}{x^5} \geq 0.$$

Pertanto

$$d'(x) \geq 0 \iff x^6 - \mathcal{V}^2 \geq 0 \iff x^3 \geq \mathcal{V}$$

dalla quale otteniamo $x \geq \sqrt[3]{\mathcal{V}}$ che coincide con la (6).

La risposta è quindi affermativa: sia l'area totale che la diagonale raggiungono entrambe il valore minimo in corrispondenza di una lunghezza del lato di base pari a $x_m = \sqrt[3]{\mathcal{V}}$.

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

Data la curva di equazione

$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad (1)$$

dev'essere innanzitutto soddisfatta la condizione $25 - x^2 \geq 0$ evidentemente risolta dall'insieme $-5 \leq x \leq 5$, intervallo che definisce pure il dominio della funzione in quanto per ogni $x \in [-5, 5]$ l'equazione restituisce uno ed un solo valore di $y \geq 0$.

Comunque, nell'ipotesi che siano soddisfatte le condizioni

$$-5 \leq x \leq 5 \wedge y \geq 0$$

possiamo riscrivere l'equazione (1) anche come

$$y^2 = 25 - x^2 \quad \implies \quad x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

e quindi, riconosciuta l'equazione canonica di una circonferenza di centro l'origine $O(0, 0)$ e raggio $r = 5$, concludere che la curva proposta risulta essere la semicirconferenza γ di centro O e raggio $r = 5$ appartenente al primo e secondo quadrante del sistema cartesiano Oxy (fig. 1).

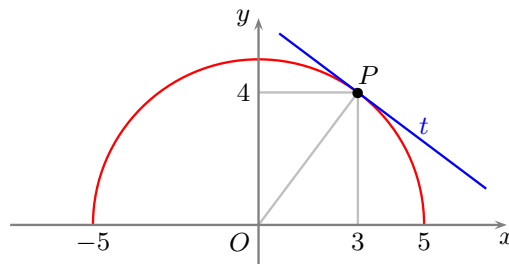


Fig. 1. Semicirconferenza γ e retta tangente in P .

Detto $P(3, \sqrt{25 - 3^2}) \equiv (3, 4)$ il punto di tangenza della retta tangente t a γ , determiniamo dapprima l'equazione di t sfruttando le nozioni di geometria analitica. Poiché t è perpendicolare al raggio OP (fig. 1), il suo coefficiente angolare m_t è legato al coefficiente angolare della retta OP dalla relazione

$$m_t = -\frac{1}{m_{OP}}. \quad (3)$$

D'altra parte, dalla geometria analitica,

$$m_{OP} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{4}{3}, \quad (4)$$

per cui in base a (3) e (4), la retta cercata è

$$t: y - y_P = m_t(x - x_P) \quad \implies \quad y - 4 = -\frac{1}{(4/3)}(x - 3)$$

e quindi

$$t: y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}. \quad (5)$$

Come già notato l'equazione assegnata è rappresentativa di una funzione reale di variabile reale derivabile in tutti i punti dell'intervallo aperto $] - 5, 5[$. Sulla base di nozioni tipiche dell'analisi, la sua derivata in $] - 5, 5[$ è

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}. \quad (6)$$

Il calcolo di questa nel punto di ascissa $x = 3$ fornisce direttamente il coefficiente angolare della retta t

$$m_t = -\frac{3}{\sqrt{25-3^2}} = -\frac{3}{4}$$

e di conseguenza pure la sua equazione

$$t: y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \quad \implies \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1 \quad (1)$$

è manifestamente indeterminato in quanto sia la funzione al numeratore $N(x) = \operatorname{sen} x - (ax^3 + bx)$ sia quella al denominatore $D(x) = x^3$ hanno limiti nulli per $x \rightarrow 0$. D'altra parte, ciascuna di queste funzioni soddisfa alle ipotesi del teorema di De L'Hôpital e, in particolare, l'esistenza del limite del rapporto delle rispettive derivate: difatti dev'essere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2} = 1. \quad (2)$$

Riscritto l'argomento del limite come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\cos x - b}{x^2} \right) - a \right] = 1 \quad (3)$$

osserviamo come il termine $(\cos x - b)/x^2$ sia molto simile ad un limite noto. Ora se fosse $b \neq 1$ il limite di questo termine sarebbe infinito essendo $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - b) = 1 - b \neq 0$. Il limite (3) non potrebbe quindi essere pari ad 1.

Diversamente con $b = 1$ il limite dello stesso si riduce ad uno noto, ossia

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}. \quad (4)$$

Poiché il limite della costante a è a stesso, il primo membro della (3) diviene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left(\frac{\cos x - b}{x^2} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} a = 1 \quad \implies \quad \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - a = 1$$

dalla quale deduciamo $a = -7/6$. I valori cercati sono quindi

$$a = -\frac{7}{6} \quad \text{e} \quad b = 1.$$

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

La funzione f definita a tratti come

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

ha per dominio l'insieme dei reali \mathbb{R} ed è composta dalle funzioni $f_1(x) = -1 + \arctan x$ e $f_2(x) = ax + b$ entrambe derivabili nel loro rispettivo dominio \mathbb{R} . Lo studio sulla derivabilità di f si concentra quindi nel punto di contatto $x = 0$ dove la continuità implica che sia soddisfatto il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 + \arctan x) = f(0). \quad (1)$$

Poiché $f(0) = b$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan x = \arctan 0 = 0,$$

la (1) implica

$$-1 + 0 = b \quad \implies \quad b = -1. \quad (2)$$

La f è derivabile in $x = 0$ se sono uguali e finiti i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}. \quad (3)$$

Il limite destro discende immediatamente

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a(0+h) + b - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (a) = a, \quad (4)$$

mentre quello sinistro è

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1 + \arctan h) - (-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\arctan h}{h}. \quad (5)$$

Quest'ultimo si presenta indeterminato (caso $0/0$) per cui studiamo il limite del rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{D(\arctan h)}{D(h)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+h^2} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

L'esistenza di quest'ultimo limite ci permette di applicare il teorema di De L'Hôpital e quindi concludere che il limite (5) è

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\arctan h}{h} = 1$$

e ciò comporta, per (3) e il risultato (4), $a = 1$.

Seppure con minore generalità, notata la derivabilità di ciascuna funzione componente la f in \mathbb{R} , possiamo determinare il valore del parametro a anche imponendo la continuità della funzione derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$$

in $x = 0$. Il calcolo dei limiti sinistro e destro di f' fornisce in tal caso direttamente il valore di a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a) \implies \frac{1}{1+0} = a \implies a = 1.$$

La derivata f' è quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

e possiede segno positivo $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che la funzione f è monotona crescente nel suo dominio e quindi, per ogni coppia $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 > x_1$ è pure $f(x_2) > f(x_1)$. La condizione $f(x_1) = f(x_2)$ che costituisce una ipotesi fondamentale del teorema di Rolle determinandone l'intervallo entro il quale individuare almeno un punto dove si annulla la derivata, non può pertanto essere soddisfatta.

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Affinché la funzione di equazione

$$f_a(x) = x^5 - 5ax + a \tag{1}$$

di dominio \mathbb{R} abbia tre zeri reali e distinti, il suo grafico Γ deve intersecare l'asse delle x in tre punti distinti. Per stabilire ciò calcoliamo la funzione derivata f'_a

$$f'_a(x) = 5x^4 - 5a = 5(x^4 - a) \tag{2}$$

e ne studiamo il segno nell'ipotesi che sia $a > 0$. Pertanto

$$f'_a(x) \geq 0 \iff x^4 - a \geq 0$$

dalla quale, scomposto il primo membro nei fattori $(x^2 + \sqrt{a})(x^2 - \sqrt{a})$ discende

$$x^2 - \sqrt{a} \geq 0 \implies x \leq -\sqrt[4]{a} \quad \vee \quad x \geq \sqrt[4]{a} \tag{3}$$

essendo $x^2 + \sqrt{a} > 0$. Il segno di f'_a , riportato graficamente nella figura 1 mette in evidenza la presenza di un massimo di ascissa $x_M = -\sqrt[4]{a}$ e un minimo di ascissa $x_m = \sqrt[4]{a}$.

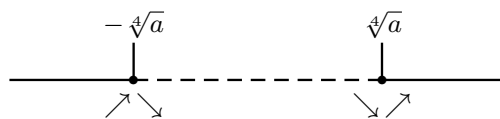


Fig. 1. Segno di $f'_a(x)$ con $a > 0$.

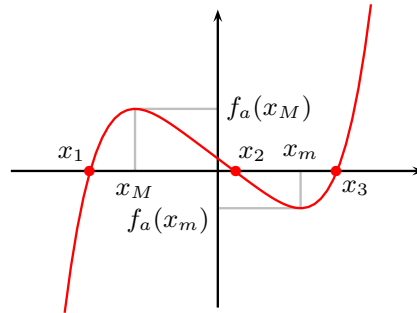


Fig. 2. Grafico Γ di f_a e intersezioni con l'asse x .

In figura 2 riportiamo un possibile grafico per la funzione f_a assieme alla disposizione che garantisce l'esistenza di tre intersezioni.

Perché ciò avvenga, l'ordinata del massimo dev'essere quindi positiva $f_a(x_M) > 0$ mentre quella del minimo negativa $f_a(x_m) < 0$.

Imponendo queste due condizioni e sostituendo in (1) le rispettive ascisse, ne deriva il sistema

$$\begin{cases} (-\sqrt[4]{a})^5 - 5a(-\sqrt[4]{a}) + a > 0 \\ (\sqrt[4]{a})^5 - 5a(\sqrt[4]{a}) + a < 0 \end{cases} \quad (4)$$

che, in quanto $(\sqrt[4]{a})^5 = a\sqrt[4]{a}$, riscriviamo come

$$\begin{cases} -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a > 0 \\ a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a(4\sqrt[4]{a} + 1) > 0 \\ a(-4\sqrt[4]{a} + 1) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Poiché la prima disequazione è soddisfatta per ogni $a > 0$ il sistema è risolto se

$$-4\sqrt[4]{a} + 1 < 0 \implies 4\sqrt[4]{a} > 1.$$

I valori del parametro che assicurano l'esistenza di tre radici reali e distinte sono pertanto

$$\sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \implies a > \frac{1}{4^4}$$

cioè $a > 1/256$.

ESAME 2024

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

• Problema n. 1

Si consideri $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3 + b}{x^2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t , di equazione $7x + y - 12 = 0$, sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x = 1$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$ e $b = 4$.

- b) Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ . Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P .
- c) Al variare del parametro reale m , determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$ e la curva γ .
- d) Sia $S(k)$, con $k > \frac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ , il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x = k$. Calcolare il $\lim_{k \rightarrow +\infty} S(k)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

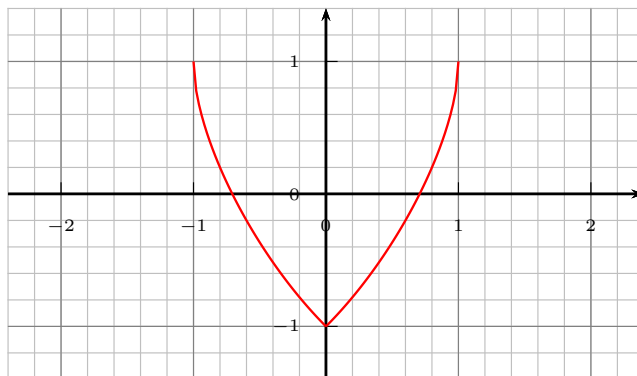
Soluzione

• Problema n. 2

«All'inizio e alla fine, abbiamo il mistero. [...] A questo mistero la matematica ci avvicina, pur senza penetrarlo». (E. De Giorgi)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

- a) Verificare che, qualunque sia il valore di n , la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b , il grafico α , in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b , considerando che f_2 è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

- b) Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.
- c) La retta r , di equazione $x = k$, con $-1 < k < 1$, interseca γ nei punti P e Q . Dimostrare che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ .
- d) Verificare che la funzione $H(x) = \frac{1}{2}(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2})$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ .

«Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle: le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta». (G. H. Hardy)

Soluzione

Quesiti

1. È dato un triangolo ABC , rettangolo in B . Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.

Soluzione

2. Si lancia 5 volte una moneta truccata che dà testa con probabilità p .
 - Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte?
 - Per quale valore di p la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?

Soluzione

3. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, è dato il piano $\pi: 3x - 2y + 5 = 0$.
- Determinare le coordinate del punto H , proiezione ortogonale di $P(4, 2, 1)$ sul piano π .
 - Determinare l'intersezione della retta $s: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ con il piano π .

Soluzione

4. Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ammette un'unica soluzione positiva.

Soluzione

5. Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:
- è tangente all'asse x nell'origine;
 - passa per il punto $(1, 0)$;
 - ha un punto stazionario in $(2, -2)$.

Soluzione

6. Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_a^x \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2} dt$, con $x \geq a$, in cui a indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di a in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$.

Soluzione

7. Il prossimo 5 luglio la Terra raggiungerà l'afelio, il punto della propria orbita in cui è massima la distanza dal Sole, pari a circa $1,52 \times 10^{11}$ m. Il perielio è invece il punto che si trova alla minima distanza dal Sole, pari a circa $1,47 \times 10^{11}$ m. Determinare, in un opportuno sistema di riferimento, l'equazione che rappresenta la traiettoria della Terra intorno al Sole.

Soluzione

8. Scrive Carlo Emilio Gadda in uno dei racconti de *L'Adalgisa - Disegni milanesi*: «Le stanze del servizio, il bagno, i corridoi, l'anticamera e l'uno de' due gabinetti, eran pavimentati con piastrelle rosse di piccolo formato: esagonali [...]. L'apotema di quelle mattonelle misurava centimetri 5,196: mentreché il raggio del circolo circoscritto raggiungeva i 60 millimetri».

Esprimere la relazione esatta tra raggio del cerchio circoscritto ed apotema (ossia il raggio del cerchio inscritto) per un esagono regolare. Verificare il risultato ottenuto alla luce delle misure indicate dallo scrittore. Spiegare perché, utilizzando piastrelle esagonali regolari tutte congruenti, è possibile pavimentare un piano. Con quali altri poligoni regolari, tra loro congruenti, è possibile pavimentare un piano? Motivare la risposta.

Soluzione

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

a) Data una funzione f di equazione $y = f(x)$ e una retta nella forma esplicita $r: y = mx + q$, la condizione di tangenza di r nel punto $P(x_P, f(x_P))$ evidentemente appartenente a f , si traduce nel sistema di equazioni

$$\begin{cases} f(x_P) = mx_P + q \\ f'(x_P) = m \end{cases} \quad (1)$$

dove la prima assicura l'ulteriore appartenenza di P alla retta r e la seconda impone che il coefficiente angolare di r sia uguale alla derivata prima di f in P .

Nel caso proposto, f dipende dai due parametri reali a e b e possiede equazione

$$f_{a,b}(x) = \frac{ax^3 + b}{x^2} \quad \text{di dominio } x \neq 0, \quad (2)$$

e la sua derivata prima è

$$f'_{a,b}(x) = \frac{3ax^2 \cdot x^2 - (ax^3 + b)2x}{x^4} = \frac{ax^4 - 2bx}{x^4} = \frac{ax^3 - 2b}{x^3}. \quad (3)$$

Poiché $P(1, y_P) \in t$ con t retta tangente di equazione $t: y = -7x + 12$, la sua ordinata assume il valore $y_P = -7 \cdot 1 + 12 = 5$ e il sistema (1) diviene

$$\begin{cases} f_{a,b}(1) = 5 \\ f'_{a,b}(1) = -7 \end{cases}$$

che, in base a (2) e (3), si riduce alle equazioni

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - 2b = -7 \end{cases}$$

soddisfatte dai due valori reali

$$3b = 12 \implies b = 4 \implies a = 1.$$

b) La funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2} \quad (4)$$

di dominio $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non possiede particolari simmetrie in quanto

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 4}{(-x)^2} = \frac{-x^3 + 4}{x^2} \neq \pm f(x)$$

mentre il suo segno dipende unicamente dal suo numeratore. Risulta pertanto

$$f(x) \geq 0 \iff x^3 + 4 \geq 0 \implies x^3 \geq -4 \implies x \geq -\sqrt[3]{4}.$$

Poiché la funzione rientra nell'ambito delle funzioni razionali fratte con il grado del numeratore maggiore di quello del denominatore, lo studio dei suoi limiti agli estremi del dominio e in $x = 0$ si semplifica se la riscriviamo come

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}, \quad (5)$$

forma che ci permette di riconoscere nel secondo addendo il termine responsabile per l'esistenza di un asintoto verticale e, nel primo, il termine che motiva l'esistenza di un asintoto obliquo di equazione $y_a = x$. Difatti risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = +\infty \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$

per cui il grafico γ possiede un asintoto verticale coincidente con l'asse delle ordinate. Inoltre se $x \rightarrow \pm\infty$ otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad (6)$$

poiché i limiti dei due addendi di (5) assumono i valori

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4}{x^2}\right) = 0.$$

Il risultato (6) motiva lo studio degli ulteriori due limiti

$$m_a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{4}{x^3}\right) = 1 + 0 = 1$$

e

$$q_a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

che essendo entrambi finiti confermano l'esistenza dell'asintoto obliquo con equazione $a: y_a = x$. Poiché inoltre vale la disuguaglianza

$$f(x) - y_a = \left(x + \frac{4}{x^2}\right) - x = \frac{4}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

il grafico γ di f appartiene al semipiano descritto dalla condizione $y > x$.

A partire dalla (5) il calcolo della derivata prima fornisce l'espressione

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3} \quad (7)$$

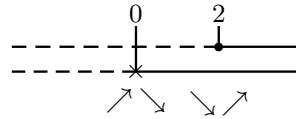


Fig. 1. Segno di $f'(x)$.

il cui segno dipende sia dal numeratore

$$x^3 - 8 \geq 0 \implies x^3 \geq 8 \implies x \geq 2,$$

che dal denominatore $x^3 > 0$, quest'ultimo risolto dalla $x > 0$. Combinando graficamente i segni di questi termini (fig. 1) e considerando il dominio, ne deriva che f è crescente per $x < 0$ e in $x > 2$, presenta un minimo in corrispondenza di $x_m = 2$ mentre in $x = 0$ si conferma l'asintoto verticale.

Dalla prima forma (7) di $f'(x)$ otteniamo direttamente la derivata seconda $f''(x)$ e il suo segno

$$f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

La funzione f volge quindi la concavità nel verso delle ordinate positive ed è quindi concava. Calcolata l'ordinata del minimo $f(2) = 2 + 1 = 3$ il grafico γ di f con i punti finora coinvolti è riportato in figura 2.

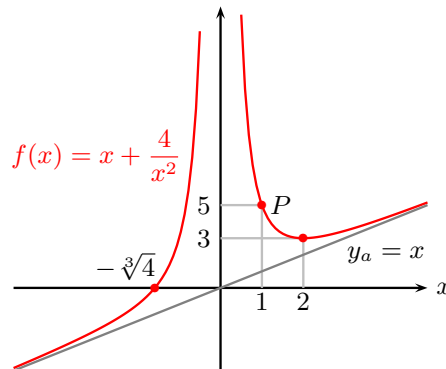


Fig. 2. Grafico di $f(x)$ e asintoto $y_a = x$ (sist. non isometrico).

L'ulteriore retta tangente t_1 passante per $P(1, 5)$ a γ deve appartenere al fascio di equazione

$$t_1: y - 5 = m(x - 1) \tag{8}$$

e dovrà essere soluzione del sistema

$$\begin{cases} y - 5 = m(x - 1) \\ y = \frac{x^3 + 4}{x^2}. \end{cases} \tag{9}$$

Eliminando la variabile y otteniamo l'equazione risolvente

$$\frac{x^3 + 4}{x^2} - 5 = m(x - 1)$$

che riscriviamo come

$$x^3 + 4 - 5x^2 = mx^3 - mx^2. \quad (10)$$

Riordinati i termini

$$x^3(1 - m) + (m - 5)x^2 + 4 = 0, \quad (11)$$

il polinomio così ottenuto dovrà presentare come soluzione il valore $x_P = 1$ cosicché è possibile scomporlo in fattori con la regola di Ruffini. Procedendo in tal senso otteniamo

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 1 & 1 - m & m - 5 & 0 & 4 \\ & & 1 - m & -4 & -4 \\ \hline & 1 - m & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

per cui riscriviamo il polinomio (11) come

$$(x - 1)[(1 - m)x^2 - 4x - 4] = 0. \quad (12)$$

La condizione di tangenza richiesta implica che almeno due punti di intersezione tra retta e grafico γ coincidano, condizione che algebricamente equivale ad imporre che le due soluzioni dell'equazione

$$(1 - m)x^2 - 4x - 4 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(1 - m)}}{1 - m} \quad (13)$$

siano coincidenti. Dev'essere pertanto nullo il discriminante ossia

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 4(1 - m) = 0 \implies 4 + 4 - 4m = 0 \implies m = 2 \quad (14)$$

con $x_1 = x_2 = 2/(1 - 2) = -2$. La retta cercata ha quindi equazione $t_1: y - 5 = 2(x - 1)$ ossia $y = 2x + 3$ e tocca γ nel punto di ascissa -2 .

• Per una soluzione **alternativa** alla ricerca dell'ulteriore retta tangente per P si veda più avanti al termine di questa esposizione.

c) In base alla scomposizione in fattori (12) siamo in grado di discutere il numero delle intersezioni tra la funzione e il fascio di rette (8) per P .

Difatti nel caso il fattore di secondo grado (13) non abbia soluzioni e, in base alla (14), ciò si presenta quando

$$\frac{\Delta}{4} < 0 \quad 8 - 4m < 0 \implies m > 2,$$

il polinomio (12) possiede l'unica soluzione $x = 1$. Nel caso sia $m = 2$ il fattore di secondo grado (13) presenta, come visto, due soluzioni coincidenti cui va aggiunta la soluzione $x = 1$. Se invece $2 - m > 0 \wedge m \neq 1$ ossia $m < 2 \wedge m \neq 1$ le soluzioni sono sempre tre. Infine se $m = 1$ il fattore quadratico (13) si riduce al primo grado e presenta la sola soluzione

$$0 - 4x - 4 = 0 \implies x = -1$$

per cui le soluzioni di (12) sono due $x = \pm 1$.

• In alternativa e partendo ancora dalla scomposizione (12), riscriviamo il solo fattore quadratico come

$$1 - m = \frac{4x + 4}{x^2} \implies m = 1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$$

e interpretiamo la ricerca delle soluzioni di quest'ultima equazione come la ricerca delle intersezioni del fascio di rette orizzontali $y = m$ con la curva g rappresentata dal secondo membro: si tratta quindi di discutere, al variare di m , il sistema

$$\begin{cases} y = m \\ y = 1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}. \end{cases} \quad (15)$$

A tal fine sviluppiamo uno studio sintetico di g

$$g: y = 1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} = 1 - \frac{4x + 4}{x^2} \quad (16)$$

nel dominio \mathbb{R}_0 notando innanzitutto la presenza di un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = 1 - 0 - 0 = 1.$$

A questo si aggiunge l'asintoto verticale $x = 0$ valendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(1 - \frac{4x + 4}{x^2} \right) = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} [-(4x + 4)] = -4 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^2 = 0^+.$$

Il grafico di g giace al di sopra dell'asintoto orizzontale quando

$$g(x) \geq 1 \quad 1 - \frac{4x + 4}{x^2} \geq 1 \implies -\frac{4x + 4}{x^2} \geq 0 \implies x \leq -1.$$

La derivata prima è

$$y' = \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} = \frac{4x + 8}{x^3}$$

e il suo segno $y' \geq 0$ dipende dai due termini

$$4x + 8 \geq 0 \implies x \geq -2; \quad x^3 > 0 \implies x > 0$$

che, combinati, implicano, fig. 3, una funzione crescente in $x < -2$ oppure $x > 0$ e un massimo assoluto in corrispondenza dell'ascissa $x = -2$ con ordinata $g(-2) = 2$.

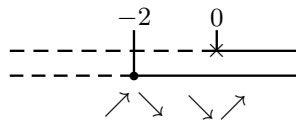


Fig. 3. Segno di y' .

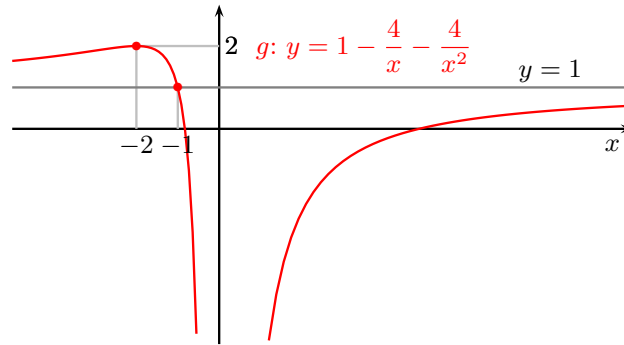


Fig. 4. Grafico di g e suo asintoto $y = 1$.

Il grafico di (16), riportato in figura 4, ci permette di discutere il numero delle soluzioni del sistema (15) al variare di m . Considerando l'aggiunta della soluzione $x = 1$ indipendente da m , ritroviamo nello specchio seguente il numero delle soluzioni discusso inizialmente

- $m > 2$, 1 soluzione
- $m = 2$, 2 sol. coincidenti + 1 soluzione
- $m < 2 \wedge m \neq 1$, 3 soluzioni
- $m = 1$, 2 soluzioni, $x = \pm 1$.

d) Poiché la retta t e l'asintoto a si intersecano nel punto Q di coordinate

$$\begin{cases} y = -7x + 12 \\ y = x \end{cases} \implies x = -7x + 12 \implies x_Q = y_Q = \frac{3}{2},$$

la regione \mathcal{R} appare l'unione di un triangolo mistilineo di area fissa (in verde chiaro nella figura 5) con una regione di area variabile data la condizione $k > \frac{3}{2}$ (di color giallo in figura 5).

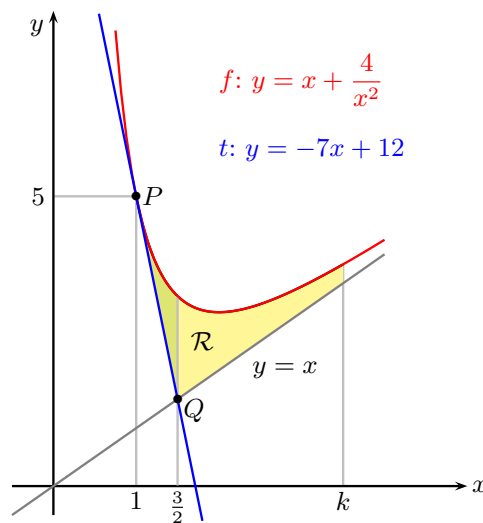


Fig. 5. Regione \mathcal{R} di area $S(k)$.

L'area $S(k)$ è quindi somma di due termini: il primo si ottiene dall'integrale definito

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^{\frac{3}{2}} [f(x) - (-7x + 12)] dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[x + \frac{4}{x^2} + 7x - 12 \right] dx \\ &= \int_1^{\frac{3}{2}} \left(8x - 12 + \frac{4}{x^2} \right) dx \end{aligned}$$

e, calcolate le primitive dei termini elementari che compaiono ad argomento, otteniamo

$$S_1 = \left[\frac{8x^2}{2} - 12x - \frac{4}{x} \right]_1^{\frac{3}{2}} = \left(4 \cdot \frac{9}{4} - 18 - \frac{8}{3} \right) - (4 - 12 - 4) = \frac{1}{3}. \quad (17)$$

Il secondo, dipendente dall'estremo di integrazione k , è rappresentato dall'integrale

$$\begin{aligned} S_2(k) &= \int_{\frac{3}{2}}^k [f(x) - x] dx = \int_{\frac{3}{2}}^k \left(x + \frac{4}{x^2} - x \right) dx \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^k \left(\frac{4}{x^2} \right) dx \end{aligned}$$

che, risolto, dà come risultato

$$S_2(k) = \left[-\frac{4}{x} \right]_{\frac{3}{2}}^k = -\frac{4}{k} + \frac{8}{3}. \quad (18)$$

Pertanto, per (17) e (18), l'area della regione \mathcal{R} è

$$S(k) = S_1 + S_2(k) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{k} = 3 - \frac{4}{k} \quad \text{con } k > \frac{3}{2}. \quad (19)$$

Il suo limite per $k \rightarrow +\infty$ discende immediato

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{4}{k} \right) = 3 - 0 = 3$$

non appena si osservi che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4}{k} = 0.$$

In definitiva, l'area della regione \mathcal{R} delimitata dalla funzione f , dalla sua tangente in P e dall'asintoto obliquo pur non essendo chiusa possiede un valore finito.

Appendice. La ricerca della seconda tangente al grafico γ della funzione f può iniziare anche dall'equazione rappresentativa della retta tangente calcolata in un generico punto $P_0(x_0, f(x_0))$ di γ . Poiché in tale punto sussistono per (4) e (7), le condizioni

$$f(x_0) = x_0 + \frac{4}{x_0^2}, \quad f'(x_0) = 1 - \frac{8}{x_0^3}$$

la retta tangente in P_0 è

$$t_1: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

che esplicitiamo come

$$t_1: y - \left(x_0 + \frac{4}{x_0^2}\right) = \left(1 - \frac{8}{x_0^3}\right)(x - x_0). \quad (20)$$

Poiché la retta t_1 deve passare per $P(1, 5)$, la precedente si riduce all'equazione

$$5 - \left(x_0 + \frac{4}{x_0^2}\right) = \left(1 - \frac{8}{x_0^3}\right)(1 - x_0) \quad (21)$$

nell'unica incognita x_0 , equazione che riportiamo con alcuni passaggi alla forma equivalente

$$5 - x_0 - \frac{4}{x_0^2} = 1 - x_0 - \frac{8}{x_0^3} + \frac{8}{x_0^2} \implies \frac{8}{x_0^3} - \frac{12}{x_0^2} + 4 = 0$$

e dalla quale, moltiplicando per $x_0^3/4$, giungiamo al polinomio

$$x_0^3 - 3x_0 + 2 = 0. \quad (22)$$

Questo polinomio di terzo grado presenta, evidente ed aspettata, la soluzione $x_0 = 1$ per cui lo possiamo scomporre applicando, per esempio, la regola di Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Ottenuta la sua scomposizione in

$$x_0^3 - 3x_0 + 2 = (x_0 - 1)(x_0^2 + x_0 - 2) = 0, \quad (23)$$

determiniamo l'ascissa dell'ulteriore punto di tangenza annullando il fattore quadratico e quindi risolvendo l'equazione

$$x_0^2 + x_0 - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{array}$$

Sostituendo l'unico valore $x_0 = -2$ diverso da 1 nella (20) discende infine l'equazione della retta richiesta

$$t_1: y - (-2 + 1) = (1 + 1)(x + 2) \implies y = 2x + 3.$$

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

a) Il dominio \mathcal{D} della famiglia di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}, \quad (1)$$

con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$ deve soddisfare innanzitutto la condizione

$$ax^2 + bx + 1 \geq 0,$$

disequazione che possiede un discriminante $\Delta = b^2 - 4a > 0$ in quanto è $a < 0$ per cui è soddisfatta nell'intervallo

$$\mathcal{D} = \left\{ x \mid \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \leq x \leq \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \right\}. \quad (2)$$

Per lo studio della derivabilità in $x = 0$, iniziamo dal rapporto incrementale (si vedano le note 1 e 2 per un metodo alternativo)

$$\frac{\Delta f_n}{\Delta x} = \frac{f_n(0+h) - f_n(0)}{h}$$

che esplicitiamo come

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_n}{\Delta x} &= \frac{\sqrt[n]{(0+h)^2} - \sqrt{a(0+h)^2 + b(0+h) + 1} - (0-1)}{h} \\ &= \frac{\sqrt[n]{h^2} - \sqrt{ah^2 + bh + 1} + 1}{h}. \end{aligned} \quad (3)$$

Per procedere al calcolo del suo limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt[n]{h^2} - \sqrt{ah^2 + bh + 1} + 1}{h}, \quad (4)$$

suddividiamo il suo argomento nei singoli addendi

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{\sqrt[n]{h^2}}{h} + \frac{1 - \sqrt{ah^2 + bh + 1}}{h} \right) \quad (5)$$

ed affrontiamo separatamente i relativi limiti.

Nel caso sia $n = 2$ questo assume la forma

$$n = 2, \quad \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{|h|}{h} + \frac{1 - \sqrt{ah^2 + bh + 1}}{h} \right) \quad (6)$$

e i limiti destro e sinistro del primo addendo sono evidentemente

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\frac{h}{h} \right) = -1. \quad (7)$$

Poiché il limite del secondo rientra nel caso di indeterminazione $0/0$, procediamo riscrivendo l'argomento tramite una razionalizzazione del numeratore. Questo implica

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{1 - \sqrt{ah^2 + bh + 1}}{h} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{ah^2 + bh + 1}}{1 + \sqrt{ah^2 + bh + 1}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{1 - ah^2 - bh - 1}{h(1 + \sqrt{ah^2 + bh + 1})} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{-h(ah + b)}{h(1 + \sqrt{ah^2 + bh + 1})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{-ah - b}{1 + \sqrt{ah^2 + bh + 1}} \end{aligned}$$

per cui il limite esiste e vale, indifferentemente, per $h \rightarrow 0^\pm$

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{-ah - b}{1 + \sqrt{ah^2 + bh + 1}} = -\frac{b}{2}. \quad (8)$$

Ne segue che il limite (6) del rapporto incrementale con $n = 2$ è

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{|h|}{h} + \frac{1 - \sqrt{ah^2 + bh + 1}}{h} \right) = \pm 1 - \frac{b}{2} \quad (9)$$

ed essendo diversi la funzione f_2 non presenta derivata in $x = 0$.

Se $n \geq 3$ il limite del secondo addendo di (5) è ancora dato dalla (8) mentre per il primo è necessario distinguere due casi: con n dispari

$$n \text{ dispari, } \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt[n]{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \sqrt[n]{\frac{h^2}{h^n}} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[n]{h^{n-2}}} = \pm\infty$$

in quanto $\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \sqrt[n]{h^{n-2}} = 0^\pm$. Se invece n è pari troviamo comunque

$$\begin{aligned} n \text{ pari, } \quad & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[n]{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{\frac{h^2}{h^n}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[n]{h^{n-2}}} = +\infty \\ n \text{ pari, } \quad & \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[n]{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(-\sqrt[n]{\frac{h^2}{(-h)^n}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt[n]{h^{n-2}}} = -\infty \end{aligned}$$

poiché $\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \sqrt[n]{h^{n-2}} = 0^\pm$.

In ogni caso, per $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$ la famiglia f_n non è derivabile in $x = 0$.

– Da quanto precede i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono finiti e diversi solo nel caso di $n = 2$ per cui solo la funzione f_2 in $x = 0$ presenta un punto angoloso.

– Il grafico α proposto dal testo mostra che $f_2(\pm 1) = 1$ e $f_2(0) = -1$. Inoltre la funzione

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$$

è simmetrica pari per cui deve valere l'identità

$$f_2(-x) = f_2(x) \quad \text{per } \forall x \in [-1, 1].$$

Imponendo questa identità assieme alla $f_2(1) = 1$ discende il sistema

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt{a(-x)^2 - bx + 1} = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1} \\ 1 = 1 - \sqrt{a + b + 1} \end{cases}$$

che, essendo ($|-x| = |x|$), riscriviamo come

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2 - bx + 1} = \sqrt{ax^2 + bx + 1} \\ a + b + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ax^2 - bx + 1 = ax^2 + bx + 1 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 2bx = 0, \\ a = -b - 1. \end{cases}$$

Essendo la prima relazione una identità valida in $\forall x \in [-1, 1]$ dev'essere $b = 0$ e quindi

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = -1, \end{cases}$$

cosicché la funzione f_2 si particolarizza in

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2} \quad \text{con } x \in [-1, 1]. \quad (10)$$

In alternativa, ripresi gli estremi del dominio \mathcal{D} rappresentati dalla (2), la condizione che esso sia simmetrico rispetto all'origine implica che il punto medio del segmento con tali estremi sia nullo. Poiché questi ultimi sono le soluzioni della disequazione $ax^2 + bx + 1 \geq 0$, è sufficiente imporre che la semisomma delle sue radici sia nulla per cui, assieme ancora alla condizione $f_2(1) = 1$, ne risulta il sistema

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = 0, \\ f(1) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} b = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = 0 \\ a = -1. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno di f_2 , questa risulta positiva nel sottoinsieme di $[-1, 1]$ che risolve la disequazione

$$f_2(x) \geq 0, \quad |x| - \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \implies |x| \geq \sqrt{1 - x^2}$$

per cui

$$x^2 \geq 1 - x^2 \implies 2x^2 \geq 1 \implies x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].$$

b) La funzione

$$g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{con } x \in [-1, 1] \quad (11)$$

è manifestamente simmetrica pari in quanto $g(-x) = g(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$ per cui possiamo limitare lo studio all'intervallo $[0, 1]$ ai cui estremi risulta $g(0) = g(1) = 1$. g è inoltre positiva nel suo dominio e, come somma di funzioni continue, è continua in esso.

Considerando la simmetria, la verifica richiesta comporta lo studio del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0^+$ in $x = 0$ e per $h \rightarrow 0^-$ in $x = 1$. Poiché questo rapporto in $x = 0$ è

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{|h| + \sqrt{1-h^2} - 1}{h},$$

il limite da determinare è

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{h + \sqrt{1-h^2} - 1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\sqrt{1-h^2} - 1}{h} \right). \quad (12)$$

Procedendo sulla traccia di quanto già **visto** per la funzione f_n razionalizziamo il numeratore del secondo addendo ad argomento del limite (12),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-h^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1-h^2} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1-h^2} + 1}{\sqrt{1-h^2} + 1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-h^2 - 1}{h(\sqrt{1-h^2} + 1)}$$

per cui esso vale

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-h^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{\sqrt{1-h^2} + 1} = 0,$$

cosicché il limite (12) che esprime la derivata destra risulta $g'_+(0) = 1$: conseguentemente per simmetria $g'_-(0) = -1$ che dimostra come $x = 0$ sia un punto angoloso.

Il limite del rapporto incrementale in $x = 1$ è invece

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|1+h| + \sqrt{1-(1+h)^2} - 1}{h} \quad (13)$$

ossia

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h + \sqrt{1-(1+h)^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h + \sqrt{-2h - h^2}}{h}.$$

Estratto il termine $|h| = -h$ dalla radice in quanto $h < 0$, diviene

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{|h|}{h} \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(1 - \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} \right). \quad (14)$$

Poiché

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} = +\infty,$$

il limite del rapporto incrementale (13) è

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|1+h| + \sqrt{1-(1+h)^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(1 - \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} \right) = -\infty$$

e così non esiste la derivata sinistra in $x = 1$ e, per simmetria, la derivata destra in $x = -1$.

La derivata prima nei rimanenti punti del dominio è

$$g'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in]0, 1[\\ -1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & x \in]-1, 0[\end{cases} \quad (15)$$

e questa in $]0, 1[$ è positiva o nulla quando

$$g'(x) \geq 0, \quad 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \implies 1 \geq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \implies \sqrt{1-x^2} \geq x$$

dalla quale

$$1 - x^2 \geq x^2 \implies 2x^2 \leq 1 \implies 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La funzione g è quindi crescente in quest'ultimo intervallo, raggiunge un massimo in $x = 1/\sqrt{2}$ e quindi è decrescente in $]1/\sqrt{2}, 1[$.

Il calcolo della derivata seconda fornisce

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{1}{1-x^2} \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} \right] = -\frac{1}{1-x^2} \cdot \left(\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} < 0 \quad \forall x \in]0, 1[\end{aligned}$$

cosicché la concavità è, in $]0, 1[$ rivolta verso il basso. Considerata la simmetria, il suo grafico β è rappresentato nella figura 1 in blu mentre in rosso riportiamo la funzione f_2 : la loro unione forma il grafico $\gamma = \alpha \cup \beta$ che, data la forma a cuore, in un qualche modo (!) rimanda alla [citazione](#) sulla bellezza che accompagna il testo del problema.

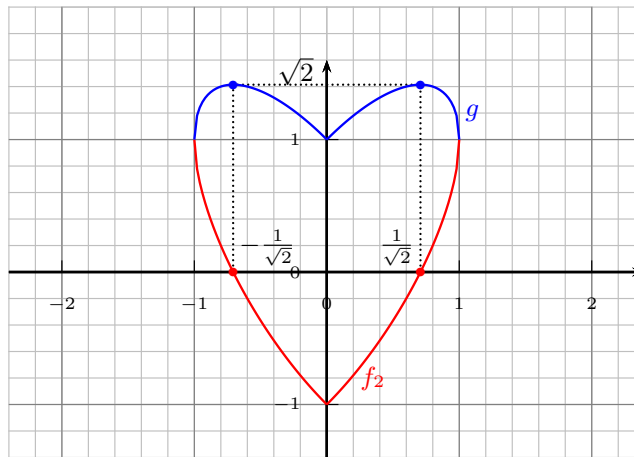


Fig. 1. Grafico $\gamma = \alpha \cup \beta$, unione di f_2 con g .

c) Il fascio proprio di rette di equazione $r: x = k$ con $k \in [-1, 1]$ interseca il grafico α di f_2 in P , punto di coordinate

$$P\left(k, |k| - \sqrt{1-k^2}\right) \quad (16)$$

e in Q il grafico β con

$$Q(k, |k| + \sqrt{1 - k^2}). \quad (17)$$

La misura del segmento PQ che indichiamo come y_{PQ} è quindi

$$y_{PQ} = \overline{PQ} = y_Q - y_P = |k| + \sqrt{1 - k^2} - (|k| - \sqrt{1 - k^2}) = 2\sqrt{1 - k^2}. \quad (18)$$

Il massimo di quest'ultima relazione si può riconoscere immediatamente in quanto l'argomento della radice quadrata assume il valore maggiore (pari a 1) quando $k = 0$. Di conseguenza, essendo la radice quadrata una funzione crescente del suo argomento, in corrispondenza di $k = 0$ è massima pure la y_{PQ} .

Volendo interpretare graficamente l'equazione (18), la riscriviamo elevando al quadrato i suoi membri come

$$(y_{PQ})^2 = 4(1 - k^2) \implies k^2 + \frac{(y_{PQ})^2}{4} = 1, \quad \text{con } -1 \leq k \leq 1 \text{ e } y_{PQ} \geq 0 \quad (19)$$

e, di conseguenza riconosciamo l'equazione di una ellisse nel piano cartesiano Oky_{PQ} di semiassi $k_1 = 1$ e $y_1 = 2$ (fig. 2). I punti che soddisfano le condizioni (19) appartengono al semipiano delle ordinate positive e mostrano come, il valore massimo della variabile y_{PQ} venga raggiunto quando $k = 0$ ossia quando la retta r coincide con l'asse di simmetria di γ .

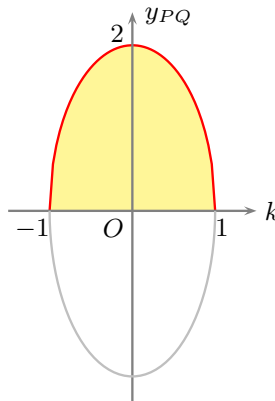


Fig. 2. Grafico di $k^2 + (y_{PQ})^2/4 = 1$.

d) La verifica che la funzione

$$H(x) = \frac{1}{2} \left(\arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2} \right) \quad (20)$$

è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ si riduce al calcolo della derivata $H'(x)$ che segue

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{1 - x^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 + (1 - x^2) - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} \right] = \sqrt{1 - x^2} = h(x). \end{aligned}$$

mentre per il calcolo dell'area \mathcal{A} della regione finita di piano delimitata da γ dobbiamo risolvere l'integrale definito che, in base alle (10), (11) e alla sua simmetria, esplicitiamo in

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^1 [g(x) - f_2(x)] dx = 2 \int_0^1 2\sqrt{1-x^2} dx.$$

Comunque, in base all'interpretazione grafica della (18) come arco di ellisse e con le condizioni (19), il valore dell'area discende immediato se consideriamo che l'area \mathcal{A} della regione delimitata da una ellisse è espressa dal prodotto dei suoi semiassi a e b cioè $\mathcal{A} = \pi ab$. Nel nostro caso siamo interessati alla metà di quest'area per cui otteniamo

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \pi (k_1 \cdot y_1) = \frac{1}{2} \cdot \pi (1 \cdot 2) = \pi.$$

Se invece intendiamo procedere al calcolo esplicito dell'integrale

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^1 2\sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_0^1 h(x) dx \quad (21)$$

e visto che $H(x)$ è una primitiva di $h(x)$, risulta

$$\mathcal{A} = 4 \cdot \frac{1}{2} \left[\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = 2 [\arcsen(1) - \arcsen(0)] = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi.$$

Poiché $y = \sqrt{1-x^2}$ descrive la semicirconferenza di ordinata positiva dedotta dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$, l'integrale (21) rappresenta pure l'area del cerchio di raggio $r = 1$, appunto pari a $\mathcal{A} = \pi r^2 = \pi$.

Nota 1. Nel trattare la *non* derivabilità della famiglia di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1} \quad \text{e della} \quad g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$$

abbiamo preferito calcolare il limite del rapporto incrementale, in $x = 0$ per entrambe, e in $x = \pm 1$ per la seconda, in quanto tale approccio è quello più generale seppure presenti, generalmente, calcoli più laboriosi.

In questa nota intendiamo presentare il metodo alternativo che studia il limite della funzione derivata e che, di norma, comporta calcoli meno impegnativi, a maggior ragione nel caso $n = 2$ in quanto appare evidente dal grafico α come f_2 sia continua in $x = 0$ e ivi presenti derivate destra e sinistra finite ma diverse. In assenza di tali informazioni, questo metodo, se applicato per *verificare la derivabilità* di una funzione in un punto può, come riportato nell'esempio della **nota 2**, indurre a conclusioni errate.

Procediamo quindi alla derivazione di f_n riscritta come $f_n(x) = x^{2/n} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ distinguendo comunque il caso corrispondente a $n = 2$ dai rimanenti.

Se quindi $n = 2$ abbiamo

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$$

cioè

$$f_2(x) = \begin{cases} x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}, & x \geq 0 \\ -x + \sqrt{ax^2 + bx + 1}, & x < 0, \end{cases}$$

e il calcolo di $f'_2(x)$ dà

$$f'_2(x) = \begin{cases} +1 - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}, & x \geq 0 \\ -1 - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}, & x < 0, \end{cases}$$

e poiché il secondo addendo rappresenta una funzione continua in $x = 0$, il suo limite è finito e pari a

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}} = \frac{b}{2}.$$

Ne segue che la derivata prima destra $f'_2(0^+)$, e sinistra $f'_2(0^-)$, valgono rispettivamente

$$f'_2(0^+) = 1 - \frac{b}{2}, \quad f'_2(0^-) = -1 - \frac{b}{2}$$

ed essendo finite e diverse, concludiamo che $x = 0$ è un punto angoloso privo di derivata. Se $n > 2$ il calcolo della derivata destra e sinistra fornisce

$$f'_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n(x)^{1-2/n}} - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}, & x > 0 \\ \frac{-2}{n(-x)^{1-2/n}} - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}, & x < 0 \end{cases}$$

per cui, pur rimanendo invariato e finito il limite del secondo termine, il primo appare divergere a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{n(x)^{1-2/n}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{n(-x)^{1-2/n}} = -\infty$$

in quanto in entrambi i casi $1 - \frac{2}{n} > 0$ con

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} (\pm x)^{1-2/n} = 0^+$$

confermando quindi la non derivabilità in $x = 0$.

Per quanto riguarda la funzione g , ripreso la sua derivata prima (15),

$$g'(x) = \begin{cases} +1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in]0, 1[\\ -1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in]-1, 0[\end{cases}$$

abbiamo, analogamente a quanto visto per f_2 ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} g'(x) = \pm 1, \tag{22}$$

cosicché, essendo finiti ma diversi, $x = 0$ è un punto angoloso.

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) = +\infty \tag{23}$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1 \mp} (-x) = \mp 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 1 \mp} \sqrt{1-x^2} = 0^+,$$

e, non essendo finiti, g non è derivabile in $x = \pm 1$.

Nota 2. Applichiamo l'approccio della nota precedente allo studio della derivabilità della funzione seguente, peraltro classico esempio in questo contesto

$$f: \begin{cases} y = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ y = 0, & x = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Poiché la derivata prima è

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \neq 0,$$

studiamo i limiti di ciascun suo addendo. Per il primo risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad (25)$$

in quanto l'argomento è il prodotto della funzione x con una funzione limitata qual è la funzione seno. Più formalmente, poiché sussistono le disuguaglianze

$$-2x \leq 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2x \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0 \pm} (2x) = 0,$$

il teorema del confronto assicura il risultato (25). Il limite del secondo addendo invece

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \cos(t) = \bar{\mathcal{A}},$$

e non esiste in quanto il coseno è una funzione periodica che assume valori in $[-1, 1]$. Potremmo quindi concludere che la funzione proposta non presenta derivata in $x = 0$ in quanto non esiste il suo limite per $x \rightarrow 0$.

Se comunque, calcoliamo il limite del suo rapporto incrementale in $x = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0 \pm} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0 \pm} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$$

troviamo, per lo stesso teorema che garantisce la (25),

$$\lim_{h \rightarrow 0 \pm} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

per cui la derivata prima, diversamente dalla precedente erronea conclusione, esiste e vale $f'(0) = 0$: in definitiva la derivata di f è

$$f': \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ci chiediamo quindi quali siano le ipotesi che ci permettono di procedere con il calcolo dei limiti della funzione derivata. A tal fine riportiamo il teorema seguente:

Teorema sul limite della derivata. Sia f una funzione continua in $x = a$ e dotata di derivata prima $f'(x)$ per tutte le x di un intorno di a , escluso a . Se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) \quad (26)$$

allora f è derivabile in a con

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

Sulla base di questo teorema (non sempre presente nei testi di scuola superiore) se intendiamo valutare la derivabilità di f nel punto $x = a$ in cui essa è continua, dev'essere soddisfatta l'ipotesi (26) e cioè

- i limiti destro e sinistro della derivata prima devono essere finiti ed uguali.

In tal caso la funzione è, come detto, derivabile in $x = a$.

Se comunque i limiti destro e sinistro in $x = a$,

- esistono finiti o infiniti ma siano diversi, la funzione non è derivabile e può presentare in $x = a$ un punto angoloso o una cuspid.
- Se esistono infiniti ed uguali, la funzione non è derivabile e presenta un flesso verticale.
- Se non esistono sarà necessario calcolare il limite del rapporto incrementale.

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Il triangolo ABC è rettangolo in B con ipotenusa AC e, come rappresentato in figura 1, supponiamo quale condizione sufficiente che esso sia isoscele. Dimostriamo che dev'essere $\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

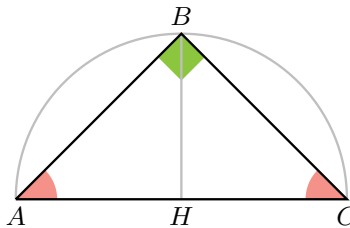


Fig. 1. Triangolo isoscele ABC e rettangolo in B .

$\triangle ABC$ isoscele implica che

$$\angle BAC \cong \angle BCA$$

ma poiché $\angle ABC \cong 90^\circ$ segue che

$$\angle BAC \cong \angle BCA = 45^\circ. \quad (1)$$

In $\triangle ABC$ l'altezza BH è mediana per cui

$$\overline{AH} = \overline{HC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \quad (2)$$

ma pure bisettrice

$$\angle ABH \cong \angle CBH = 45^\circ. \quad (3)$$

Pertanto per (1) e (3) risulta

$$\angle BAH \cong \angle ABH = 45^\circ$$

e quindi $\triangle ABH$ è isoscele sulla base AB : ne segue

$$\overline{AH} = \overline{BH}$$

ma per (2)

$$\overline{AH} = \overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Analoghe deduzioni valgono per $\triangle CBH$.

Invertendo ipotesi e tesi, sia ora

$$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AC} \quad (4)$$

la condizione necessaria affinché sia $\triangle ABC$ isoscele. A tal fine e in base alla figura 2 supponiamo, negando la tesi, che $\triangle ABC$ non sia isoscele e quindi

$$\angle BAC \not\cong \angle BCA \quad (5)$$

e il piede dell'altezza BH non coincida con il punto medio M di AC e quindi $H \neq M$.

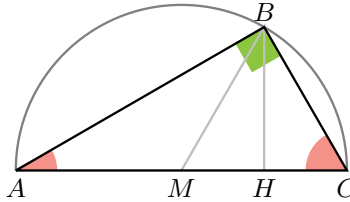


Fig. 2. Triangolo ABC rettangolo in B con $H \neq M$.

Poiché in questa ipotesi BM è la mediana all'ipotenusa ed essendo $\triangle ABC$ retto in B , ne deriva che

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AC} \quad (6)$$

per cui, applicando il teorema di Pitagora a $\triangle BMH$ ne deriva

$$\overline{MH}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BH}^2$$

che per (4) e (6) implica

$$\overline{MH}^2 = \frac{1}{4}\overline{AC}^2 - \frac{1}{4}\overline{AC}^2 = 0$$

contro l'ipotesi che sia

$$H \neq M.$$

• Un'ulteriore prova di carattere analitico della necessità della condizione (4) procede riscrivendo questa condizione come (fig. 1)

$$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}(\overline{AH} + \overline{HC}). \quad (7)$$

D'altra parte il secondo teorema di Euclide afferma che

$$\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HC} \quad (8)$$

cosicché poste assieme queste condizioni ($h = \overline{BH}$, $a = \overline{AH}$, $b = \overline{HC}$) risulta il sistema

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}(a + b) \\ h^2 = a \cdot b \end{cases}$$

dal quale, eliminando h otteniamo

$$\frac{1}{4}(a + b)^2 = ab \implies a^2 + b^2 + 2ab = 4ab \implies a^2 + b^2 - 2ab = 0$$

e quindi $(a - b)^2 = 0$. Da quest'ultima discende $a = b$ e ciò equivale ad affermare che l'altezza BH è pure mediana: conseguentemente $\triangle ABC$ dev'essere isoscele.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

La distribuzione discreta binomiale estende la semplice distribuzione di Bernoulli e definisce la probabilità $P(k)$ del numero k di successi che si possono presentare in un serie di n prove di Bernoulli in ciascuna delle quali la probabilità di successo è p e quella di insuccesso $1 - p$: in formula

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (1)$$

– La prima domanda del quesito rientra in questa distribuzione per cui, essendo p la probabilità di successo in una prova di Bernoulli, la probabilità $P(2)$ di due successi (testa) su $n = 5$ prove è

$$P(2) = \binom{5}{2} p^2 (1 - p)^{5-2} = 10 p^2 (1 - p)^3. \quad (2)$$

– La precedente probabilità dipende evidentemente dalla variabile casuale continua p appartenente all'intervallo $[0, 1]$. Pertanto per individuare il suo massimo calcoliamo la derivata prima

$$\begin{aligned} (P(2))' &= 10[2p(1 - p)^3 - 3p^2(1 - p)^2] \\ &= 10(1 - p)^2(2p - 2p^2 - 3p^2) \\ &= 10(1 - p)^2(2p - 5p^2) \end{aligned} \quad (3)$$

e, poiché $(1 - p)^2 \geq 0$, lo studio del suo segno implica

$$(P(2))' \geq 0 \implies p(2 - 5p) \geq 0$$

dalla quale le soluzioni $0 \leq p \leq \frac{2}{5}$.

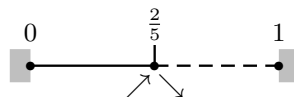


Fig. 1. Segno di $(P(2))'$.

La funzione continua $P(2)$ è quindi crescente in un intorno sinistro di $p = \frac{2}{5}$, decrescente nell'intorno destro (fig. 1) e, poiché in corrispondenza di tale valore la sua derivata prima si annulla, presenta ivi il suo massimo.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Il piano π nel sistema cartesiano $Oxyz$ possiede equazione $\pi: 3x - 2y + 5 = 0$ che, riscritta come

$$\pi: 3x - 2y + 0z + 5 = 0 \quad (1)$$

permette di individuare tramite i coefficienti delle variabili x, y, z le componenti del vettore $\vec{u}(u_x, u_y, u_z) = (3, -2, 0)$ perpendicolare al piano (fig. 1).

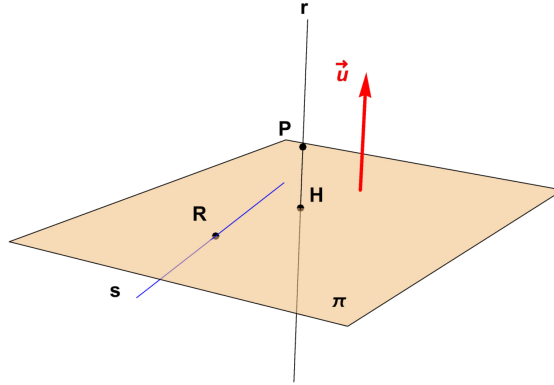


Fig. 1. Piano π e elementi coinvolti.

Poiché si chiede il punto $H \in \pi$ proiezione ortogonale di $P(4, 2, 1)$ su π , determiniamo la retta r per P e H a partire dalla sua rappresentazione vettoriale

$$r: \overrightarrow{QP} = t \cdot \vec{u}$$

essendo $Q(x, y, z)$ un suo generico punto. Riscritta quest'ultima in termini delle componenti ne discendono le equazioni

$$x - x_P = u_x t, \quad y - y_P = u_y t, \quad z - z_P = u_z t$$

equivalenti, nel nostro caso, al sistema

$$r: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Poiché $\{H\} = r \cap \pi$ queste soddisfano pure l'equazione (1) per cui sostituendole otteniamo la sola equazione nell'incognita t

$$3(4 + 3t) - 2(2 - 2t) + 5 = 0$$

che risolta dà $t = -1$. Sostituito quest'ultimo risultato nelle (2) troviamo le coordinate di H ,

$$\begin{cases} x = 4 - 3 \\ y = 2 + 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad H(1, 4, 1).$$

– La risposta alla seconda domanda segue una procedura del tutto simile dopo aver riscritto la retta

$$s: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

nella forma parametrica ponendo $y = t$ per cui è

$$s: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 2. \end{cases} \quad (3)$$

Troviamo il suo punto di intersezione con π , $s \cap \pi = \{R\}$, inserendo queste tre equazioni nella (1): ne deriva l'equazione nell'incognita t

$$3(t - 1) - 2(t) + 5 = 0 \implies t = -2$$

che, risolta, permette di ottenere la coordinate di R sostituendo questo valore nel sistema (3) cioè

$$r: \begin{cases} x = -2 - 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \implies R(-3, -2, 2).$$

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Per dimostrare che l'equazione

$$x^3 + x - \cos x = 0 \quad (1)$$

possiede un'unica soluzione positiva studiamo alcune caratteristiche fondamentali della funzione presente a primo membro

$$f(x) = x^3 + x - \cos x. \quad (2)$$

Il suo dominio è evidentemente \mathbb{R} e quale somma di funzioni continue x^3 , x e $\cos x$ è, a sua volta, una funzione continua. La sua derivata prima

$$f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin x > 0 \quad (3)$$

risulta positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto la precedente disequazione si può riscrivere come

$$3x^2 + 1 > -\sin x$$

con la somma a primo membro

$$3x^2 + 1 > 1, \quad \forall x \neq 0,$$

mentre il secondo membro assume valori nell'intervallo

$$-1 \leq -\sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre se $x = 0$ risulta pure $f'(0) = 1 > 0$.

Di conseguenza la funzione f è strettamente crescente e poiché $f(0) = -1$ e $f(1) = 2 - \cos(1) \approx 1,4597 > 0$ per il teorema degli zeri di una funzione continua deve esistere

almeno un valore $\alpha \in [0, 1]$ in corrispondenza del quale si ha $f(\alpha) = 0$. Inoltre per la monotonia strettamente crescente questo valore è unico: un suo calcolo approssimato fornisce $\alpha = 0,60352$.

In alternativa al metodo precedente di carattere analitico, possiamo sviluppare un approccio grafico interpretando l'equazione (1) come la ricerca delle intersezioni delle curve rappresentate dalle due equazioni

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + x \\ g(x) = \cos x, \end{cases} \quad (4)$$

la seconda delle quali possiede un grafico noto. Per la funzione cubica f , le principali caratteristiche del suo grafico si riassumono nei limiti agli estremi del dominio \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 + x) = \pm\infty,$$

nel suo segno

$$x(x^2 + 1) \geq 0 \iff x \geq 0,$$

nonché in quello della sua derivata prima ossia

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La cubica quindi è sempre crescente e interseca l'asse delle ascisse solo in $x = 0$ (fig. 1).

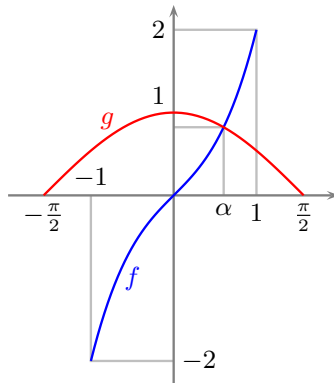


Fig. 1. Grafici di $f(x) = x^3 + x$ e $g(x) = \cos x$.

Considerando l'intervallo $x \in [0, 1]$ osserviamo che

$$f(0) < \cos(0)$$

in quanto $f(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$. In corrispondenza di $x = 1$ è invece $f(1) = 2$ e $\cos(1) \approx 0,54$ cosicch 

$$f(1) > \cos(1)$$

e le due funzioni, essendo entrambe continue e monotone assumono tutti i valori tra gli estremi $[f(0), f(1)]$ e $[\cos(1), \cos(0)]$. Si devono pertanto intersecare in un punto di ascissa $\alpha \in]0, 1[$. Per $x > 1$ non vi potranno essere ulteriori intersezioni tra i rispettivi grafici in quanto $f(x) > f(1)$ ossia $f(x) > 2$ e $\cos x \in [-1, 1]$.

Pure con $x < 0$ non vi potranno essere intersezioni perché se

$$x \in [-1, 0[\quad \text{risulta} \quad f(x) < 0 \wedge \cos x > 0,$$

mentre se $x < -1$ è sempre $f(x) < f(-1) < \cos x$ per la monotonia strettamente crescente di f e dove $f(-1) = -2$.

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

Una funzione polinomiale di quarto grado è rappresentata dall'equazione generale

$$y = p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (1)$$

e perché questa soddisfi le condizioni poste dal quesito vanno determinati i coefficienti reali delle potenze di x .

Se Γ è il grafico nel piano cartesiano di $p(x)$ la condizione di appartenenza dell'origine del sistema cartesiano e dei punti di coordinate $(1, 0)$ e $(2, -2)$ a Γ si traduce nelle equazioni

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(1) = 0 \\ p(2) = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0 \\ a + b + c + d + e = 0 \\ a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = -2 \end{cases} \quad (2)$$

che si semplificano nelle

$$\begin{cases} e = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d = -2. \end{cases} \quad (3)$$

La derivata prima $p'(x)$ del polinomio è invece

$$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \quad (4)$$

per cui la condizione di tangenza di Γ all'asse x nell'origine si traduce ponendo questa derivata uguale al coefficiente angolare dell'asse x che, essendo questo nullo, implica

$$p'(0) = 0 \implies d = 0.$$

Il sistema (3) si riduce quindi a

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 8b + 4c = -2. \end{cases} \quad (5)$$

Il punto $(2, -2)$ è per Γ un punto stazionario e ciò si traduce nell'annullarsi della derivata prima: potrà quindi essere un punto di minimo relativo proprio, di massimo relativo proprio o di flesso orizzontale. Ripresa la derivata prima (4) e aggiunta la condizione $p'(2) = 0$ al sistema (5), questo si completa nelle tre equazioni

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 8b + 4c = -2 \\ 4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 8b + 4c = -2 \\ 32a + 12b + 4c = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Ricavando dalla prima $c = -a - b$ e sostituendolo nelle altre due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} c = -a - b \\ 16a + 8b + 4(-a - b) = -2 \\ 32a + 12b + 4(-a - b) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = -a - b \\ 12a + 4b = -2 \\ 28a + 8b = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda per -2 e sommata alla terza dà

$$\begin{cases} -24a - 8b = 4 \\ 28a + 8b = 0 \end{cases} \implies 4a = 4 \implies a = 1$$

da cui discende

$$28 \cdot 1 + 8b = 0 \implies b = -\frac{7}{2}$$

e quindi

$$c = -1 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}.$$

In definitiva il polinomio richiesto è

$$y = p(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 = x^2 \left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} \right).$$

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

La funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt \quad x \geq a \quad (1)$$

si può integrare esplicitamente con il cambio di variabile $z = 1/t$ in quanto

$$z = \frac{1}{t} \quad \text{ha per differenziale} \quad dz = D\left[\frac{1}{t}\right] dt = -\frac{1}{t^2} dt. \quad (2)$$

Con questa sostituzione l'integrale indefinito si riduce ad uno elementare

$$\begin{aligned} \int \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2} &= \int [-\cos(z)] dz = -\int \cos(z) dz \\ &= -\text{sen}(z) + c = -\text{sen}\left(\frac{1}{t}\right) + c \end{aligned}$$

per cui l'integrale definito (1) si risolve in

$$F(x) = \left[-\text{sen}\left(\frac{1}{t}\right) \right]_a^x = -\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{sen}\left(\frac{1}{a}\right). \quad (3)$$

Poiché $x \geq a$ dove $x = 2/\pi$, vanno ora soddisfatte le tre condizioni

$$\begin{cases} F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}, \\ a > 0, \\ \frac{2}{\pi} \geq a. \end{cases} \quad (4)$$

Imponendo la prima condizione alla funzione (3) ne deriva l'equazione

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{2}$$

che si riduce all'equazione goniometrica elementare

$$-1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{2} \implies \operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

In generale le soluzioni di questa sono

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \vee \quad \frac{1}{a} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

ma per la positività (4) di a , sono accettabili solo i valori

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \vee \quad \frac{1}{a} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Ne discende l'insieme di soluzioni

$$a = \frac{6}{\pi(1+12k)}, \quad \vee \quad a = \frac{6}{\pi(5+12k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

e poiché il testo richiede il solo valore di a maggiore, ne segue la restrizione ai soli due valori corrispondenti a $k = 0$

$$a_1 = \frac{6}{\pi}, \quad \vee \quad a_2 = \frac{6}{5\pi} \quad (9)$$

in quanto se $k \geq 1$ risulta

$$k \geq 1 \implies \frac{6}{\pi(1+12k)} < a_1 \quad \vee \quad \frac{6}{\pi(5+12k)} < a_2.$$

Infine la terza condizione di (4) impone

$$\frac{2}{\pi} \geq a_1 \quad \text{oppure} \quad \frac{2}{\pi} \geq a_2$$

ma poiché la prima si riduce alla

$$\frac{2}{\pi} \geq \frac{6}{\pi} \implies 2 \geq 6,$$

mentre la seconda

$$\frac{2}{\pi} \geq \frac{6}{5\pi} \implies 10 \geq 6,$$

risulta che, tra la coppia (9), solo il valore $a_2 = 6/(5\pi)$ soddisfa a tutte le condizioni.

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

L'orbita della Terra attorno al Sole è una ellisse ϵ per cui, scelto un sistema cartesiano Oxy con gli assi x e y paralleli, rispettivamente, all'asse maggiore (di lunghezza a) e all'asse minore (lunghezza b) di ϵ , posta l'origine O nel suo centro di simmetria, l'equazione della traiettoria è descritta dall'equazione (fig. 1)

$$\epsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

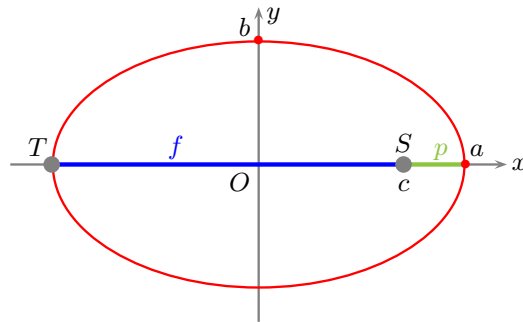


Fig. 1. Traiettoria ellittica della Terra e posizione il 5 luglio nel sistema Oxy .

Posto

$$f = 1,52 \times 10^{11} \text{ m}, \quad p = 1,47 \times 10^{11} \text{ m}, \quad (2)$$

la lunghezza $2a$ dell'asse maggiore è

$$2a = f + p$$

da cui il semiasse

$$a = \frac{f + p}{2} = 1,495 \times 10^{11} \text{ m}. \quad (3)$$

Poiché il Sole occupa uno dei fuochi di ϵ (in fig. 1 il Sole S è posto nel fuoco di ascissa $c > 0$), la sua distanza dall'origine O è

$$\overline{OS} = c = a - p \quad (4)$$

per cui, ricordata la relazione,

$$a^2 - b^2 = c^2$$

che lega i semiassi a e b con l'ascissa c , ne deriva il quadrato della lunghezza del semiasse minore

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (a - p)^2 = 2ap - p^2 = 2,2344 \times 10^{22} \text{ m}^2.$$

Ripresa la (1), il risultato (3) e il precedente, la traiettoria richiesta è

$$\epsilon: \frac{x^2}{(1,495 \times 10^{11})^2} + \frac{y^2}{2,2344 \times 10^{22}} = 1$$

e in definitiva,

$$\epsilon: \frac{x^2}{2,235 \times 10^{22}} + \frac{y^2}{2,2344 \times 10^{22}} = 1.$$

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

La relazione che lega l'apotema a con il raggio R della circonferenza circoscritta ad un esagono (fig. 1) espressa in forma goniometrica è

$$a = R \cos \alpha$$

essendo $\alpha = \pi/6$ in quanto l'esagono regolare è formato da 6 triangoli equilateri. Pertanto la relazione in termini di radicali è

$$a = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1)$$

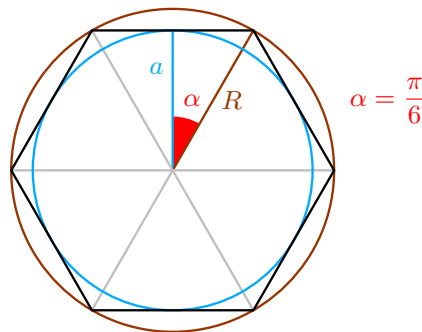


Fig. 1. Esagono regolare e raggi inscritto a e circoscritto R .

Se, come afferma C. E. Gadda la mattonella possiede un raggio $R = 60 \text{ mm} = 6 \text{ cm}$, la precedente relazione fornisce un apotema

$$a = (6 \text{ cm}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5,196 \text{ cm}$$

per cui il valore riportato è corretto.

L'esagono è suddiviso dalle diagonali in 6 triangoli equilateri per cui i suoi angoli interni possiedono un'ampiezza di $\frac{2}{3}\pi = 120^\circ$. Poiché tale valore divide l'angolo giro esattamente in 3 parti, si possono riportare al medesimo vertice tre esagoni (o, equivalentemente, 6 triangoli equilateri) e con tale disposizione formare il nucleo iniziale del ricoprimento del piano (fig. 2).

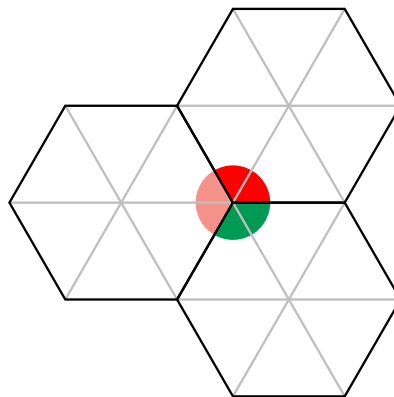


Fig. 2. Ricoprimento con 3 esagoni (ma pure... 6 triangoli equilateri).

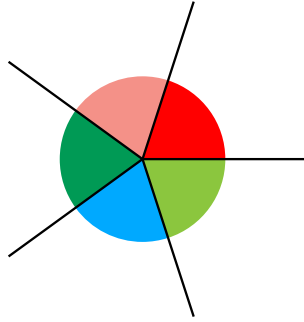


Fig. 3. Tentativo di ricoprimento con 5 pentagoni.

L'esempio delle piastrelle esagonali si può comunque generalizzare nell'ipotesi che, a convergere nello stesso punto, siano i vertici di poligoni regolari congruenti. Nella figura 3 riportiamo, come esempio, la suddivisione in 5 parti dell'angolo piatto ciascuna delle quali rappresenta l'angolo interno, pari a 72° , di un pentagono.

Supponiamo quindi di disporre in tal modo un certo numero k di poligoni regolari congruenti. Supponiamo inoltre che questi poligoni abbiano n lati cosicché saranno composti da n triangoli isosceli aventi al vertice un angolo pari a $2\pi/n$ (nella figura 4 riportiamo come esempio il pentagono dove $n = 5$).

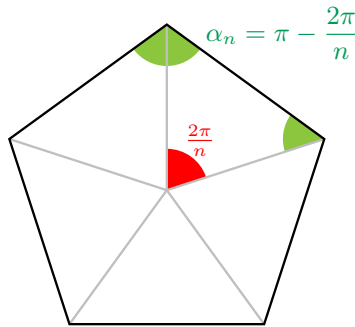


Fig. 4. Angoli interni di un pentagono ($n = 5$).

Ne segue che gli angoli interni, somma degli angoli alla base dei triangoli isosceli componenti, assumono un'ampiezza

$$\alpha_n = \pi - \frac{2\pi}{n} = \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \pi \left(\frac{n-2}{n}\right). \quad (2)$$

Se, come detto, disponiamo nello stesso punto i vertici di k di questi poligoni, i corrispondenti angoli devono ricoprire interamente il piano attorno a tale punto per cui la somma delle loro ampiezze dev'essere pari all'angolo di 2π cioè deve valere l'uguaglianza

$$k \cdot \alpha_n = 2\pi$$

che, per la (2), esplicitiamo in

$$k\pi \left(\frac{n-2}{n}\right) = 2\pi. \quad (3)$$

Semplificata la precedente nella

$$k = \frac{2n}{n-2}, \quad (4)$$

riscriviamo il secondo membro nella forma alternativa

$$k = \frac{2n-4}{n-2} + \frac{4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2} \quad (5)$$

in quanto quest'ultima ci fa comprendere che il rapporto $4/(n-2)$ dev'essere un valore intero per garantire al variare di n che k sia, come n , un numero intero positivo. Per tale motivo il denominatore $n-2$ dev'essere un divisore di 4 e ciò accade solo se

$$n = 3 \implies k = 2 + \frac{4}{3-2} = 6,$$

$$n = 4 \implies k = 2 + \frac{4}{4-2} = 4$$

$$n = 6 \implies k = 2 + \frac{4}{6-2} = 3.$$

In tutti gli altri casi $4/(n-2)$, e quindi k , non sono interi e non potremo ricoprire il piano con i corrispondenti poligoni (regolari e congruenti!).

In corrispondenza dei valori di n trovati sopra, il poligono regolare a tre lati, $n = 3$, è evidentemente il triangolo equilatero per cui, come già notato nella figura 2, potremo disporre 6 triangoli equilateri (fig. 5). I poligoni con $n = 4$ sono dei quadrati e ne possiamo disporre 4 (fig. 6). Infine, se $n = 3$ ritroviamo il caso delle piastrelle ossia, 3 esagoni (fig. 2).

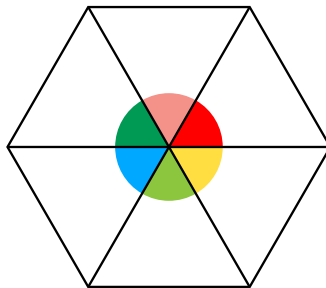


Fig. 5. Sei triangoli equilateri.

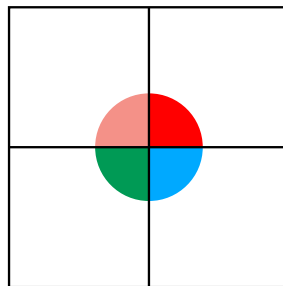


Fig. 6. Quattro quadrati.

ESAME 2025

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

• Problema n. 1

«La ragione non è nulla senza l'immaginazione» - Cartesio

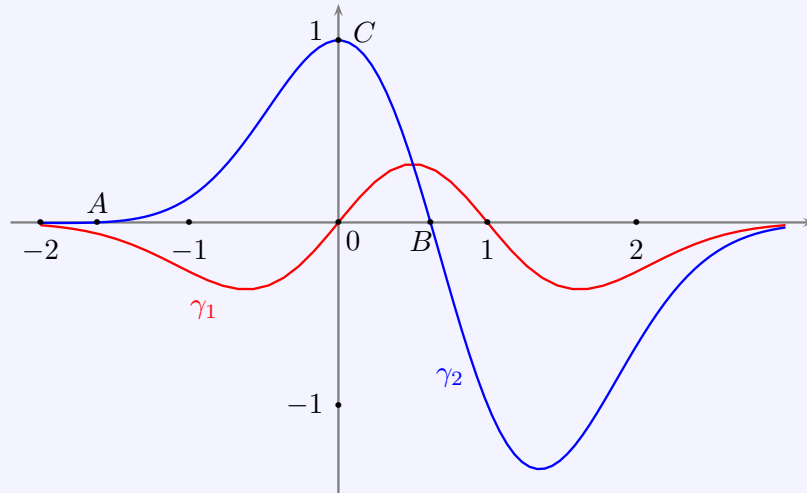
Dati $r > 0$ e $k < 0$, si considerino la circonferenza C_r , di centro l'origine e raggio r , e la funzione $f_k(x) = k|x|$.

- Verificare che f_k è continua ma non derivabile in $x = 0$ qualunque sia il valore di k . Individuare i due valori di r in corrispondenza dei quali C_r delimita con il grafico di f_k , per opportuni valori di k , un settore circolare nel semipiano $y \leq 0$ di area π e contorno di lunghezza $4 + \pi$. Stabilito che $r = 2$ è il maggiore di tali valori, in uno stesso riferimento cartesiano Oxy , tracciare la circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1} .
- Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a; b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h . Qual è l'espressione analitica di h ?
- Sia A un punto del grafico di g , situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.
- Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4 - t^2} dt$, con $x \in [-2; 2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F , dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

Soluzione

• **Problema n. 2**

«La bellezza è mescolare, in giuste proporzioni, il finito e l'infinito» - attribuita a Platone



I grafici γ_1 e γ_2 rappresentano, rispettivamente, le funzioni f e g , definite su \mathbb{R} , le cui espressioni analitiche sono

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di secondo grado.

- Determinare i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ utilizzando le informazioni deducibili dai grafici in figura, considerando che $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa di un punto stazionario di f e che $-\phi$, ascissa del punto A , è uno zero di g .
- Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1 . Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k , il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
- Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\phi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2 , rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2 .
- Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1 , γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente ad R .

Soluzione

Quesiti

1. Dato un triangolo ABC , sia M il punto medio del lato BC e siano B' e C' due punti, rispettivamente, sul lato AB e sul lato AC , in modo tale che $AB' = \frac{1}{3}AB$ e $AC' = \frac{1}{3}AC$. Dimostrare che, se i segmenti MB' e MC' sono tra loro congruenti, allora lo sono anche i lati AB e AC .

Soluzione

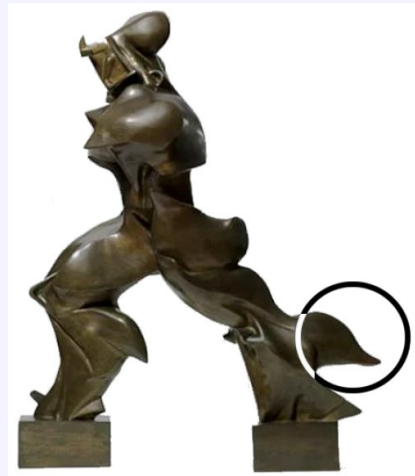
2. Si considerino la superficie sferica di equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ e il piano π di equazione $x - 2y - 2z + d = 0$. Discutere, al variare del parametro reale d , se il piano π è secante, tangente o esterno alla superficie sferica. Determinare il valore del parametro d in modo che π divida la sfera in due parti uguali.

Soluzione

3. L'opera futurista di Boccioni "Forme uniche della continuità nello spazio" del 1913, riportata sulla moneta da 20 centesimi, descrive un uomo che avanza velocemente nello spazio. Una parte del profilo evidenziato in figura, in un opportuno sistema di riferimento, può essere approssimato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Tracciare il grafico di f , dopo averne analizzato la continuità e la derivabilità nell'intervallo $[-1; 2]$.



Soluzione

4. Assegnata una funzione g , derivabile in \mathbb{R} e tale che $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, determinare l'equazione della retta normale alla curva $y = g(x) \sin^2 x$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$.

Soluzione

5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che le due curve $y = e^x$, $y = 6 - ke^{-x}$ risultino tangenti tra loro, individuando le coordinate del punto di contatto.

Soluzione

6. Scrivere una funzione polinomiale f in modo tale che la retta di equazione $y = 2x + 3$ sia tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 e si abbia $\int_0^3 f(x) dx = 9$.

Soluzione

7. Siccome mi sembrava che per puro caso alcuni fatti fossero avvenuti così com'erano stati predetti dagli indovini, tu hai parlato a lungo del caso, e hai detto, per esempio, che si può ottenere il "colpo di Venere" lanciando a caso quattro dadi [...].

Cicerone, De divinatione, II, 21, 48 - traduzione e cura di S. Timpanaro, Garzanti, Milano 1999.

Testo originale - *Nam cum mihi quaedam casu viderentur sic evenire ut praedicta essent a divinantibus, dixisti multa de casu, ut Venerium iaci posse casu quattuor talis iactis [...].*

Cicerone, nel dialogo con il fratello Quinto, parla del colpo di Venere, che consiste nel lanciare 4 dadi a 4 facce ottenendo 4 risultati diversi. Supponendo che le facce di ciascun dado siano equiprobabili, determinare:

- la probabilità di ottenere il colpo di Venere nel lancio di 4 dadi;
- la probabilità di ottenere 4 numeri tutti uguali.

Soluzione

8. Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "STUDIARE"? In quanti di tali anagrammi si può leggere consecutivamente la parola "ARTE", come ad esempio in "SUARTEDI"?

Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "VACANZA"?

Soluzione

Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

Sono assegnate la circonferenza C_r di centro l'origine $O(0, 0)$ e raggio $r > 0$ rappresentata dall'equazione

$$C_r: x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0 \quad (1)$$

e la funzione a valori negativi o nulli

$$f_k: f_k(x) = k|x|, \quad k < 0. \quad (2)$$

a) La verifica della continuità di $f_k(x)$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sebbene non richiesta, è immediata in quanto la sua espressione analitica

$$f_k(x) = kx \quad \text{se } x > 0, \quad f_k(x) = -kx \quad \text{se } x < 0$$

rientra nelle funzioni polinomiali che sono continue per ogni valore reale. Per $x = 0$ va invece studiato il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} k|x|,$$

limite che si suddivide nei due parziali

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (kx) = k \cdot 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (-kx) = -k \cdot 0 = 0,$$

entrambi nulli in quanto l'argomento di ciascuno è ora una funzione continua. Poiché il valore di f_k è uguale al limite sopra, $f_k(0) = k|0| = 0$, possiamo concludere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k|x| = k|x_0| \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad k < 0.$$

Per dimostrare la non derivabilità in $x = 0$ di f_k studiamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_k(0+h) - f_k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k|0+h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{k|h|}{h} \right) \quad (3)$$

e dividendolo nei limiti destro e sinistro risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{kh}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} k = k, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{-kh}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-k) = -k.$$

Essendo questi diversi non esiste il limite del rapporto (3) e la funzione non è derivabile in $x = 0$.

Il grafico di C_r è noto mentre quello di f_k deriva immediatamente dalla sua riscrittura come

$$f_k: \begin{cases} kx, & x \geq 0 \\ -kx, & x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Esso è quindi costituito dall'unione di due semirette uscenti dall'origine O con coefficienti angolari $\pm k$ (fig. 1).

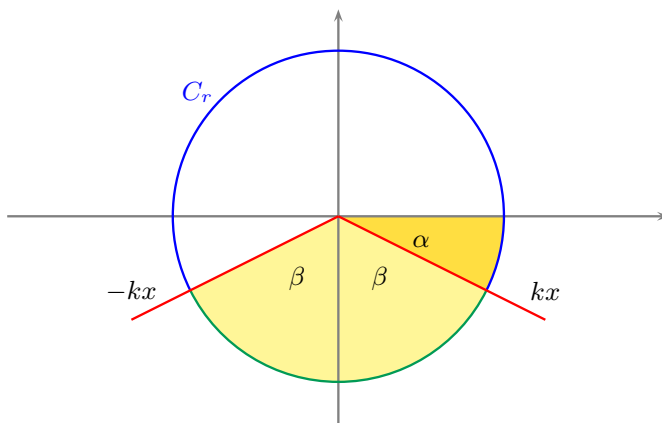


Fig. 1. Grafici di C_r e f_k .

Poiché l'angolo α della semiretta $f_k(x) = kx$ è collegato al coefficiente angolare k dalla

$$\operatorname{tg} \alpha = k \quad \implies \quad \alpha = \arctan(k), \quad \text{con } \alpha < 0, \quad (5)$$

l'ampiezza 2β (fig. 1) in radianti del settore richiesto dal testo è

$$2\beta = 2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \pi + 2\arctan(k) \quad \implies \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \arctan(k). \quad (6)$$

Ne segue l'area del settore

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} (2\beta) r^2 = \beta r^2 = \frac{\pi r^2}{2} + r^2 \arctan(k) \quad (7)$$

mentre la lunghezza l dell'arco di circonferenza risulta

$$l = (2\beta)r = \pi r + 2r \arctan(k) \quad (8)$$

Poiché il testo specifica la lunghezza del contorno del settore, dobbiamo sommare $2r$ alla lunghezza del solo arco, per cui le due condizioni sono

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \pi \\ l + 2r = 4 + \pi \end{cases}$$

e formano il sistema

$$\begin{cases} \frac{\pi r^2}{2} + r^2 \arctan(k) = \pi \\ \pi r + 2r \arctan(k) + 2r = 4 + \pi \end{cases} \quad (9)$$

nelle incognite r e k .

Per risolverlo ricaviamo dalla prima

$$\arctan(k) = \frac{\pi}{r^2} - \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

e sostituendola nella seconda

$$\pi r + 2r \left(\frac{\pi}{r^2} - \frac{\pi}{2} \right) + 2r = 4 + \pi \implies \pi r + \frac{2\pi}{r} - \pi r + 2r = 4 + \pi$$

dalla quale moltiplicando per r i due membri giungiamo all'equazione di II grado

$$2r^2 - r(4 + \pi) + 2\pi = 0. \quad (11)$$

Le sue soluzioni sono

$$r_{1,2} = \frac{(4 + \pi) \pm \sqrt{16 + \pi^2 + 8\pi - 16\pi}}{4} = \frac{(4 + \pi) \pm (4 - \pi)}{4} = \begin{cases} 2 \\ \pi/2 \end{cases} \quad (12)$$

cui corrispondono, per la (10)

$$r_1 = 2 \implies \arctan(k_1) = -\frac{\pi}{4} \implies k_1 = -1 \quad (13)$$

$$r_2 = \frac{\pi}{2} \implies \arctan(k_2) = \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{2} \implies k_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{8 - \pi^2}{2\pi}\right). \quad (14)$$

Riprendendo quanto già svolto in generale, riportiamo in figura 2 i grafici di C_2 e f_{-1} .

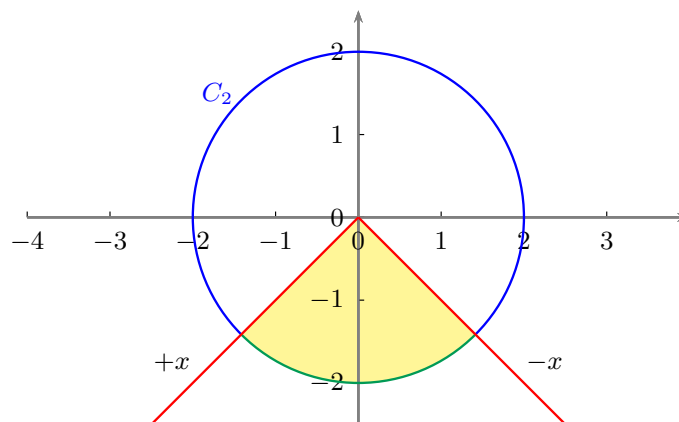


Fig. 2. Grafici di C_2 e f_{-1} .

b) La funzione

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad (15)$$

riscritta come

$$y = \sqrt{4 - x^2} \implies \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 4 - x^2 \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 4$$

rappresenta evidentemente la semicirconferenza appartenente al semipiano delle ordinate positive o nulle di C_2 . Il suo dominio è l'intervallo $[-2, 2]$ mentre il codominio o insieme immagine è $[0, 2]$. Possiede una simmetria pari in quanto

$$g(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = g(x), \quad \forall x \in [-2, 2]$$

e possiamo aspettarci che essa non sia derivabile nei punti estremi ossia in $x = \pm 2$. Per dimostrarlo studiamo il limite sinistro del rapporto incrementale che, per la simmetria rispetto all'asse y , equivale al limite destro in $x = -2$. Pertanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4 - (2+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-h^2 - 4h}}{h}.$$

Essendo $h < 0$ riscriviamo l'ultima espressione come

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{h^2(-1 - 4/h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} \sqrt{-1 - \frac{4}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\sqrt{-1 - \frac{4}{h}} \right)$$

e poiché il limite dell'argomento della radice

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-1 - \frac{4}{h} \right) = +\infty,$$

ne deriva pure per il rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = -\infty.$$

Pertanto non essendo finito, non esiste in $x = 2$ la derivata sinistra di g e, per simmetria, pure quella destra in $x = -2$.

Gli intervalli di monotonia di g deducibili già dalla conoscenza del grafico 2, si ottengono dallo studio del segno della sua derivata prima

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

che risulta essere positiva in $] -2, 0[$ e negativa in $] 0, 2[$. Ne segue che g è crescente in $] -2, 0[$ e decrescente in $] 0, 2[$. La funzione g non è quindi monotona e pertanto non è invertibile in $[-2, 2]$. Se comunque consideriamo separatamente i sottoinsiemi del dominio $[-2, 0[$ o $] 0, 2]$, in ciascuno di questi è monotona, nel primo crescente e nel secondo, decrescente. Gli intervalli di ampiezza massima nei quali una restrizione di g ammette una funzione

inversa h sono quindi $[-2, 0[$ o, in alternativa, $[0, 2]$. Scegliendo il secondo intervallo in quanto si chiede che l'estremo superiore dell'intervallo sia positivo ($b > 0$), l'espressione analitica di h si ottiene risolvendo l'equazione nella variabile dipendente x

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases} \implies y^2 = 4 - x^2 \implies x = \sqrt{4 - y^2}$$

e quindi

$$h(y) = \sqrt{4 - y^2}, \quad y \in [0, 2],$$

mentre scegliendo il primo intervallo (pur non richiesto), l'espressione analitica di h è

$$\begin{cases} 0 \leq y < 2 \\ -2 \leq x < 0 \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases} \implies y^2 = 4 - x^2 \implies x = -\sqrt{4 - y^2}$$

e quindi

$$h(y) = -\sqrt{4 - y^2}, \quad y \in [0, 2[.$$

c) Sia A un punto del grafico di g situato nel I quadrante con coordinate

$$A(x, y) \quad \text{con} \quad x \in [0, 2], \wedge y = \sqrt{4 - x^2}. \quad (16)$$

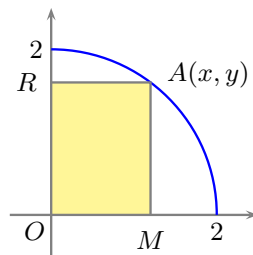


Fig. 3. Grafico di g nel I quadrante, punto A e sue proiezioni.

Le proiezioni ortogonali di A sugli assi del riferimento sono $M(x, 0)$ e $R(0, y)$ (fig. 3) per cui le lunghezze dei segmenti con estremo l'origine sono

$$\overline{OM} = x, \quad \overline{OR} = y = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (17)$$

e il quadrilatero $AMOR$ ha area

$$\mathcal{A}_{AMOR} = \overline{OM} \cdot \overline{OR} = x \cdot y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad (18)$$

quadrilatero che si annulla agli estremi $x = 0$ e in $x = 2$ mentre risulta positivo nei rimanenti valori. Per determinare il punto di massimo dell'area studiamo il segno della sua derivata prima

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_{AMOR} &= \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \right) \\ &= \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}. \end{aligned}$$

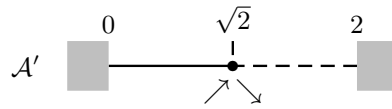


Fig. 4. Segno di \mathcal{A}' e crescita/decrecenza di \mathcal{A} .

Questa derivata è positiva o nulla nell'intervallo

$$\mathcal{A}' \geq 0 \implies 4 - 2x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 2 \implies 0 \leq x \leq \sqrt{2} \quad (19)$$

per cui la funzione (18) è crescente in $[0, \sqrt{2}]$ e decrescente in $]\sqrt{2}, 2]$, con punto di massimo assoluto in $x_M = \sqrt{2}$ (fig. 4).

Ne seguono da (16) le coordinate dei vertici

$$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad M(\sqrt{2}, 0), \quad R(0, \sqrt{2})$$

per cui le lunghezze dei lati del quadrilatero di area massima sono

$$\overline{OR} = \overline{OM} = \sqrt{2}$$

e il quadrilatero $AMOR$ è un quadrato.

Per dimostrare che esso è anche quello di perimetro massimo, osserviamo che il perimetro del quadrilatero è dato in generale da $2p = 2(\overline{OM} + \overline{OR})$ per cui, riprese le lunghezze (17) abbiamo

$$2p = 2\left(x + \sqrt{4 - x^2}\right) \quad 0 \leq x \leq 2. \quad (20)$$

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$2p' = 2 - \frac{2x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2\sqrt{4 - x^2} - 2x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

e questa è positiva o nulla se

$$\sqrt{4 - x^2} - x \geq 0.$$

Ne discende

$$\sqrt{4 - x^2} \geq x \implies 4 - x^2 \geq x^2 \implies x^2 \leq 2$$

con soluzioni $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ e quindi il segno di questa derivata è del tutto simile a quanto già trovato per l'area \mathcal{A} (fig. 4). L'ascissa del massimo è, pure in questo caso, $x_M = \sqrt{2}$ e A possiede ancora le coordinate $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

d) È assegnata la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4 - t^2} dt, \quad x \in [-2, 2]. \quad (21)$$

Il suo valore in $x = 2$ si ottiene calcolando formalmente l'integrale definito

$$F(2) = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - t^2} dt$$

ma, per quanto già esposto sulla funzione g , $F(2)$ rappresenta l'area della semicirconferenza di raggio $r = 2$ e il suo calcolo è immediato per cui

$$F(2) = \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi. \tag{22}$$

Lo studio della monotonia implica determinare il segno di $F'(x)$ che, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, coincide con l'integrando calcolato nell'estremo superiore x

$$F'(x) = \sqrt{4 - x^2}. \tag{23}$$

Poiché

$$\sqrt{4 - x^2} > 0 \implies 4 - x^2 > 0 \implies -2 < x < 2,$$

mentre

$$F'(x) = 0 \implies \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad x = \pm 2,$$

segue che la funzione F è crescente in $[-2, 2]$ e presenta agli estremi $x = \mp 2$ due punti stazionari di minimo e massimo assoluti.

La determinazione delle concavità di F richiede invece lo studio del segno di $F''(x)$ per cui, dalla (23), otteniamo

$$F''(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \tag{24}$$

e poiché

$$F''(x) > 0 \implies -x > 0 \implies x < 0,$$

mentre

$$F''(x) < 0 \implies -x < 0 \implies x > 0,$$

segue che la funzione F è convessa in $[-2, 0[$ e concava in $]0, 2]$, con punto di flesso in $x = 0$ dove $F''(0) = 0$ (fig. 5).

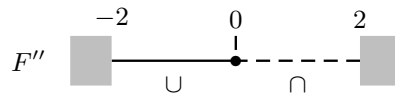


Fig. 5. Segno di F'' e concavità/convessità di F .

Se $Q(0, F(0))$ è il punto di flesso di F , la retta tangente al grafico di F in Q è data dall'equazione

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0) \tag{25}$$

e per determinarla dobbiamo calcolare $F(0)$ e $F'(0)$. Il primo valore si ricava formalmente dall'integrale definito

$$F(0) = \int_{-2}^0 \sqrt{4 - t^2} dt$$

ma data la precedente conoscenza di g , quest'ultimo rappresenta l'area di un quarto di circonferenza di raggio $r = 2$: ne deriva

$$F(0) = \frac{\pi r^2}{4} = \pi. \tag{26}$$

$F'(0)$ si ottiene invece dalla (23) e risulta essere

$$F'(0) = \sqrt{4 - 0^2} = 2. \quad (27)$$

Pertanto l'equazione della retta tangente al grafico di F in $Q(0, \pi)$ è

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0) \implies y - \pi = 2x \implies y = 2x + \pi. \quad (28)$$

Riportiamo infine nella figura 6 i grafici di F e della retta tangente in Q .

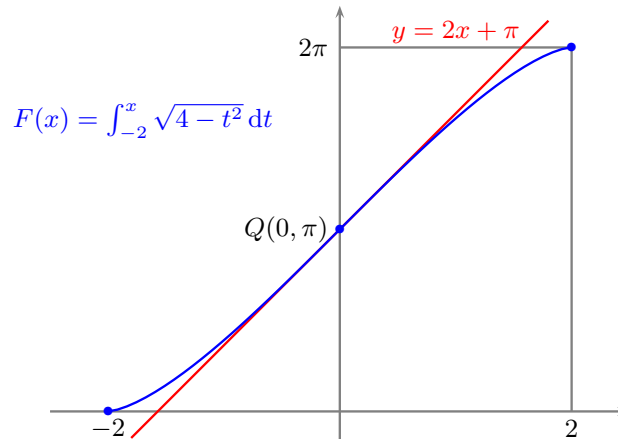


Fig. 6. Grafici di F e della retta tangente in Q .

Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

a) Le funzioni f e g

$$f(x) = p(x)e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x)e^{p(x)}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

sono rappresentate dai grafici γ_1 e γ_2 in figura 1.

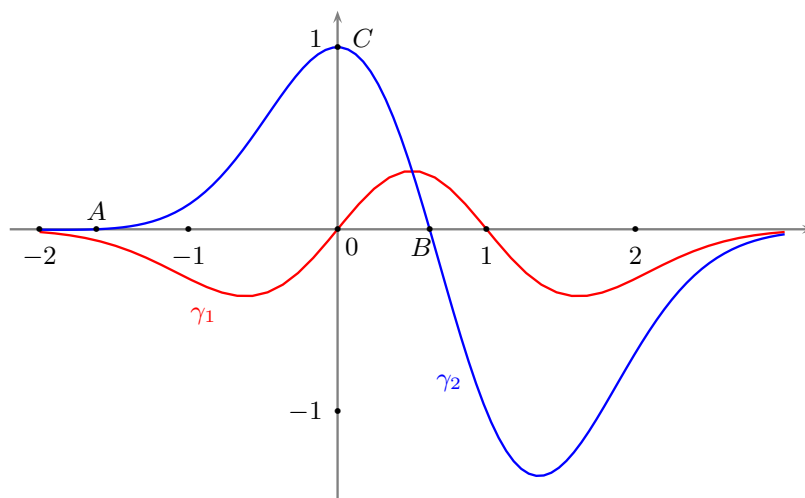


Fig. 1. Grafici γ_1 e γ_2 delle funzioni f e g .

Per determinare le espressioni analitiche dei polinomi p e q scriviamo innanzitutto questi come

$$p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \quad (2)$$

e osservando γ_1 , possiamo individuare le sue due intersezioni con l'asse x e quindi imporre le condizioni sulla f

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

Poiché il fattore esponenziale non è nullo, dev'essere

$$\begin{aligned} p(0) = a_1(0)^2 + b_1(0) + c_1 = 0, & \implies c_1 = 0, \\ p(1) = a_1(1)^2 + b_1(1) + c_1 = a_1 + b_1 = 0 & \implies b_1 = -a_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Pertanto

$$p(x) = a_1x^2 - a_1x = a_1x(x - 1). \quad (4)$$

Poiché $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto stazionario di f la derivata prima di f deve annullarsi in corrispondenza di ϕ

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left[(a_1x^2 - a_1x)e^{(a_1x^2 - a_1x)}\right] \\ &= (2a_1x - a_1)e^{(a_1x^2 - a_1x)} + (a_1x^2 - a_1x)(2a_1x - a_1)e^{(a_1x^2 - a_1x)} \\ &= a_1(2x - 1)(1 + a_1x^2 - a_1x)e^{(a_1x^2 - a_1x)} \end{aligned}$$

e quindi se $f'(\phi) = 0$ deve essere nullo il fattore di secondo grado

$$a_1\phi^2 - a_1\phi + 1 = 0 \quad (5)$$

dal quale deriviamo

$$a_1 = -\frac{1}{\phi^2 - \phi}. \quad (6)$$

Sostituendo il valore della sezione aurea ϕ otteniamo

$$a_1 = -\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = -\frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = -\frac{1}{1} = -1$$

e quindi, ripresa la (4), il polinomio cercato è

$$p(x) = -x^2 + x. \quad (7)$$

In alternativa al precedente calcolo esplicito si può ricordare la relazione cui soddisfa la sezione aurea che è proprio

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \quad (8)$$

in quanto soluzione della equazione

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Dalla (8) è immediato ricavare $\phi^2 - \phi = 1$ e quindi ottenere dalla (6), $a_1 = -1$.

Per determinare i coefficienti del polinomio q osserviamo che, in figura 1 g interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, 1)$ e quindi, ripresa la (2), la condizione $g(0) = 1$ comporta

$$[a_2(0)^2 + b_2(0) + c_2]e^{p(0)} = 1 \implies c_2 e^0 = 1 \implies c_2 = 1.$$

Inoltre, sempre in $x = 0$, la g presenta un massimo assoluto proprio, cosicché la sua derivata prima dev'essere nulla. Ne deriva

$$\begin{aligned} g'(x) &= D[(a_2x^2 + b_2x + 1)e^{p(x)}] \\ &= (2a_2x + b_2)e^{p(x)} + (a_2x^2 + b_2x + 1)(-2x + 1)e^{p(x)} \\ &= [2a_2x + b_2 + (a_2x^2 + b_2x + 1)(-2x + 1)]e^{p(x)} \end{aligned} \quad (9)$$

essendo $D(-x^2 + x) = -2x + 1$. La condizione $g'(0) = 0$ comporta l'annullarsi del primo fattore

$$2a_2(0) + b_2 + [a_2(0)^2 + b_2(0) + 1][-2(0) + 1] = 0 \implies b_2 + 1 = 0$$

da cui otteniamo $b_2 = -1$.

Poiché $A(-\phi, 0) \in \gamma_2$ è uno zero di g , ne segue che $g(-\phi) = 0$ e quindi

$$(a_2\phi^2 - b_2\phi + 1)e^{p(-\phi)} = 0 \implies a_2\phi^2 - b_2\phi + 1 = 0, \quad (10)$$

sostituendo $b_2 = -1$ nella precedente, otteniamo

$$a_2\phi^2 + \phi + 1 = 0 \implies a_2 = -\frac{1 + \phi}{\phi^2}.$$

Poiché dalla (8) deriva $\phi^2 = 1 + \phi$, a_2 assume il valore $a_2 = -1$ e quindi il polinomio cercato è

$$q(x) = -x^2 - x + 1. \quad (11)$$

b) Lo studio della funzione

$$f(x) = (-x^2 + x)e^{-x^2+x} \quad (12)$$

di dominio \mathbb{R} risulta positiva o nulla nell'intervallo

$$f(x) \geq 0 \implies -x^2 + x \geq 0 \implies -x(x - 1) \geq 0 \implies 0 \leq x \leq 1.$$

L'asintoto orizzontale lo si individua risolvendo il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^2 + x)e^{-x^2+x} \quad (13)$$

ma, essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2+x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0,$$

obbliga ad un ulteriore approfondimento in quanto indeterminato del tipo $0 \cdot \infty$.
Riscriviamo la funzione ad argomento di (13) come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + x}{e^{x^2-x}}$$

e analizziamo l'eventuale applicabilità del teorema di De L'Hôpital in quanto così scritto e per il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x^2-x} = +\infty,$$

può rientrare nelle sue ipotesi. Calcolate le derivate prime del numeratore e del denominatore

$$D(-x^2 + x) = -2x + 1, \quad D(e^{x^2-x}) = e^{x^2-x}(2x - 1)$$

il limite del loro rapporto è

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x + 1}{e^{x^2-x}(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{e^{x^2-x}} \right).$$

Poiché quest'ultimo esiste e risulta

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{e^{x^2-x}} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^t} \right) = 0$$

diviene applicabile il teorema di De L'Hôpital e possiamo affermare per il limite (13)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

cosicché $y = 0$ è l'equazione dell'asintoto orizzontale di f .

Il calcolo della derivata prima di f dà

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left[(-x^2 + x)e^{-x^2+x}\right] \\ &= (-2x + 1)e^{-x^2+x} + (-x^2 + x)(-2x + 1)e^{-x^2+x} \end{aligned}$$

e quindi

$$f'(x) = (1 - 2x)(1 - x^2 + x)e^{-x^2+x}. \quad (14)$$

Poiché $e^{-x^2+x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, lo studio del segno di f' si riduce a quello dei fattori $(1 - 2x)$ e $(1 - x^2 + x)$. Il primo fattore è positivo o nullo se

$$1 - 2x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2},$$

mentre il secondo fattore è positivo o nullo se

$$1 - x^2 + x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x - 1 \leq 0.$$

Poiché l'equazione

$$x^2 - x - 1 = 0$$

è quella che definisce la sezione aurea ϕ e l'opposto del suo reciproco, (8), le sue soluzioni sono

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = -\frac{1}{\phi}$$

e quindi il secondo fattore di (14) è positivo o nullo nell'insieme $-1/\phi \leq x \leq \phi$. Riportando i risultati ottenuti in un unico grafico (fig. 2) ne deriva che

$$\begin{aligned} f & \text{ è crescente in } & -\frac{1}{\phi} < x < \frac{1}{2} & \vee & x > \phi, \\ f & \text{ è decrescente in } & x < -\frac{1}{\phi} & \vee & \frac{1}{2} < x < \phi. \end{aligned}$$

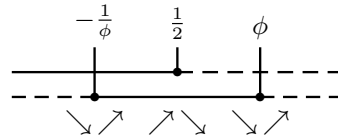


Fig. 2. Segno dei fattori di f' e crescita/decrescenza di f .

Presenta inoltre due minimi in corrispondenza delle ascisse $x_1 = -1/\phi$ e $x_2 = \phi$ le cui ordinate discendono dal calcolo del fattore $-x^2 + x$ di f . Poiché questo assume lo stesso valore in

$$x_1 = \frac{1}{\phi} \implies -\left(-\frac{1}{\phi}\right)^2 - \frac{1}{\phi} = -\frac{1+\phi}{\phi^2} = -1$$

e, sempre sfruttando la relazione (8), in

$$x_2 = \phi \implies -\phi^2 + \phi = -1,$$

ne deriva che i minimi di f sono entrambi uguali a $-e^{-1}$. La funzione f presenta inoltre in $x = \frac{1}{2}$ un punto di massimo relativo avente ordinata

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

e quindi f assume in $x = \frac{1}{2}$ il valore

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} \approx 0.3210.$$

Per determinare il punto di flesso eseguiamo il calcolo della derivata seconda riscrivendo la derivata prima come

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - x + 1)e^{-x^2+x}. \quad (15)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} f''(x) &= (6x^2 - 6x - 1)e^{-x^2+x} + (2x^3 - 3x^2 - x + 1)(-2x + 1)e^{-x^2+x} \\ &= (6x^2 - 6x - 1 - 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 2x + 2x^3 - 3x^2 - x + 1)e^{-x^2+x} \\ &= -x(4x^3 - 8x^2 - 5x + 9)e^{-x^2+x}. \end{aligned}$$

Poiché $e^{-x^2+x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, lo studio del segno di f'' si riduce a considerare il fattore $-x \geq 0$ risolto da

$$x \leq 0$$

e il polinomio di terzo grado

$$4x^3 - 8x^2 - 5x + 9 \geq 0.$$

Quest'ultimo si annulla per $x = 1$ per cui è possibile scomporlo con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 1 & 4 & -8 & -5 & 9 & \\ & & 4 & -4 & -9 & \\ \hline & 4 & -4 & -9 & 0 & \end{array}$$

e ottenere

$$4x^3 - 8x^2 - 5x + 9 = (x - 1)(4x^2 - 4x - 9) \geq 0.$$

Siccome l'equazione

$$4x^2 - 4x - 9 = 0$$

è risolta per

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 36}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2} = x_{1,2}$$

la disequazione corrispondente ammette come soluzioni

$$4x^2 - 4x - 9 \geq 0 \implies x \leq x_1 \quad \vee \quad x \geq x_2.$$

Combinando i segni dei due fattori e di $x \geq 1$, abbiamo (fig. 3)

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\implies x_2 < x < 0 \quad \vee \quad 1 < x < x_1 \\ f''(x) < 0 &\implies x < x_2 \quad \vee \quad 0 < x < 1 \quad \vee \quad x > x_1. \end{aligned}$$

Ne segue che f è concava in $]-\infty, x_2[$, $]0, 1[$ e $]x_1, +\infty[$ mentre è convessa in $]x_2, 0[$ e $]1, x_1[$, con punti di flesso in $x = 0$, $x = 1$, $x = x_1$ e $x = x_2$.

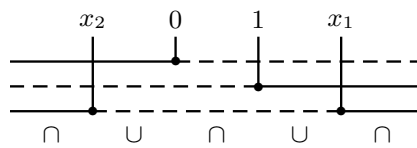


Fig. 3. Segno dei fattori di f'' e concavità di f .

In figura 4 riportiamo il grafico di f con i suoi estremi e punti di flesso.

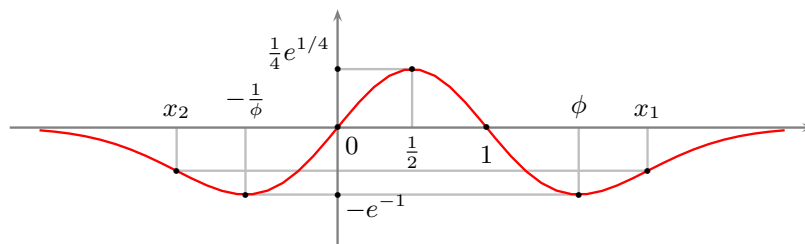


Fig. 4. Grafico della funzione f con estremi e punti di flesso.

Per dimostrare la simmetria assiale di f rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$ ricordiamo le equazioni che descrivono una tale simmetria rispetto alla retta $x = a$ ossia

$$\begin{cases} \frac{x' + x}{2} = a \\ y' = y \end{cases} \implies \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y, \end{cases}$$

che, nel caso $a = \frac{1}{2}$, sono

$$\begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = y. \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - x' \\ y = y'. \end{cases}$$

Sostituite nella funzione riscritta come

$$y = (-x^2 + x)e^{-x^2+x} \quad (16)$$

implicano

$$y' = [-(1 - x')^2 + (1 - x')]e^{-(1-x')^2+(1-x')}$$

ed eseguendo il calcolo discende

$$y' = [-(x')^2 + x']e^{-(x')^2+x'}$$

e l'equazione rappresentativa della simmetrica di f coincide con la (16) cosicché se $(x, y) \in \gamma_1$ pure $(x', y') \in \gamma_1$: f è quindi simmetrica rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$. Per lo studio fatto finora l'insieme immagine di f è dato dall'intervallo

$$\text{Codominio}(f) = \left[-e^{-1}, \frac{1}{4}e^{1/4} \right]$$

per cui interpretando l'equazione $f(x) = k$ come il sistema

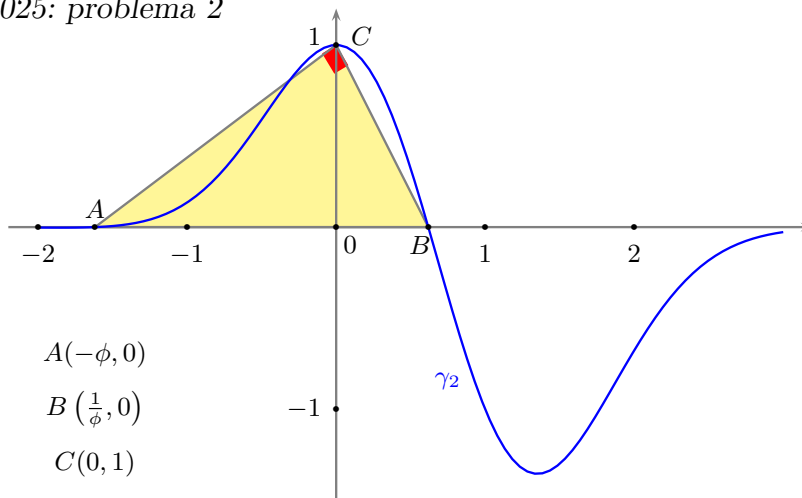
$$\begin{cases} y = (-x^2 + x)e^{-x^2+x} \\ y = k \end{cases}$$

dove $y = k$ rappresenta un fascio di rette parallele all'asse x , possiamo affermare che il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ risulta:

- 2 coincidenti (cioè con molteplicità 2) ed uguali a $\frac{1}{2}$, se $k = \frac{1}{4}e^{1/4}$;
- 2 distinte se $0 \leq k < \frac{1}{4}e^{1/4}$;
- 4 distinte se $-e^{-1} < k < 0$;
- 2 coincidenti uguali a ϕ e 2 coincidenti uguali a $-1/\phi$ se $k = -e^{-1}$.
- nessuna soluzione se $k < -e^{-1}$ o $k > \frac{1}{4}e^{1/4}$;

c) Se, come trovato in (11),

$$g(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x^2+x} \quad (17)$$

Fig. 5. Grafico della funzione g e triangolo ABC .

allora i suoi zeri sono

$$g(x) = 0 \implies -x^2 - x + 1 = 0 \implies x^2 + x - 1 = 0$$

e quindi

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies x_B = \frac{1}{\phi}, \quad x_A = -\phi.$$

Pertanto $A(-\phi, 0)$, $B\left(\frac{1}{\phi}, 0\right)$ e $C(0, 1)$.

Poiché il coefficiente angolare della retta AC è

$$m_{AC} = \frac{1-0}{0-(-\phi)} = \frac{1}{\phi}$$

e quello della retta BC è

$$m_{BC} = \frac{1-0}{0-\frac{1}{\phi}} = -\phi,$$

segue che le rette AC e BC sono perpendicolari in quanto il prodotto dei rispettivi coefficienti angolari è

$$m_{AC} \cdot m_{BC} = -1.$$

I grafici delle funzioni f e g si intersecano nel punto soluzione dell'equazione

$$f(x) = g(x) \implies (-x^2 + x)e^{-x^2+x} = (-x^2 - x + 1)e^{-x^2+x}$$

da cui

$$-x^2 + x = -x^2 - x + 1 \implies 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}$$

e quindi f e g si intersecano nell'unico punto $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}e^{1/4}\right)$.

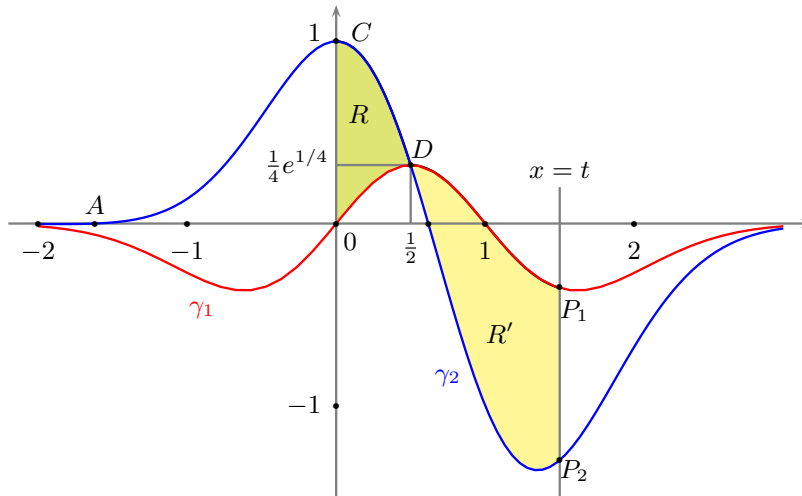


Fig. 6. Grafici delle funzioni f e g e regioni coinvolte nel testo.

Detta t l'ascissa comune dei punti P_1 e P_2 di intersezione tra la retta $x = t$ e le curve γ_1 e γ_2 (fig. 6), per determinare il valore massimo della lunghezza $l = \overline{P_1 P_2}$ pari alla differenza tra le ordinate di P_1 e P_2 , va studiata la funzione

$$\begin{aligned}
 l &= \overline{P_1 P_2} = |f(t) - g(t)| = f(t) - g(t) \\
 &= (-t^2 + t)e^{-t^2+t} - (-t^2 - t + 1)e^{-t^2+t} \\
 &= [(-t^2 + t) - (-t^2 - t + 1)]e^{-t^2+t} \\
 &= (2t - 1)e^{-t^2+t}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Calcolando la derivata prima

$$l' = 2e^{-t^2+t} + (2t - 1)(-2t + 1)e^{-t^2+t},$$

ne studiamo il segno

$$l' = (-4t^2 + 4t + 1)e^{-t^2+t} \geq 0$$

e risolta l'equazione associata

$$-4t^2 + 4t + 1 = 0 \implies t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-4} = \frac{1 \mp \sqrt{2}}{2},$$

abbiamo

$$l' \geq 0 \implies \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2},$$

segno che rappresentiamo in figura 7.

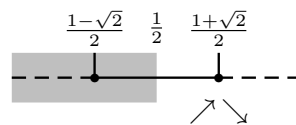


Fig. 7. Segno della derivata prima l' e crescita/decrecenza di l .

Considerato che dev'essere $t \geq \frac{1}{2}$ il massimo di l è raggiunto in $t = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ e, sostituendo tale valore nella (18) la lunghezza massima

$$l_{max} = \left[2 \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) - 1 \right] e^{-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} e^{-\frac{1}{4}}.$$

d) Il calcolo della regione R delimitata dalle curve γ_1 e γ_2 e dall'asse delle coordinate (fig. 6) si riduce a quello dell'integrale

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^{\frac{1}{2}} [g(x) - f(x)] dx$$

in quanto $g(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Sostituendo le espressioni di f e g otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= \int_0^{\frac{1}{2}} [(-x^2 - x + 1)e^{-x^2+x} - (-x^2 + x)e^{-x^2+x}] dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)e^{-x^2+x} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Posto $t = -x^2 + x$ l'integrale indefinito fornisce le primitive

$$\int e^t dt = e^t + c$$

e quindi inserite nella (19) deduciamo

$$\mathcal{A}(R) = \left[e^{-x^2+x} \right]_0^{1/2} = e^{\frac{1}{4}} - 1. \quad (20)$$

L'area della regione compresa tra i grafici di g e f e la retta $x = t$ è rappresentata (può essere rappresentata, v. nota) dall'integrale

$$\mathcal{A}(R') = \int_{1/2}^t [g(x) - f(x)] dx \quad t \geq \frac{1}{2}$$

e quindi ha per integrando l'opposto del precedente (19)

$$\mathcal{A}(R') = - \int_{1/2}^t (1 - 2x)e^{-x^2+x} dx. \quad (21)$$

Poiché una sua primitiva è e^{-x^2+x} l'integrale $\mathcal{A}(R')$ è dato dalla differenza

$$\mathcal{A}(R') = - \left[e^{-x^2+x} \right]_{1/2}^t = e^{\frac{1}{4}} - e^{-t^2+t}. \quad (22)$$

Ripresa la (20) e posta l'uguaglianza $\mathcal{A}(R') = \mathcal{A}(R)$ otteniamo

$$e^{\frac{1}{4}} - e^{-t^2+t} = e^{\frac{1}{4}} - 1 \implies e^{-t^2+t} = 1$$

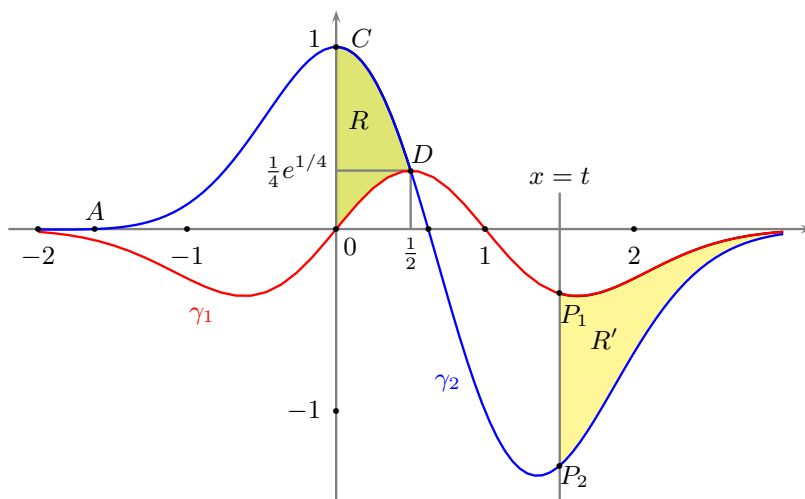


Fig. 8. Grafici delle funzioni f e g e regione alternativa R' .

che implica

$$-t^2 + t = 0 \implies t = 0 \quad \vee \quad t = 1.$$

Poiché $t \geq \frac{1}{2}$ segue che $t = 1$ è l'unico valore accettabile (mentre $t = 0$ riporta al caso precedente).

Nota. Poiché il testo non chiarisce quale sia la regione limitata da γ_1 e γ_2 quando sia $t \geq \frac{1}{2}$, in alternativa alla regione di figura 6 si potrebbe intendere invece l'area delimitata dalle due curve rappresentata nella figura 8.

In tal caso l'integrale (21) avrebbe le limitazioni

$$\mathcal{A}(R') = -\int_t^{+\infty} (1-2x)e^{-x^2+x} dx. \quad (23)$$

che implica lo studio di un integrale generalizzato e quindi del limite

$$\mathcal{A}(R') = \lim_{w \rightarrow +\infty} -\int_t^w (1-2x)e^{-x^2+x} dx.$$

Poiché una primitiva della funzione integranda, come visto, è nota, questo si suddivide in

$$\mathcal{A}(R') = e^{-t^2+t} - \lim_{w \rightarrow +\infty} (e^{-w^2+w}). \quad (24)$$

Poiché nella precedente, il limite è nullo

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} (e^{-w^2+w}) = \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-z} = 0,$$

risulta

$$\mathcal{A}(R') = e^{-t^2+t},$$

e l'uguaglianza tra aree $\mathcal{A}(R') = \mathcal{A}(R)$ diviene

$$e^{-t^2+t} = e^{\frac{1}{4}} - 1 \implies -t^2 + t = \ln\left(e^{\frac{1}{4}} - 1\right)$$

da cui

$$t^2 - t + \ln\left(e^{\frac{1}{4}} - 1\right) = 0$$

Quest'ultima equazione ammette soluzioni

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \ln\left(e^{\frac{1}{4}} - 1\right)}}{2}$$

e, poiché $t \geq \frac{1}{2}$, segue che

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \ln\left(e^{\frac{1}{4}} - 1\right)}}{2} \approx 1.7282$$

è l'unico valore accettabile.

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Nel triangolo ABC (fig. 1) M è il punto medio di BC , $BM \cong MC$ mentre B' e C' sono punti rispettivamente di AB e AC tali che

$$AB' = \frac{1}{3}AB, \quad AC' = \frac{1}{3}AC. \quad (1)$$

È data inoltre l'ulteriore ipotesi di congruenza tra i segmenti

$$MB' \cong MC'. \quad (2)$$

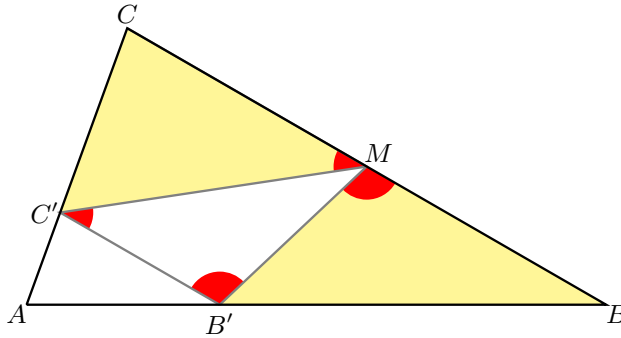


Fig. 1. Triangolo qualsiasi ABC e punti M, B', C' .

Dalla (1) segue che

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{1}{3} = \frac{AC'}{AC}$$

per cui, il teorema di Talete assicura il parallelismo di $B'C'$ con BC . Dalla (2) segue invece che il triangolo $MB'C'$ è isoscele (la figura 1 è intenzionalmente tracciata senza rispettare tale ipotesi) per cui i suoi angoli alla base sono congruenti

$$\angle MB'C' \cong \angle MC'B'. \quad (3)$$

Dal parallelismo di $B'C'$ con BC e dal fatto che MB' è una loro trasversale, dal teorema delle rette parallele discende

$$\angle MB'C' \cong \angle B'MB \quad (4)$$

e, per lo stesso motivo,

$$\angle MC'B' \cong \angle C'MC \quad (5)$$

cosicché per la (3) è pure

$$\angle B'MB \cong \angle C'MC. \quad (6)$$

I triangoli $MB'B$ e $MC'C$ sono quindi congruenti in quanto hanno per l'ipotesi (2) $MB' \cong MC'$, $BM \cong MC$ perché M punto medio e l'angolo compreso tra i lati rispettivamente congruenti (6). Ne segue che anche i lati rimanenti sono congruenti e, in particolare

$$B'B \cong C'C. \quad (7)$$

Poiché

$$B'B = \frac{2}{3}AB, \quad C'C = \frac{2}{3}AC$$

ne deriva dalla (7) la tesi $AB \cong AC$. Nella figura 2, diversamente da quella iniziale, riportiamo il triangolo ABC con le congruenze corrette tra segmenti e angoli e sottolineiamo come il quadrilatero $BB'C'C$ sia un trapezio isoscele.

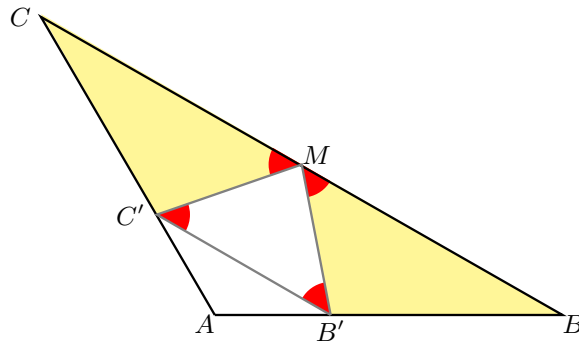


Fig. 2. Triangolo ABC e punti M , B' , C' .

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

La superficie sferica di equazione canonica

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 = 1 \quad (1)$$

ha centro $C(1, 2, 0)$ e raggio $r = 1$ e il piano π di equazione

$$x - 2y - 2z + d = 0 \quad (2)$$

è caratterizzato dal vettore normale

$$\vec{n} = (1, -2, -2) \quad (3)$$

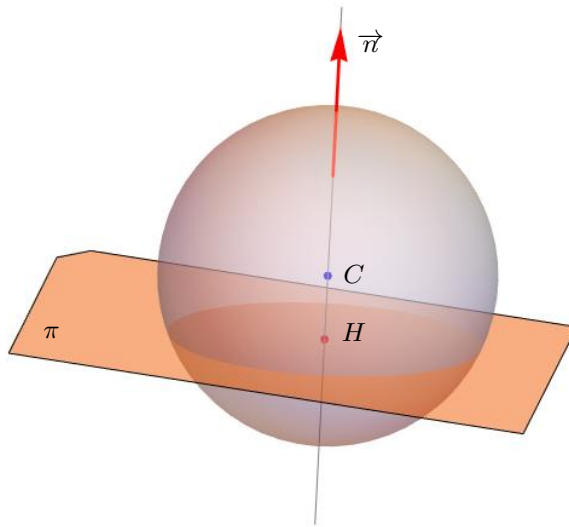


Fig. 1. Sfera di centro $C(1, 2, 0)$ e piano π secante.

e dal parametro reale $d \in \mathbb{R}$ (fig. 1).

La distanza tra un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e un piano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ è data dalla formula

$$d(C, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

per cui, nel caso in esame, diviene

$$d(C, \pi) = \frac{|1(1) - 2(2) - 2(0) + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|d - 3|}{3}. \quad (4)$$

Il piano π è quindi tangente o secante la sfera se tale distanza è uguale o minore del raggio $r = 1$ della sfera: segue la condizione

$$d(C, \pi) \leq r \implies \frac{|d - 3|}{3} \leq 1 \implies |d - 3| \leq 3$$

e quindi

$$d^2 + 9 - 6d \leq 9 \implies d^2 - 6d \leq 0 \implies 0 \leq d \leq 6.$$

Di conseguenza, se $d < 0$ oppure $d > 6$ il piano π è esterno alla sfera mentre, affinché questa sia divisa in due semisfere è necessario che $C \in \pi$ ossia valga

$$1(1) - 2(2) - 2(0) + d = 0 \implies d = 3.$$

• Volendo procedere in modo alternativo, seppure un po' più laborioso, costruiamo la retta s passante per il centro C e perpendicolare al piano π . La sua equazione parametrica in termini del parametro t e del generico punto $P(x, y, z)$ coinvolge il vettore normale \vec{n} , (3), ed è

$$s: P = C + t\vec{n}, \implies (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, -2, -2),$$

relazione che equivale alle tre equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2t. \end{cases} \quad (5)$$

Il suo punto di intersezione con il piano π , $\{H\} = s \cap \pi$, si ottiene sostituendo le (5) nell'equazione del piano (2)

$$(1 + t) - 2(2 - 2t) - 2(-2t) + d = 0 \quad (6)$$

da cui deriva il parametro

$$t = \frac{3 - d}{9}$$

che, sostituito nella (5) fornisce il punto H

$$H\left(1 + \frac{3 - d}{9}, 2 - \frac{2(3 - d)}{9}, -\frac{2(3 - d)}{9}\right) \equiv \left(\frac{12 - d}{9}, \frac{12 + 2d}{9}, \frac{2d - 6}{9}\right).$$

La distanza tra il centro C e il punto H è data dalla formula della distanza tra due punti nello spazio

$$\overline{CH} = \sqrt{\left(\frac{12 - d}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{12 + 2d}{9} - 2\right)^2 + \left(\frac{2d - 6}{9} - 0\right)^2}$$

da cui, dopo qualche passaggio algebrico, discende

$$\overline{CH} = \frac{|d - 3|}{3}$$

e quindi lo stesso risultato (4) e le conseguenze che ne derivano.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Data la funzione f definita a tratti dalle equazioni

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \leq 2 \end{cases} \quad (1)$$

possiede un grafico costituito da un arco di parabola di equazione

$$p: y = -4x^2 - 8x, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (2)$$

avente vertice in $V(-1, 4)$, interseca l'asse x in

$$0 = -4x^2 - 8x \implies x = 0 \quad \text{o} \quad x = -2,$$

e possiede una concavità rivolta verso il basso (fig. 1).

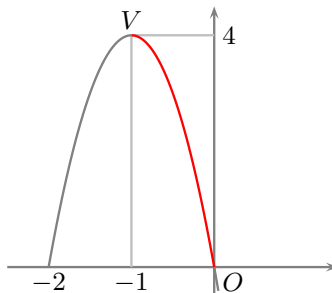


Fig. 1. Arco di parabola in $[-1, 0]$.

La seconda parte di f è evidentemente collegata alla funzione tangente la cui periodicità e grafico sono noti. A partire dall'equazione

$$y = 1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right),$$

possiamo riscriverla come

$$y - 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right),$$

e quindi, definita la traslazione

$$\tau: \begin{cases} X = x + \frac{3}{4}\pi \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

riportarla al grafico noto γ della tangente con relative limitazioni

$$Y = \operatorname{tg} X, \quad \frac{3}{4}\pi < X \leq \frac{3}{4}\pi + 2$$

oppure, considerando la periodicità della tangente, con limitazioni $]-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + 2]$. Pertanto il grafico di f in $]0, 2]$ deriva da γ applicando ad esso la traslazione inversa τ^{-1}

$$\tau^{-1}: \begin{cases} x = X - \frac{3}{4}\pi \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

sintetizzata dal vettore $\vec{v} = (-\frac{3}{4}\pi, 1)$ (fig. 2).

Unendo i due grafici parziali otteniamo il grafico di f nell'intervallo $[-1, 2]$ (fig. 3).

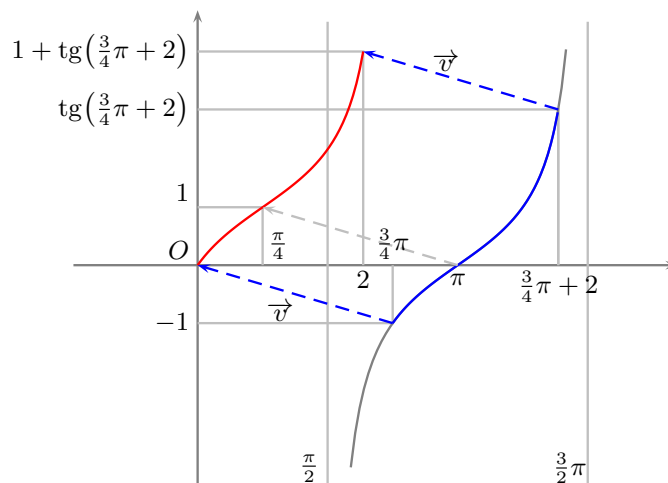


Fig. 2. Tangente in $[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi + 2]$ e sua traslazione.

La continuità di f nei punti $x \neq 0$ del suo dominio è assicurata in quanto composta da un polinomio di secondo grado e da una funzione, la tangente, composta a sua volta da un polinomio di primo grado che non comprende punti di discontinuità della tangente. Uno

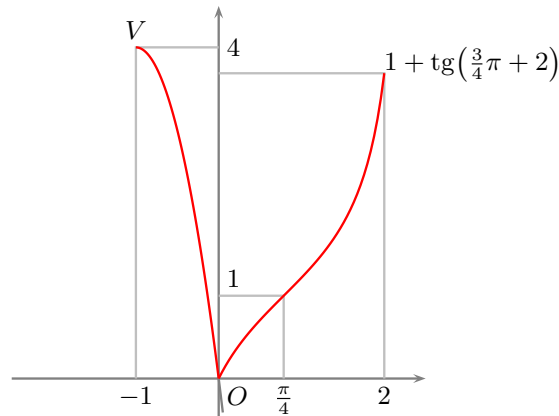


Fig. 3. Grafico di f in $[-1, 2]$ (sistema isometrico).

studio particolare va invece svolto in $x = 0$ calcolando i limiti sinistro e destro. Poiché questi valgono

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-4x^2 - 8x) = 0 = f(0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \right] = 1 + \tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 - 1 = 0 = f(0),$$

di conseguenza la f è continua pure in $x = 0$.

La derivabilità di f nei punti $x \neq 0$ è rispettata in quanto composta da funzioni derivabili mentre in $x = 0$ vanno svolti i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale. Per quanto riguarda il limite sinistro risulta

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-4h^2 - 8h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} (-4h - 8) = -8, \end{aligned} \quad (3)$$

mentre il limite del rapporto incrementale destro risulta

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \operatorname{tg}\left(h + \frac{3}{4}\pi\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \operatorname{tg}\left(h + \frac{3}{4}\pi\right)}{h}. \end{aligned} \quad (4)$$

Poiché

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[1 + \operatorname{tg}\left(h + \frac{3}{4}\pi\right) \right] = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 - 1 = 0$$

il limite (4) rientra nella forma indeterminata $0/0$ e di conseguenza analizziamo l'eventuale applicabilità del teorema di De l'Hôpital studiando invece il limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore. Pertanto essendo

$$D \left[1 + \operatorname{tg}\left(h + \frac{3}{4}\pi\right) \right] = 1 + \operatorname{tg}^2\left(h + \frac{3}{4}\pi\right),$$

abbiamo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(h + \frac{3}{4}\pi\right)}{1} \right] = 1 + (-1)^2 = 2$$

e quindi, soddisfatta l'ipotesi del teorema sull'esistenza del limite del rapporto delle derivate, lo applichiamo concludendo che il limite (4) vale

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \tan\left(h + \frac{3}{4}\pi\right)}{h} = 2. \quad (5)$$

Poiché i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale in $x = 0$ pur essendo finiti non coincidono, f non è derivabile in $x = 0$.

• Per lo studio della funzione f in $[0, 2]$ è ovviamente possibile procedere in modo alternativo, osservando innanzitutto il suo segno:

$$1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \geq 0 \implies \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \geq -1$$

e quindi, considerando la periodicità della tangente, ottenere le soluzioni

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x + \frac{3}{4}\pi < \frac{\pi}{2} + k\pi \implies -\pi + k\pi \leq x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

dalle quali, per $k = 1$, ne deriva $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi$, intervallo che contiene $[0, 2]$ dato che $\frac{3}{4}\pi > 2$. Quindi $f(x) > 0$ per $x \in]0, 2]$ e $f(0) = 0$.

Per quanto riguarda la monotonia di f in $[0, 2]$, la sua derivata prima

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

è positiva per ogni $x \in [0, 2]$ e quindi f è strettamente crescente in $[0, 2]$.

Per la derivata seconda invece

$$f''(x) = 2 \operatorname{tg}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \right]$$

e $f''(x) \geq 0$ se

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \geq 0, \implies k\pi \leq x + \frac{3}{4}\pi < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

per cui

$$-\frac{3}{4}\pi + k\pi \leq x < -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Per $k = 1$ queste si riducono all'intervallo

$$\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3}{4}\pi$$

da cui, riportato il segno di f'' in figura 4, segue che in $[\frac{\pi}{4}, 2]$ la concavità di f è rivolta verso l'alto (convessa) mentre è verso il basso (concava) in $[0, \frac{\pi}{4}[$ (grafico in fig. 3).

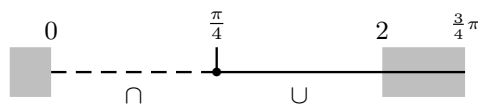


Fig. 4. Segno di $f''(x)$ in $[0, 2]$.

Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Data la funzione f definita dalla equazione

$$f: y = g(x) \operatorname{sen}^2 x, \quad (1)$$

e dalle condizioni

$$\exists g'(x) \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}, \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad (2)$$

la retta normale al suo grafico in $x = \frac{\pi}{4}$ è data dall'equazione

$$n: y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3)$$

essendo

$$m = -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad (4)$$

il suo coefficiente angolare dedotto dalla condizione $m \cdot m' = -1$ dove $m' = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ è il coefficiente angolare della retta tangente.

Il calcolo di $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ fornisce

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (5)$$

mentre per il calcolo di $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ dobbiamo prima ottenere la derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \operatorname{sen}^2 x + 2g(x) \operatorname{sen} x \cos x \\ &= g'(x) \operatorname{sen}^2 x + g(x) \operatorname{sen}(2x). \end{aligned} \quad (6)$$

Tenendo conto delle condizioni (2), quest'ultima in $x = \frac{\pi}{4}$ vale

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= g'\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + g\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \end{aligned} \quad (7)$$

e quindi, sostituendo i risultati (5) e (7) nella (3), discende l'equazione della retta normale

$$n: y - 1 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \implies \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12} + 1.$$

Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

Affinché le curve rappresentate dalle equazioni

$$f: y = e^x, \quad g: y = 6 - ke^{-x}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

siano tangenti tra loro devono, in un punto di ascissa x , essere soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x). \end{cases} \quad (2)$$

La prima condizione garantisce che le due curve abbiano almeno un punto in comune mentre la seconda implica che, in questo stesso punto, le curve abbiano la medesima retta tangente. Poiché g dipende da un parametro reale k , il sistema (2) presenta due incognite x e k e, calcolando le derivate f' e g' , lo esplicitiamo come

$$\begin{cases} e^x = 6 - ke^{-x} \\ e^x = -ke^{-x}(-1) \end{cases} \implies \begin{cases} e^{2x} - 6e^x + k = 0 \\ e^{2x} = k \end{cases} \quad (3)$$

dove in entrambe le equazioni, abbiamo moltiplicato ciascun membro per e^x . Dalla seconda equazione, e supposto $k > 0$, discende la soluzione per x

$$e^{2x} = k \implies 2x = \ln k \implies x = \frac{1}{2} \ln k. \quad (4)$$

Sostituito quest'ultimo valore nella prima equazione di (3) otteniamo

$$e^{\ln k} - 6e^{\frac{1}{2} \ln k} + k = 0 \implies k - 6k^{\frac{1}{2}} + k = 0 \implies 2k - 6\sqrt{k} = 0$$

da cui, dividendo per $2\sqrt{k}$ in quanto $k > 0$, segue

$$\sqrt{k} - 3 = 0 \implies \sqrt{k} = 3 \implies k = 9.$$

Il valore corrispondente di x è, in base alla (4)

$$x = \frac{1}{2} \ln 9 = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln 3 = \ln 3,$$

e quindi le coordinate del punto di tangenza sono $(\ln 3, e^{\ln 3}) \equiv (\ln 3, 3)$.

Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Le condizioni fornite dal testo circa la funzione f polinomiale riguardano

- il passaggio per il punto comune di coordinate $A(0, 3)$ nel quale la retta $r: y = 2x + 3$ è tangente al grafico di f ,
- l'avere nel punto A il coefficiente angolare uguale a quello di r e, infine
- la validità dell'integrale definito

$$\int_0^3 f(x) dx = 9$$

Queste tre condizioni permettono di determinare tre coefficienti di un polinomio che pertanto dovrà essere al massimo di secondo grado e quindi del tipo $f: y = ax^2 + bx + c$.

La prima condizione implica

$$f(0) = 3 \implies a(0)^2 + b(0) + c = 3 \implies c = 3, \quad (1)$$

mentre la seconda condizione, essendo $f': y' = 2ax + b$ e il coefficiente angolare di r è $m_r = 2$, si traduce in

$$f'(0) = m_r \implies 2a(0)^2 + b = 2 \implies b = 2. \quad (2)$$

Con questi risultati scriviamo la terza condizione come

$$\int_0^3 (ax^2 + 2x + 3) dx = 9$$

dalla quale procedendo con l'integrazione otteniamo

$$\int_0^3 (ax^2 + 2x + 3) dx = 9 \implies \left[\frac{ax^3}{3} + 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 3x \right]_0^3 = 9.$$

Il calcolo numerico dà infine

$$\frac{a \cdot 27}{3} + 9 + 9 = 9 \implies 9a + 18 = 9 \implies 9a = -9 \implies a = -1$$

e di conseguenza il polinomio cercato è $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Le possibili combinazioni di 4 dadi aventi ciascuno 4 facce sono

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4 = 2^8 = 256 \quad (1)$$

mentre le combinazioni favorevoli all'evento del colpo di Venere sono

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 = 4! \quad (2)$$

in quanto, se il primo dado possiede 4 possibili uscite, il secondo ne deve presentare solo 3 di diverse dal primo, il terzo solo 2 e il quarto ha solo una possibile uscita.

La probabilità di ottenere un colpo di Venere è quindi

$$p(\text{Venere}) = \frac{4!}{256} = \frac{24}{256} = 0.09375.$$

I possibili eventi favorevoli all'uscita di 4 numeri uguali sono evidentemente solo 4 e cioè

$$1111, \quad 2222, \quad 3333, \quad 4444,$$

da cui la probabilità di ottenere 4 esiti uguali è

$$p(4 \text{ uguali}) = \frac{4}{256} = \frac{1}{64} \approx 0.0156.$$

Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

La parola “STUDIARE” è composta da 8 lettere tutte diverse tra loro per cui il numero dei possibili anagrammi, pur privi di significato, è dato dalle permutazioni di 8 elementi distinti ossia

$$n_1 = 8! = 40320. \quad (1)$$

Se invece si intendono contare gli anagrammi che contengono la parola “ARTE” come un singolo blocco, allora questa parola conta come un qualsiasi altro elemento tra “S”, “U”, “D”, “I” per cui le permutazioni sono ora di 5 oggetti e gli anagrammi associati sono in numero

$$n_2 = 5! = 120. \quad (2)$$

Infine, poiché “VACANZA” è composta da 7 lettere di cui 3 uguali ad “A”, il numero dei possibili anagrammi è dato dalle permutazioni di 7 elementi diviso per le $3! = 6$ permutazioni delle tre “A” in quanto una qualsiasi permutazione delle tre “A” è indistinguibile dalle rimanenti 5. Ne deriva che tale numero è

$$n_3 = \frac{7!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840. \quad (3)$$

APPENDICE

Nelle pagine seguenti proponiamo, senza soluzioni, i testi delle prove assegnate nelle sessioni suppletiva e straordinaria dei corsi di liceo scientifico di ordinamento e opzione scienze applicate (LI02, LI03).

Indice delle prove suppletive e straordinarie

Esame 2019 sessione suppletiva	97
Esame 2019 sessione straordinaria	101
Esame 2023 sessione suppletiva	104
Esame 2023 sessione straordinaria	107
Esame 2024 sessione suppletiva	110
Esame 2024 sessione straordinaria	113
Esame 2025 sessione suppletiva	147
Esame 2025 sessione straordinaria	150

Esame 2019: sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problemi

1) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}), & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4}, & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

- Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a . Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h \left[1 + (3 - kx)e^{kx-1} \right]$$

si abbia $g(3-x) = f(x)$ per $x \geq 0$.

- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente \vec{B} , viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\mathcal{E}(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $d\mathcal{E}$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto dx . Supponendo che la funzione $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = 9/2$ e $k = 1$, calcolare l'energia \mathcal{E} assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

2) Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B , posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B .

- Determinare, in un punto C della retta r , l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 , al variare di C su r . Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.
- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB .

Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB , esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x .

- Fissati i parametri reali positivi h e k , studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f .

Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty)$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

Quesiti

- 1) Fissati i numeri reali positivi a e b , con $a \geq b$, provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(x^a + x^b) = a.$$

- 2) È assegnata la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt.$$

Studiare il segno della funzione f e provare che essa è crescente. Determinare il valore di

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx.$$

- 3) Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un rombo è un rettangolo.

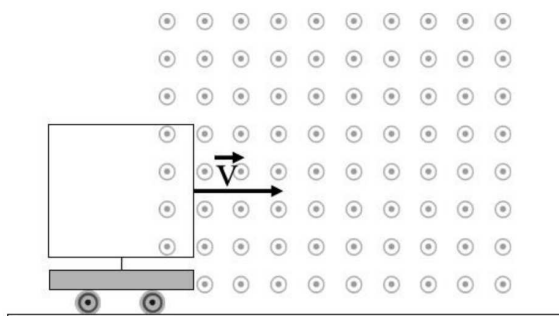
4) Considerati i punti $A(2, 3, 6)$, $B(6, 2, -3)$, $C(3, -6, 2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA , OB , OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.

5) Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?

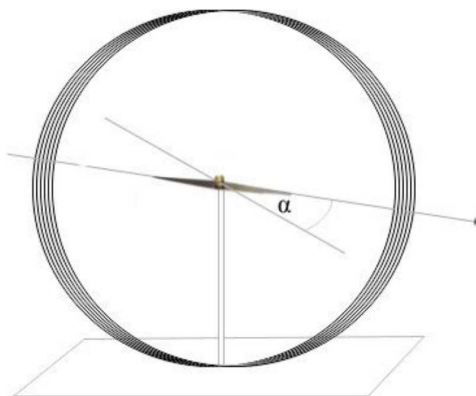
6) Consideriamo un'astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocità $v = 0,90c$. Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni $a = 40$ cm, $b = 50$ cm e $h = 20$ cm, con il lato b disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola? Se

l'astronauta lancia la scatola con una velocità $v_s = 0,50c$ nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l'osservatore sulla terra?

7) Una bobina è costituita da N spire quadrate di lato l , ha una resistenza elettrica R ed è montata su un carrello che può muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Il carrello viene tirato con velocità costante \vec{v} ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico \vec{B} , uscente dalla pagina come in figura. Spiegare perché la bobina si riscalda e determinare l'espressione della potenza dissipata. Cosa accade se il carrello viene lanciato con velocità \vec{v} verso la stessa regione?



8) Una bobina compatta è costituita da 130 spire di raggio $R = 15$ cm. Si pone un ago magnetico, le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a R , al centro della bobina, come in figura.



Il piano della bobina viene orientato in modo da contenere l'ago che, a sua volta, è orientato nella direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Quando la bobina è attraversata da corrente, l'ago devia di un angolo α . Spiegare la causa di questa deviazione.

In tabella sono riportati alcuni valori, misurati sperimentalmente, di α e della corrispondente corrente nella bobina. Utilizzando questi dati, misurare l'intensità della componente orizzontale del campo magnetico terrestre, con la relativa incertezza.

Deviazione di α	10°	20°	30°	40°	50°
Intensità di corrente	11,4 mA	23,3 mA	36,8 mA	52,4 mA	73,9 mA

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
massa del protone	m_p	$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
velocità della luce nel vuoto	c	$2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$
elettronvolt	eV	$1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$

Prove suppletive: [indice](#)

Esame 2019: sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problemi

1) Dato $k > 0$, si consideri la funzione $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{k}{x^2}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione f è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di k le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto γ tale che $\tan \gamma = 3$?
- Posto $k = 1$, sia r una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti S e T i punti d'intersezione tra r ed il grafico della funzione f , siano S' e T' le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x . Come deve essere scelto il valore di t , in modo che sia massima l'area del rettangolo $SS'T'T'$?

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio R , espresso in metri (m). La densità di carica, indicata con ρ ed espressa in coulomb al metro cubo (C/m^3), è uniforme.

- Indicata con x la distanza di un punto P dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq R \\ \frac{kR^3}{x^2}, & \text{se } x > R \end{cases}$$

dove k è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica ρ e la dimensione fisica.

- Sia q una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica q a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica q a distanza infinita dal centro della sfera?

2) In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame RS rettilineo, rigido, di lunghezza l , misurata in metri (m), di massa m , misurata in chilogrammi (kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici, P e Q , posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci P e Q vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico \vec{B} , uniforme e costante, perpendicolare al filo

(fig. 1) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità i , misurata in ampère (A) e il filo RS si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui PR forma un angolo θ con la direzione verticale (fig. 2).

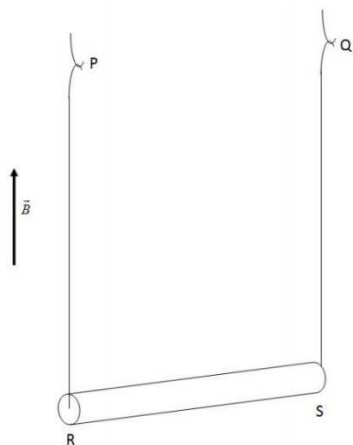


Fig.1

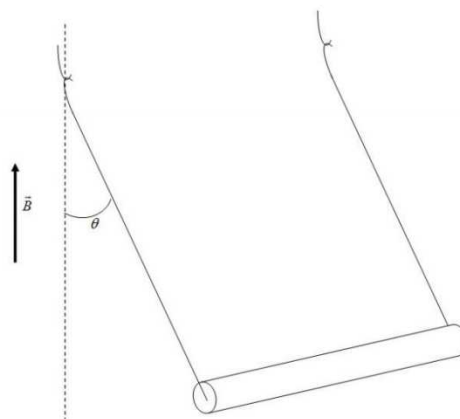


Fig.2

- Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo \vec{B} agisce sulla corrente che attraversa il tratto RS . Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?
- Rappresentare tutte le forze agenti sul filo RS . Considerando costanti \vec{B} , la massa m e la lunghezza l del filo RS , verificare che l'ampiezza dell'angolo θ in funzione dell'intensità di corrente i è data da $\theta(i) = \arctan\left(\frac{Bl}{mg} \cdot i\right)$, in cui g è l'accelerazione di gravità.
- Posto $\theta(x) = \arctan(kx)$, si considerino, in un sistema cartesiano Oxy , le funzioni $y = \theta(x)$ e la sua inversa $y = \theta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.
- Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\theta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \theta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.

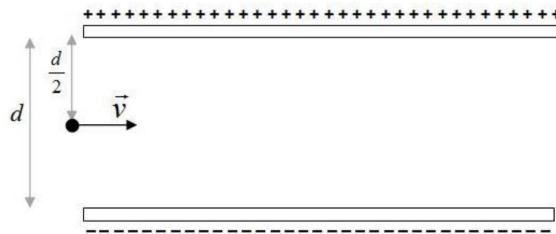
Quesiti

- 1) Determinare il valore di questo limite: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$.
- 2) Data la funzione $f(x) = x \sin x$ e fissato un numero $k > 0$, provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} k \cdot f(kx) dx$$

(dove x_0 indica il minimo numero reale positivo per cui $f(kx_0) = 0$) non dipende dalla scelta di k .

- 3) Dato un triangolo ABC , sia M il punto medio del lato BC . Dimostrare che, se la lunghezza di AM è la metà di BC , allora ABC è un triangolo rettangolo.
- 4) Dopo aver verificato che il punto $T(1, 0, 1)$ appartiene al piano $\pi: x - 2y + 2z = 3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1, 0, 5)$ e tangente in T al piano π .
- 5) Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.
- Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
 - Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?
- 6) Un condensatore piano, costituito da due armature quadrate di lato $l = 4,0$ cm, distanti $d = 3,0$ cm, è soggetto a una d.d.p. $\Delta V = 15$ V. Un elettrone vi entra perpendicolarmente al campo elettrico, come in figura, con una velocità $v_0 = 2,5 \times 10^6$ m/s. A quale distanza dall'ingresso del condensatore deve essere posto uno schermo, affinché la deflessione verticale totale sia 20 cm?



- 7) Un protone viene sparato su una particella α (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10 cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità $v_0 = 5,00 \times 10^3$ m/s. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.
- 8) Un elettrone entra in una regione di spazio, sede di un campo magnetico di intensità $B = 0,20$ T, con velocità di modulo $v_0 = 1,5 \times 10^4$ m/s, che forma un angolo di 10° con la direzione di \vec{B} . Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico necessario affinché l'elettrone non subisca deflessione.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1,602 \times 10^{-19}$ C
massa dell'elettrone	m_e	$9,109 \times 10^{-31}$ kg
massa del protone	m_p	$1,673 \times 10^{-27}$ kg
massa particella alfa	m_α	$6,645 \times 10^{-27}$ kg
costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	$8,854 \times 10^{-12}$ F/m
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m

Esame 2023: sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

Problemi

1) Assegnata la funzione

$$f(x) = ax \ln(x) - \frac{3}{2}x$$

- a) determinare il valore del parametro reale a in modo che f abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

- b) Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q(0, -1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.
- c) Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{x+h}{x+k}$$

risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

d) Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t) dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

2) Sono assegnate due funzioni polinomiali $y = P(x)$ e $y = Q(x) = kP(x)$, con k parametro reale, i cui grafici rappresentativi sono mostrati in figura in fondo al problema.

È noto che:

- $P''(x) = 12x^2 - 24x$
- hanno entrambe nell'origine degli assi un flesso a tangente orizzontale
- il valore massimo assunto dalla funzione Q è uguale a $\frac{27}{4}$.

- a) Determinare l'espressione analitica delle funzioni $P(x)$ e $Q(x)$.
- b) Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni

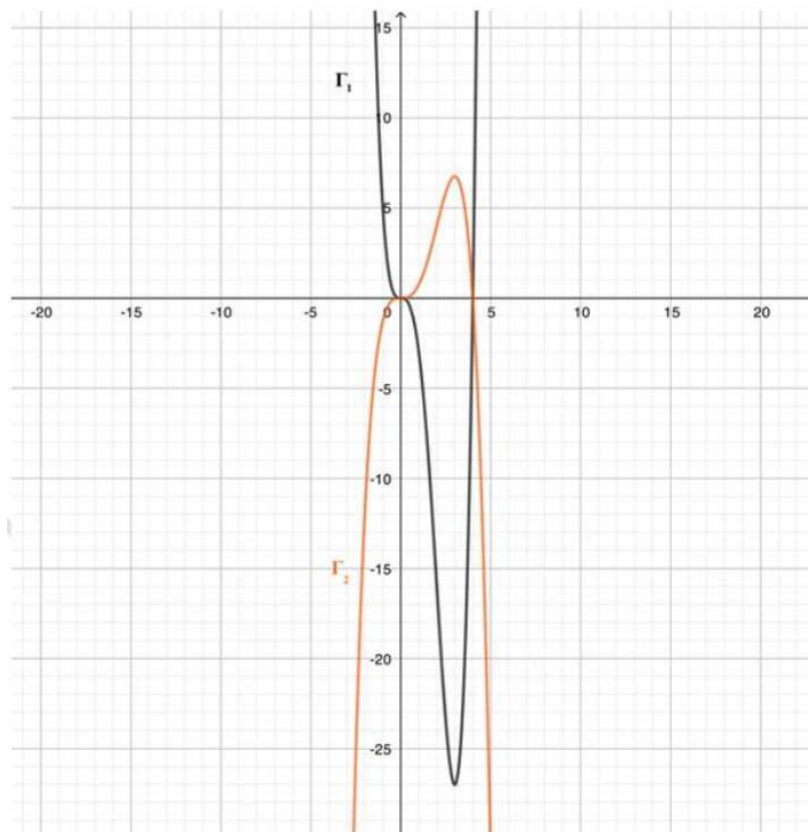
$$y = P(x) \cdot Q(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{P(x)}$$

D'ora in avanti, si assuma che $P(x) = x^4 - 4x^3$.

- c) Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione P e dall'asse delle ascisse.

d) Verificare che, per $x > 4$, la funzione $F(x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x-4}{x}\right)$ è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$.

Esprimere, in funzione di t , con $t \geq 5$, l'integrale $\int_5^t \frac{x^2}{P(x)} dx$ e calcolarne il limite per $t \rightarrow +\infty$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.



Quesiti

- 1) Dato un triangolo ABC , sia P un punto del lato BC e siano G' e G'' i baricentri dei triangoli ABP e ACP . Dimostrare che il segmento $G'G''$ è parallelo a BC .
- 2) Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?
- 3) Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r = 5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1, 2, 3)$ al piano di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$.
- 4) Una sfera, di raggio r fissato, è inscritta nel cono S di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?
- 5) Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.

6) Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1, -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.

7) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (t^2 - 1) \cdot e^{2t} dt}{(x - 1)^2}$$

8) Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a, b) . Si considerino le seguenti affermazioni A : “ f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a, b)$ ” e B : “ $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ ”. Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo (a, b) .

1. $A \implies B$
2. $B \implies A$
3. $A \iff B$
4. $B \iff A$

Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi.

[Prove suppletive: indice](#)

Esame 2023: sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

Problemi

- 1) Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.
- Verificare che tutte le curve rappresentate dalle funzioni della famiglia $f_n(x)$ passano per uno stesso punto e scrivere le sue coordinate. Determinare, in funzione del parametro n , le ascisse degli estremi e dei flessi e calcolarne il limite, con $n \rightarrow \infty$. Scrivere le equazioni degli asintoti e tracciare i grafici delle funzioni f_n , evidenziando le differenze tra i casi in cui n è pari da quelli in cui n è dispari.
 - Si assuma $n = 3$, studiare la funzione $f_3(x)$ e si tracci un suo grafico rappresentativo, dimostrando che ammette un unico zero di segno negativo. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.
 - Si consideri la funzione $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ e verificare che, $\forall x > 0$, vale la disuguaglianza $f_n(x) > g(x)$, indipendentemente dal valore di n . Si consideri l'integrale

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x)) dx,$$

che esprime l'area della regione delimitata dai grafici delle funzioni f_n e g e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = t$, $t > 1$. Si calcolino $I(t)$ e il $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

- Calcolare il $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - 2}{g(x) - 2}$ e verificare che il risultato non dipende da $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
- 2) Si considerino le famiglie di funzioni $f_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$ e $g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$ con a parametro reale positivo.
- Si traccino, al variare del parametro, i grafici rappresentativi γ_f e γ_g delle funzioni $f_a(x)$ e $g_a(x)$ evidenziando simmetrie, estremi e flessi.
 - Siano P e Q due punti, rispettivamente su γ_f e γ_g , aventi la stessa ascissa positiva, P' e Q' le loro proiezioni sull'asse delle ordinate. Si individui il valore del parametro a in corrispondenza del quale la massima area del rettangolo $PQQ'P'$ vale e^{-1} .

D'ora in avanti, si assuma $a = 1$.

- Verificare l'identità $g^2(x) - f^2(x) = 1$ e determinare il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$. Specificare quale, tra $f(x)$ e $g(x)$, è una funzione invertibile in \mathbb{R} e ricavare l'espressione analitica della funzione inversa.
- Determinare l'equazione $y = P(x)$ della parabola γ avente il vertice nel punto di minimo assoluto della funzione $g(x)$ e retta tangente, per $x = 1$, parallela alla retta di equazione $2x + y = 0$. Calcolare l'area della regione finita R delimitata da γ , dal grafico di $g(x)$ e dalle rette di equazione $x = \pm 1$. Verificare che l'area R può

essere approssimata con quella del triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse delle ascisse.

Quesiti

1) Nel triangolo ABC , l'ampiezza di uno dei tre angoli è la metà di un secondo angolo del triangolo ed è pari al triplo del terzo angolo. Detti A' , B' , C' i punti di tangenza tra i lati di ABC ed il suo cerchio inscritto, determinare le ampiezze degli angoli del triangolo $A'B'C'$.

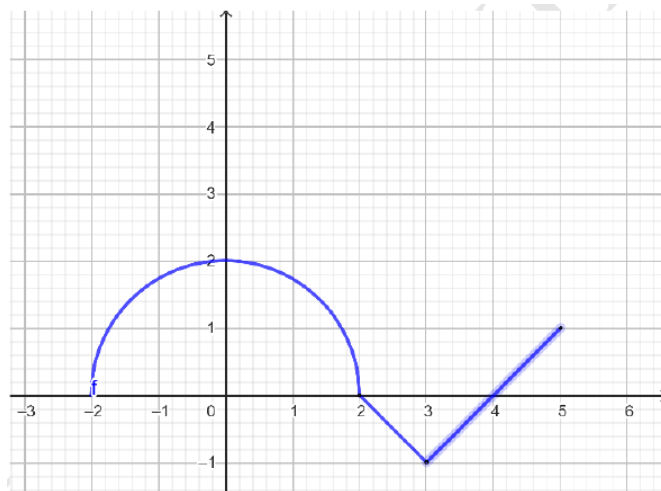
2) Una classe è formata da 18 studenti; durante la lezione di musica, vengono creati (in modo completamente casuale) tre gruppi formati rispettivamente da 5, 6 e 7 studenti. Se Alice, Barbara e Chiara sono tre studentesse della classe, determinare la probabilità che solo due di loro facciano parte di uno stesso gruppo.

3) Assegnate le rette $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t, \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ con t parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s .

4) Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata di diagonale fissata d , dimostrare che il cubo è quello di volume massimo.

5) Determina l'equazione della funzione dispari che ha un solo flesso a tangente orizzontale e la cui derivata seconda è $f'' = -10x^3 + 12x$.

6) Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$ con $x \in [-2; 5]$, dove f è la funzione rappresentata in figura, ottenuta dall'unione di una semicirconferenza e due segmenti. Calcolare $F(-2)$, $F(2)$, $F(3)$ e $F(5)$.



7) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x|x+1|}{x^3 - x}$ e stabilire la tipologia delle sue discontinuità.

8) Si considerino le seguenti affermazioni sulla funzione $y = f(x)$.

A: " $f(x)$ è derivabile per $x = x_0$ "

(continua)

B : “ $f(x)$ è continua per $x = x_0$ ”

Indicare quali, tra le seguenti affermazioni, non costituisce un teorema. Spiegare la scelta effettuata anche attraverso opportuni controesempi.

$A \implies B$ (se A allora B)

$B \implies A$ (se B allora A)

$A \iff B$ (B se e solo se A).

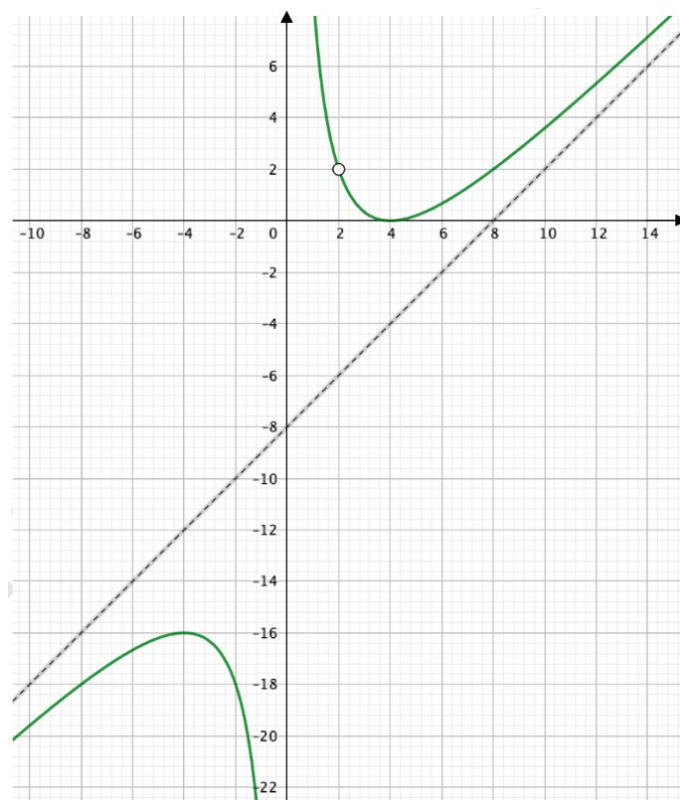
Prove suppletive: [indice](#)

Esame 2024: sessione suppletiva

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

Problemi

1) Si consideri il grafico γ in figura, rappresentativo di una funzione $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, dove $A(x)$ e $B(x)$ sono dei polinomi, definita nel dominio $D = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.



- a) Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di f . Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x)$. Scrivere le equazioni degli asintoti di f .
- b) Supponendo che la funzione f abbia equazione

$$y = \frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

determinare i valori dei parametri a , b , c , d .

- c) Dal grafico γ , dedurre i grafici delle funzioni $f(|x|)$ e $\ln(f(x))$ specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine.
- d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_3^x f(t)dt$, definita nell'intervallo $[3; 8]$. Tracciare un suo grafico rappresentativo Γ , specificando l'ascissa del punto di flesso e il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto.

- 2) Si consideri la famiglia di curve $f_a(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{ax}}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con Γ_a il grafico di f_a .
- Verificare che tutti i grafici Γ_a hanno tre punti in comune e scrivere le loro coordinate.
 - Al variare del parametro a , individuare gli intervalli di monotonia di Γ_a , le ascisse degli estremi relativi e dei flessi.
 - Determinare i valori del parametro a in modo che il punto F , intersezione di Γ_a con l'asse delle ordinate, sia un punto di flesso. In corrispondenza di tali valori, scrivere le equazioni delle rette tangenti in F .
 - Dimostrare che, per ogni valore di $a \neq 0$, le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ordinate. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici Γ_1 e Γ_{-1} .

Quesiti

1) È dato un triangolo ABC di lati $AB = a$ e $BC = \sqrt{3}a$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- Se $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$, allora il triangolo è rettangolo.
- Se il triangolo è rettangolo, allora $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.

Motivare le risposte.

2) In un salvadanaio ci sono 15 monete, di cui 9 sono da 1 euro e le altre 6 da 2 euro. Se ne estraggono 6 contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia esattamente 10 euro?
- Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia al massimo 10 euro?

3) Verificare che i punti $O(0, 0, 0)$, $A(1, 4, 8)$, $B(-6, 0, 12)$ e $C(-7, -4, 4)$ sono complanari. Calcolare area e perimetro del quadrilatero $OABC$ e classificarlo.

4) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{ax - 7}{x^2}\right)$, con a parametro reale positivo. Successivamente, individuare il valore di a in corrispondenza del quale risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[1; 7]$ e le coordinate del punto che ne verifica la tesi.

5) Determinare i valori dei parametri reali a e b della funzione $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{2x^2 + 5x - 1}$ in modo che essa abbia la retta $y = 2$ come asintoto orizzontale e un punto stazionario per $x = 1$. In corrispondenza dei valori trovati, stabilire se $f(x)$ presenta ulteriori asintoti.

6) In un sistema di assi cartesiani Oxy , si consideri l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo. Sia t la retta tangente all'iperbole in un suo punto P . Detti A e B i punti in cui t interseca gli assi di riferimento, dimostrare che i triangoli APO e BPO sono equivalenti e che la loro area non dipende dalla scelta di P .

7) Un resistore di resistenza R è percorso da una corrente variabile nel tempo di intensità $I(t) = I_0 \frac{a}{t}$, con $t > 0$ e le costanti positive I_0 e a espresse, rispettivamente, in ampère e in

secondi. Sapendo che la potenza dissipata nel resistore per effetto Joule è $P(t) = RI^2(t)$, determinarne il valor medio nell'intervallo $[2a; 3a]$.

8) Scrive Leonardo Sinisgalli, in un brano tratto da *Furor Mathematicus*: «Avevo in mente un capitolo sulle leggi del caso: volevo trovare le parentele tra il triangolo di Tartaglia, relativo ai coefficienti del polinomio $(a + b)^n$ e il triangolo aritmetico di Pascal, che ci dà la probabilità di fare m volte croce in n partite giuocate a testa e croce».

Descrivere il legame esistente tra i coefficienti binomiali ed il calcolo delle probabilità.

[Prove suppletive: indice](#)

Esame 2024: sessione straordinaria

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

Problemi

1) Sia data la seguente funzione parametrica:

$$y = x^3 + ax^2 + c$$

- Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali a e c ($a \neq 0$), il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di massimo e di minimo relativi.
- Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in $x = -2$ e abbia un flesso di ordinata 6.
- Si disegni quindi il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$, e si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la retta di equazione $x = -2$.
- Si dimostri infine che la funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Successivamente, si applichi alla funzione $f(x)$ la traslazione di vettore $\vec{v}(\alpha, \beta)$. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, affinché la funzione traslata risulti dispari.

2) Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

- Tracciare, nel medesimo sistema di riferimento, il grafico γ_1 della funzione $f(x)$ e il grafico γ_2 della sua funzione derivata, individuando i loro asintoti, estremi e flessi. Successivamente scrivere le coordinate del punto P in cui γ_1 e γ_2 si intersecano.
- La retta di equazione $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, incontra γ_1 e γ_2 , rispettivamente, nei punti P_1 e P_2 . Determinare il valore del parametro t , in modo che la misura del segmento che unisce i due punti abbia misura massima e calcolare il valore di tale misura.
- Sia γ_3 il grafico rappresentativo della funzione $f''(x)$. Calcolare l'area della regione finita delimitata da γ_2 e γ_3 .
- Posto $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, calcolare il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{f'(x)}$ spiegando perché, in $x = 0$, le funzioni $F(x)$ ed $f'(x)$ sono infinitesime dello stesso ordine.

Quesiti

1) Sia data una circonferenza Γ e siano \widehat{ACB} e \widehat{ADB} angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AB , con AC parallelo a DB . Detto O il punto di intersezione di BC e AD , dimostrare che i triangoli ACO e BOD sono isosceli e simili tra loro.

2) Lanciando due dadi regolari a sei facce, qual è la probabilità di:

- ottenere somma 10;
- ottenere per somma un numero multiplo di 2 o di 3;
- ottenere per somma un numero multiplo di 2 e 3.

3) Il centro di una superficie sferica S è il punto di intersezione tra la retta r individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

e la retta t passante per i punti $A(-2, 3, 0)$ e $B(2, -1, 2)$. La superficie S è inoltre tangente al piano α di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$. Qual è l'equazione di S ?

4) Determinare il valore del parametro reale $k > 1$ in modo che il valor medio della funzione

$$f(x) = \ln(x^3) + \frac{3x - 3}{x}$$

sull'intervallo $[1, k]$ sia uguale a $1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

5) Individuare e classificare i punti in cui la funzione $f(x) = |x - 1| + \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ è continua ma non derivabile.

6) Determinare l'equazione di una funzione polinomiale di primo grado $y = f(x)$ tale che

$$\begin{aligned} i) \quad & \int_0^1 f(x) dx = 1; \\ ii) \quad & \int_1^2 f(x) dx = 2. \end{aligned}$$

7) In un sistema di riferimento cartesiano Oxy , l'equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo, rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Si dimostri che le rette tangenti nei suoi vertici sono perpendicolari alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento considerato.

8) Scrive Paolo Giordano ne *La solitudine dei numeri primi*: «I numeri primi sono divisibili soltanto per 1 e per sé stessi. Se ne stanno al loro posto nell'infinita serie dei numeri naturali, schiacciati come tutti fra due, ma un passo in là rispetto agli altri».

Si considerino la funzione $f(x) = x^p$ e la sua derivata $(p-1)$ -esima f^{p-1} . Si può dimostrare che, se p è un numero primo, allora p divide $f^{p-1} + 1$. Verificare la correttezza di tale affermazione per tutti i numeri primi minori di 10.

[Prove suppletive: indice](#)

Esame 2025: sessione suppletiva

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.

Problemi

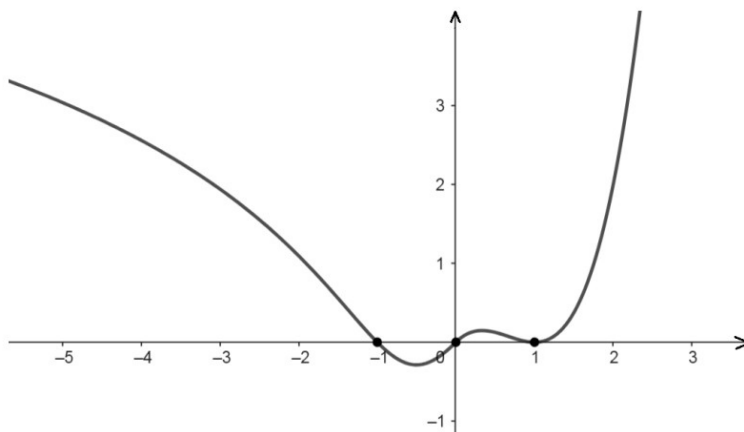
1) Si consideri la famiglia di funzioni $f_a(x) = (x^2 + 1)e^{ax+1}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con γ_a il grafico di f_a .

- Al variare di a , stabilire il numero degli estremi relativi e dei flessi. Determinare il valore positivo di a in modo che il grafico abbia un flesso a tangente orizzontale.
- Studiare la funzione f_1 e tracciare γ_1 . Spiegare perché f_1 è invertibile in \mathbb{R} e indicare con g la sua funzione inversa. Specificare il dominio di g e determinare $g'(e)$.
- Si consideri la funzione $F(t) = \int_t^0 f_1(x) dx$, con $t \leq 0$. Fornire il significato geometrico della funzione $F(t)$ e verificare che $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 3e$.
- Sia P_a un punto sulla curva γ_a , di ascissa $x < 0$, nonché Q_a ed R_a le sue proiezioni sugli assi coordinati. Determinare, se esiste, il valore del parametro a in corrispondenza del quale l'area del rettangolo $P_aQ_aOR_a$ assume valore massimo se $x = -2$.

2) Il grafico γ in figura rappresenta la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(P_2(x)) & \text{se } x < 0 \\ P_3(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

dove $P_2(x)$ e $P_3(x)$ sono, rispettivamente, polinomi di 2° e di 3° grado.



- Utilizzando le informazioni desumibili dal grafico e tenendo conto che γ è tangente alla retta $y = x$ nell'origine e all'asse delle ascisse in $x = 1$, individuare i polinomi $P_2(x)$ e $P_3(x)$.

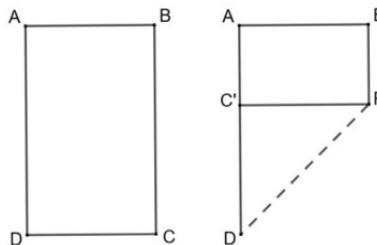
D'ora in avanti, si assuma

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) & \text{se } x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- b) Determinare le coordinate dei punti stazionari e le ascisse dei punti di flesso di f . Al variare del parametro reale k , stabilire il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
- c) Per n intero positivo, determinare $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^n}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n}$. Verificare, inoltre, che esiste un unico valore di n tale che il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ assuma un valore finito non nullo.
- d) Determinare il rapporto tra le aree delle regioni limitate di piano R_1 e R_2 contenute nel I quadrante e così definite:
- R_1 compresa tra γ e la retta di equazione $y = x$;
 - R_2 compresa tra γ e l'asse delle ascisse.

Quesiti

1) Un rettangolo si dice aureo se il rapporto fra i suoi lati è uguale a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sia dato un foglio la cui forma è un rettangolo aureo e lo si indichi con $ABCD$. Dopo aver piegato il foglio come mostrato in figura, verificare che anche il rettangolo $ABPC'$ è aureo. Successivamente, determinare la lunghezza di AD , sapendo che $AC' = 40$ cm.



2) Zoe sfida Eva al seguente gioco: lanciando un dado regolare a sei facce, Zoe segna un punto quando esce il 5 oppure il 6, in caso contrario è Eva a segnare un punto. Vince chi arriva prima a 3 punti. Qual è la probabilità che Zoe vinca con il punteggio 3 - 1?

3) Ci sono 9 matite di 9 colori diversi e 3 cassette indicate con A, B, C . Se 4 matite devono essere messe nel cassetto A , 2 nel cassetto B e 3 nel cassetto C , quante sono le possibili collocazioni?

4) Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ sono date le equazioni di due rette:

$$r: \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x - z = 4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene. Verificare che la sfera di centro $C = (5, -7, 2)$ passante per il punto $P = (1, -1, 0)$ è tangente al piano suddetto.

5) Il triangolo di Reuleaux è una figura utilizzata come elemento architettonico in diverse chiese gotiche. Si costruisce a partire da un triangolo equilatero di lato L , puntando il compasso in ogni suo vertice e tracciando l'arco minore di circonferenza che ha per estremi gli altri due vertici. Il triangolo di Reuleaux è la regione di piano delimitata dai tre archi tracciati.

Dimostrare che il suo contorno ha lunghezza πL ed esprimere la sua area in funzione di L .

6) Sapendo che $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x) \cos(x)$, determinare gli zeri della funzione

$$g(x) = \frac{e^{f(x)} - 1}{x^2} \text{ nell'intervallo } [-\pi; \pi].$$

7) Determinare le coordinate del punto T sulla parabola p di equazione $y = x^2 + x + 3$, nel quale la retta tangente a p risulta parallela alla retta r di equazione $3x + 2y - 1 = 0$. Spiegare perché, sulla parabola p , il punto T è quello che si trova alla minima distanza dalla retta r .

8) Sia data la funzione $f(x) = ax \ln(x) + \frac{b}{x^4} + c \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinare i parametri a, b, c in modo che:

- il $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ esista ed abbia un valore finito;
- $\int_1^e f(x) dx = 1$.

[Prove suppletive: indice](#)

Esame 2025: sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

Problemi

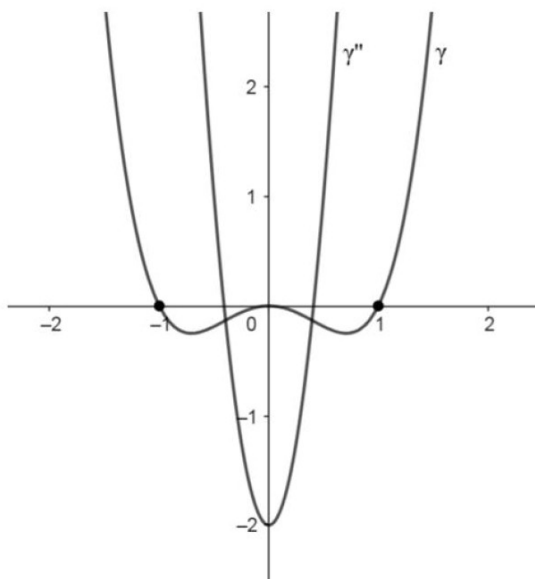
1) Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = ax + b\sqrt{x} + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a) Determinare i valori dei parametri a, b, c in corrispondenza dei quali la funzione abbia il punto di massimo assoluto di coordinate $(4, 8)$ e uno zero in $x = 16$.

D'ora in avanti, si assuma $a = -2, b = 8, c = 0$.

- b) Studiare f e tracciare un suo grafico rappresentativo γ , dopo averne analizzato il segno, la derivabilità, la monotonia e la concavità. Verificare che la funzione non presenta asintoti. Al variare del parametro reale k , stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
- c) Spiegare perché f non è invertibile nel suo dominio e individuare l'intervallo limitato $[\alpha; \beta]$, di massima ampiezza, in cui può essere definita una funzione inversa g . Esprimere analiticamente la funzione g , specificare il suo dominio, le coordinate del punto a tangente verticale e tracciare un suo grafico rappresentativo.
- d) Scrivere l'equazione della retta r , tangente a γ nel suo punto di ascissa 1. Calcolare l'area della regione delimitata da r , da γ e dall'asse delle ordinate. Dimostrare che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, definita per $x > 0$, presenta esattamente uno zero, un punto stazionario e un punto di flesso.

2) Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x P(t)dt$, con $-2 \leq x \leq 2$, in cui $P(t)$ indica un polinomio di terzo grado. I grafici γ e γ'' , in figura, sono rappresentativi di F ed F'' , derivata seconda della funzione F .



- a) Utilizzare le informazioni che si possono ricavare da γ per determinare $P(t)$, considerando che F è una funzione pari e $F(2) = 12$.

D'ora in avanti, si ponga $P(t) = 4t^3 - 2t$.

- b) Ricavare l'espressione analitica della funzione $F(x)$ e determinare le coordinate dei punti di minimo assoluto e dei punti di flesso. Utilizzare le informazioni ottenute su F per tracciare il grafico γ' , rappresentativo della funzione F' , derivata della funzione F .
- c) Al variare dei parametri reali α, β , calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^\alpha}$ e $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{F(x)}{(x \pm 1)^\beta}$.
- d) Sia P un punto di γ'' , di ascissa positiva, e sia r_P la retta tangente a γ'' in P . Determinare le coordinate di P in modo che r_P formi con gli assi coordinati un triangolo di area minima. Successivamente, determinare le coordinate di P affinché r_P formi con gli assi coordinati un triangolo isoscele.

Quesiti

- 1) Determinare il perimetro e l'area di un poligono regolare di lato 4 cm, sapendo che gli angoli interni sono ampi 150° .
- 2) Un'urna contiene 16 palline, numerate da 1 a 16. Vengono estratte in blocco 5 palline dall'urna; qual è la probabilità che il numero più grande tra quelli usciti sia maggiore di 9?
- 3) Quanti sono i numeri naturali di tre cifre tali che la cifra "8" compare almeno una volta? Quanti quelli in cui la cifra "0" compare almeno una volta?
- 4) Mostrare che, nello spazio tridimensionale, il piano di equazione $x + 2y - 3z - 7 = 0$ è tangente alla superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$ e stabilire le coordinate del punto di tangenza T . Scrivere, inoltre, l'equazione di una retta che sia tangente alla superficie S nel punto T .
- 5) Si consideri la famiglia di funzioni $f_k(x) = \ln(1 - kx) + kx^2$, dove k è un parametro reale non nullo. Determinare il valore di k in modo che il grafico della funzione abbia un punto di flesso a tangente orizzontale.
- 6) Sia γ il grafico rappresentativo della curva di equazione $xy = 3$. Determinare le coordinate del punto in cui la retta di equazione $y = 3x - 8$ è normale a γ .
- 7) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2e^{x^2-x} + a & \text{per } x \leq 1 \\ bx^2 + x + 2 & \text{per } x > 1, \end{cases}$ determinare il valore dei parametri reali a, b , affinché la funzione sia continua e derivabile in tutto \mathbb{R} .
- 8) Dimostrare che la curva di equazione $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.