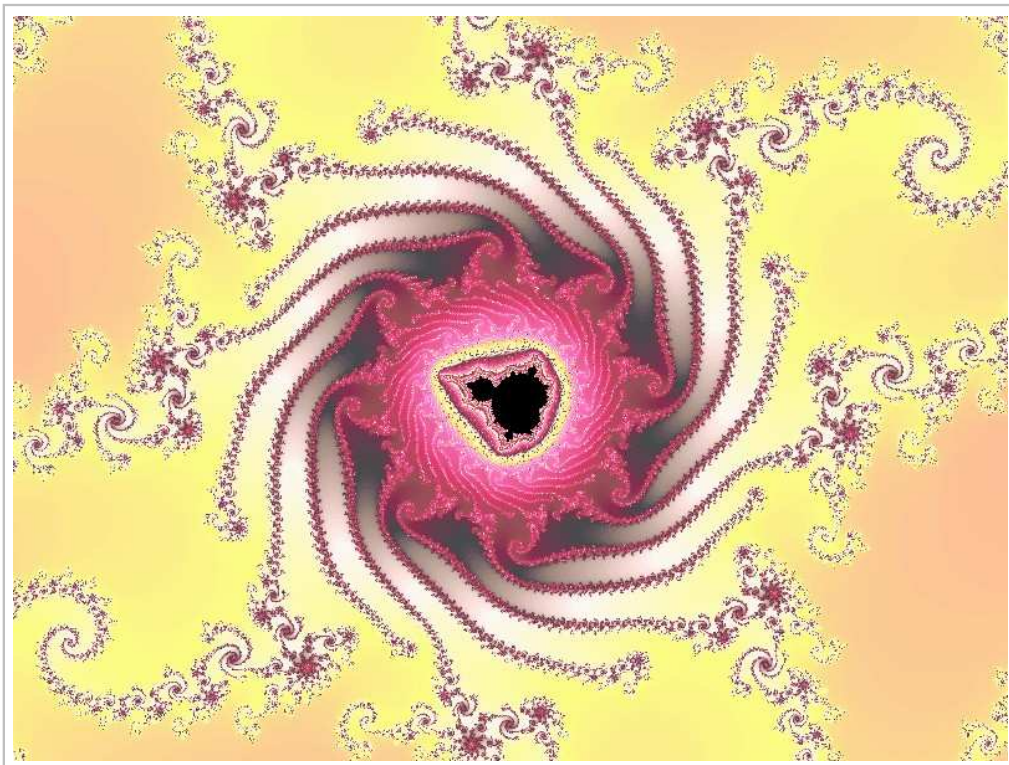


# Problemi d'esame 2001–2014



**LORENZO ROI**

---

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Maggio 2015. 

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato nel punto  $(-0.80321578, -0.17804503)$  e ingrandito  $5.2 \times 10^7$  volte.

Titolo: *Vortice frattale.*

# INTRODUZIONE

Questo lavoro presenta i problemi assegnati dal 2001 agli esami di Stato di liceo scientifico sia per i corsi di ordinamento che per quelli PNI e si affianca ad una [analoga raccolta](#) di temi proposti agli esami nel decennio 1990-2000.

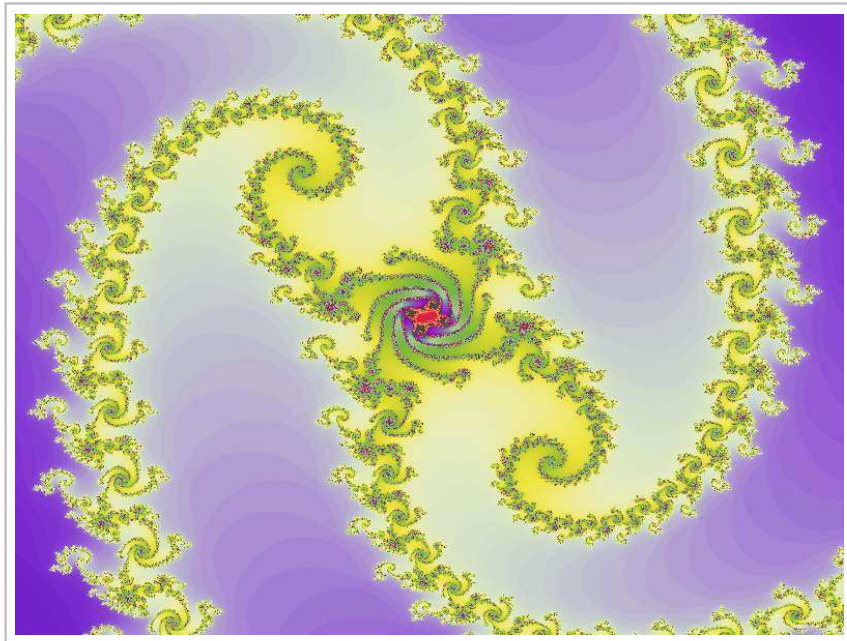
Come nelle precedenti edizioni, le soluzioni vengono sviluppate con gradualità ponendo attenzione anche ai particolari di calcolo dato che non è raro imbattersi in difficoltà proprio su tali aspetti. Quando lo si è ritenuto utile vengono trattati pure diversi approcci risolutivi al medesimo problema.

Le nozioni necessarie sono quelle possedute al termine di un corso di studi secondari di indirizzo scientifico il che significa disporre dell'intero bagaglio di conoscenze sviluppato nell'arco dei cinque anni e non solo di quelle affrontate nell'ultimo anno.

In [appendice](#) si riportano i testi, privi di soluzioni, delle corrispondenti prove suppletive. Per una raccolta dei soli testi assegnati nelle sessioni ordinaria e suppletiva si veda pure [TestiEsame.pdf](#).

Un ringraziamento particolare allo studente Lorenzo Martini per i contributi alla redazione delle figure dell'esame 2011, per le periodiche discussioni in ambito  $\text{T}_\text{E}_\text{X}$  e per l'individuazione di numerosi, e purtroppo immancabili, refusi.

*Lorenzo Roi*



Particolare dell'insieme di Julia del frattale di copertina

# INDICE

Esame 2001	1
problema 1	1
problema 2	1
quesito 1	2
quesito 2	2
quesito 3	2
quesito 4	3
quesito 5	3
quesito 6	3
quesito 7	3
quesito 8	3
quesito 9	4
quesito 10	4
Esame 2001 PNI	24
problema 1	24
problema 2	24
quesito 1	25
quesito 2	25
quesito 3	25
quesito 4	25
quesito 5	25
quesito 6	26
quesito 7	26
quesito 8	26
quesito 9	26
quesito 10	26
Esame 2002	49
problema 1	49
problema 2	49
quesito 1	50

quesito 2 . . . . .	50
quesito 3 . . . . .	50
quesito 4 . . . . .	51
quesito 5 . . . . .	51
quesito 6 . . . . .	51
quesito 7 . . . . .	51
quesito 8 . . . . .	51
quesito 9 . . . . .	52
quesito 10 . . . . .	52
 Esame 2002 PNI . . . . .	 70
problema 1 . . . . .	70
problema 2 . . . . .	70
quesito 1 . . . . .	71
quesito 2 . . . . .	71
quesito 3 . . . . .	71
quesito 4 . . . . .	71
quesito 5 . . . . .	71
quesito 6 . . . . .	72
quesito 7 . . . . .	72
quesito 8 . . . . .	72
quesito 9 . . . . .	72
quesito 10 . . . . .	72
 Esame 2003 . . . . .	 97
problema 1 . . . . .	97
problema 2 . . . . .	97
quesito 1 . . . . .	98
quesito 2 . . . . .	98
quesito 3 . . . . .	98
quesito 4 . . . . .	99
quesito 5 . . . . .	99
quesito 6 . . . . .	99
quesito 7 . . . . .	99
quesito 8 . . . . .	100
quesito 9 . . . . .	100
quesito 10 . . . . .	100
 Esame 2003 PNI . . . . .	 122
problema 1 . . . . .	122
problema 2 . . . . .	122

*Indice*

quesito 1 . . . . .	123
quesito 2 . . . . .	123
quesito 3 . . . . .	123
quesito 4 . . . . .	123
quesito 5 . . . . .	124
quesito 6 . . . . .	124
quesito 7 . . . . .	124
quesito 8 . . . . .	124
quesito 9 . . . . .	124
quesito 10 . . . . .	124
Esame 2004 . . . . .	145
problema 1 . . . . .	145
problema 2 . . . . .	145
quesito 1 . . . . .	146
quesito 2 . . . . .	146
quesito 3 . . . . .	146
quesito 4 . . . . .	146
quesito 5 . . . . .	146
quesito 6 . . . . .	146
quesito 7 . . . . .	146
quesito 8 . . . . .	147
quesito 9 . . . . .	147
quesito 10 . . . . .	147
Esame 2004 PNI . . . . .	167
problema 1 . . . . .	167
problema 2 . . . . .	167
quesito 1 . . . . .	168
quesito 2 . . . . .	168
quesito 3 . . . . .	168
quesito 4 . . . . .	168
quesito 5 . . . . .	168
quesito 6 . . . . .	168
quesito 7 . . . . .	169
quesito 8 . . . . .	169
quesito 9 . . . . .	169
quesito 10 . . . . .	169
Esame 2005 . . . . .	186
problema 1 . . . . .	186

problema 2 . . . . .	186
quesito 1 . . . . .	187
quesito 2 . . . . .	187
quesito 3 . . . . .	187
quesito 4 . . . . .	187
quesito 5 . . . . .	187
quesito 6 . . . . .	188
quesito 7 . . . . .	188
quesito 8 . . . . .	188
quesito 9 . . . . .	188
quesito 10 . . . . .	188
 Esame 2005 PNI . . . . .	 214
problema 1 . . . . .	214
problema 2 . . . . .	214
quesito 1 . . . . .	215
quesito 2 . . . . .	215
quesito 3 . . . . .	215
quesito 4 . . . . .	215
quesito 5 . . . . .	216
quesito 6 . . . . .	216
quesito 7 . . . . .	216
quesito 8 . . . . .	216
quesito 9 . . . . .	216
quesito 10 . . . . .	216
 Esame 2006 . . . . .	 234
problema 1 . . . . .	234
problema 2 . . . . .	234
quesito 1 . . . . .	235
quesito 2 . . . . .	235
quesito 3 . . . . .	235
quesito 4 . . . . .	235
quesito 5 . . . . .	235
quesito 6 . . . . .	235
quesito 7 . . . . .	236
quesito 8 . . . . .	236
quesito 9 . . . . .	236
quesito 10 . . . . .	236
 Esame 2006 PNI . . . . .	 266
problema 1 . . . . .	266

problema 2 . . . . .	266
quesito 1 . . . . .	267
quesito 2 . . . . .	267
quesito 3 . . . . .	267
quesito 4 . . . . .	267
quesito 5 . . . . .	267
quesito 6 . . . . .	267
quesito 7 . . . . .	268
quesito 8 . . . . .	268
quesito 9 . . . . .	268
quesito 10 . . . . .	268
Esame 2007 . . . . .	281
problema 1 . . . . .	281
problema 2 . . . . .	281
quesito 1 . . . . .	282
quesito 2 . . . . .	282
quesito 3 . . . . .	282
quesito 4 . . . . .	282
quesito 5 . . . . .	282
quesito 6 . . . . .	282
quesito 7 . . . . .	283
quesito 8 . . . . .	283
quesito 9 . . . . .	283
quesito 10 . . . . .	283
Esame 2007 PNI . . . . .	312
problema 1 . . . . .	312
problema 2 . . . . .	312
quesito 1 . . . . .	313
quesito 2 . . . . .	313
quesito 3 . . . . .	313
quesito 4 . . . . .	313
quesito 5 . . . . .	313
quesito 6 . . . . .	313
quesito 7 . . . . .	314
quesito 8 . . . . .	314
quesito 9 . . . . .	314
quesito 10 . . . . .	314
Esame 2008 . . . . .	337
problema 1 . . . . .	337

problema 2 . . . . .	337
quesito 1 . . . . .	338
quesito 2 . . . . .	338
quesito 3 . . . . .	338
quesito 4 . . . . .	338
quesito 5 . . . . .	339
quesito 6 . . . . .	339
quesito 7 . . . . .	339
quesito 8 . . . . .	339
quesito 9 . . . . .	339
quesito 10 . . . . .	339
 Esame 2008 PNI . . . . .	 363
problema 1 . . . . .	363
problema 2 . . . . .	363
quesito 1 . . . . .	364
quesito 2 . . . . .	364
quesito 3 . . . . .	364
quesito 4 . . . . .	364
quesito 5 . . . . .	364
quesito 6 . . . . .	364
quesito 7 . . . . .	365
quesito 8 . . . . .	365
quesito 9 . . . . .	365
quesito 10 . . . . .	365
 Esame 2009 . . . . .	 388
problema 1 . . . . .	388
problema 2 . . . . .	388
quesito 1 . . . . .	389
quesito 2 . . . . .	389
quesito 3 . . . . .	389
quesito 4 . . . . .	389
quesito 5 . . . . .	389
quesito 6 . . . . .	390
quesito 7 . . . . .	390
quesito 8 . . . . .	390
quesito 9 . . . . .	390
quesito 10 . . . . .	390
 Esame 2009 PNI . . . . .	 406
problema 1 . . . . .	406

problema 2 . . . . .	406
quesito 1 . . . . .	407
quesito 2 . . . . .	407
quesito 3 . . . . .	407
quesito 4 . . . . .	407
quesito 5 . . . . .	407
quesito 6 . . . . .	407
quesito 7 . . . . .	408
quesito 8 . . . . .	408
quesito 9 . . . . .	408
quesito 10 . . . . .	408
 Esame 2010 . . . . .	 426
problema 1 . . . . .	426
problema 2 . . . . .	426
quesito 1 . . . . .	427
quesito 2 . . . . .	427
quesito 3 . . . . .	427
quesito 4 . . . . .	427
quesito 5 . . . . .	427
quesito 6 . . . . .	427
quesito 7 . . . . .	428
quesito 8 . . . . .	428
quesito 9 . . . . .	428
quesito 10 . . . . .	428
 Esame 2010 PNI . . . . .	 449
problema 1 . . . . .	449
problema 2 . . . . .	449
quesito 1 . . . . .	450
quesito 2 . . . . .	450
quesito 3 . . . . .	450
quesito 4 . . . . .	450
quesito 5 . . . . .	451
quesito 6 . . . . .	451
quesito 7 . . . . .	451
quesito 8 . . . . .	451
quesito 9 . . . . .	451
quesito 10 . . . . .	451
 Esame 2011 . . . . .	 473
problema 1 . . . . .	473

problema 2 . . . . .	473
quesito 1 . . . . .	474
quesito 2 . . . . .	474
quesito 3 . . . . .	474
quesito 4 . . . . .	475
quesito 5 . . . . .	475
quesito 6 . . . . .	475
quesito 7 . . . . .	475
quesito 8 . . . . .	475
quesito 9 . . . . .	475
quesito 10 . . . . .	476
 Esame 2011 PNI . . . . .	 497
problema 1 . . . . .	497
problema 2 . . . . .	497
quesito 1 . . . . .	498
quesito 2 . . . . .	498
quesito 3 . . . . .	498
quesito 4 . . . . .	499
quesito 5 . . . . .	499
quesito 6 . . . . .	499
quesito 7 . . . . .	499
quesito 8 . . . . .	499
quesito 9 . . . . .	499
quesito 10 . . . . .	500
 Esame 2012 . . . . .	 520
problema 1 . . . . .	520
problema 2 . . . . .	520
quesito 1 . . . . .	521
quesito 2 . . . . .	521
quesito 3 . . . . .	521
quesito 4 . . . . .	521
quesito 5 . . . . .	521
quesito 6 . . . . .	522
quesito 7 . . . . .	522
quesito 8 . . . . .	522
quesito 9 . . . . .	522
quesito 10 . . . . .	522
 Esame 2012 PNI . . . . .	 541
problema 1 . . . . .	541

*Indice*

problema 2 . . . . .	541
quesito 1 . . . . .	542
quesito 2 . . . . .	542
quesito 3 . . . . .	542
quesito 4 . . . . .	542
quesito 5 . . . . .	543
quesito 6 . . . . .	543
quesito 7 . . . . .	543
quesito 8 . . . . .	543
quesito 9 . . . . .	543
quesito 10 . . . . .	543
Esame 2013 . . . . .	564
problema 1 . . . . .	564
problema 2 . . . . .	564
quesito 1 . . . . .	565
quesito 2 . . . . .	565
quesito 3 . . . . .	565
quesito 4 . . . . .	565
quesito 5 . . . . .	566
quesito 6 . . . . .	566
quesito 7 . . . . .	566
quesito 8 . . . . .	566
quesito 9 . . . . .	566
quesito 10 . . . . .	567
Esame 2013 PNI . . . . .	588
problema 1 . . . . .	588
problema 2 . . . . .	589
quesito 1 . . . . .	589
quesito 2 . . . . .	589
quesito 3 . . . . .	589
quesito 4 . . . . .	590
quesito 5 . . . . .	590
quesito 6 . . . . .	590
quesito 7 . . . . .	590
quesito 8 . . . . .	590
quesito 9 . . . . .	591
quesito 10 . . . . .	591
Esame 2014 . . . . .	611
problema 1 . . . . .	611

problema 2 . . . . .	612
quesito 1 . . . . .	612
quesito 2 . . . . .	612
quesito 3 . . . . .	612
quesito 4 . . . . .	613
quesito 5 . . . . .	613
quesito 6 . . . . .	613
quesito 7 . . . . .	613
quesito 8 . . . . .	613
quesito 9 . . . . .	613
quesito 10 . . . . .	613
 Esame 2014 PNI . . . . .	 637
problema 1 . . . . .	637
problema 2 . . . . .	637
quesito 1 . . . . .	638
quesito 2 . . . . .	638
quesito 3 . . . . .	638
quesito 4 . . . . .	639
quesito 5 . . . . .	639
quesito 6 . . . . .	639
quesito 7 . . . . .	639
quesito 8 . . . . .	639
quesito 9 . . . . .	639
quesito 10 . . . . .	640
 APPENDICE . . . . .	 669
Esame 2001 suppletiva . . . . .	670
Esame 2001 PNI suppletiva . . . . .	672
Esame 2002 suppletiva . . . . .	674
Esame 2002 PNI suppletiva . . . . .	677
Esame 2003 suppletiva . . . . .	679
Esame 2003 PNI suppletiva . . . . .	681
Esame 2004 suppletiva . . . . .	684
Esame 2004 PNI suppletiva . . . . .	687
Esame 2005 suppletiva . . . . .	690
Esame 2005 PNI suppletiva . . . . .	693
Esame 2006 suppletiva . . . . .	696
Esame 2006 PNI suppletiva . . . . .	699
Esame 2007 suppletiva . . . . .	702
Esame 2007 PNI suppletiva . . . . .	704
Esame 2008 suppletiva . . . . .	706

*Indice*

xiii

Esame 2008 PNI suppletiva . . . . .	708
Esame 2009 suppletiva . . . . .	710
Esame 2009 PNI suppletiva . . . . .	712
Esame 2010 suppletiva . . . . .	715
Esame 2010 PNI suppletiva . . . . .	717
Esame 2011 suppletiva . . . . .	719
Esame 2011 PNI suppletiva . . . . .	721
Esame 2012 suppletiva . . . . .	723
Esame 2012 PNI suppletiva . . . . .	725
Esame 2013 suppletiva . . . . .	727
Esame 2013 PNI suppletiva . . . . .	729
Esame 2014 suppletiva . . . . .	731
Esame 2014 PNI suppletiva . . . . .	733

pagina lasciata intenzionalmente vuota

# ESAME 2001

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • **Problema n. 1**

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali  $x, y$ :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove  $a$  è un parametro reale positivo.

- Esprimere  $y$  in funzione di  $x$  e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ).
- Determinare per quali valori di  $a$  la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta  $t$  di equazione  $x + y = 4$ .
- Scrivere l'equazione della circonferenza  $k$  che ha il centro nel punto di coordinate  $(1, 1)$  e intercetta sulla retta  $t$  una corda di lunghezza  $2\sqrt{2}$ .
- Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da  $k$  è diviso dalla retta  $t$ .
- Determinare per quale valore del parametro  $a$  il grafico, di cui al punto precedente a), risulta tangente alla circonferenza  $k$ .

Soluzione

## • **Problema n. 2**

Considerato un qualunque triangolo  $ABC$ , siano  $D$  ed  $E$  due punti interni al lato  $BC$  tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}.$$

Siano poi  $M$  ed  $N$  i punti medi rispettivamente dei segmenti  $AD$  ed  $AE$ .

- a) Dimostrare che il quadrilatero  $DENM$  è la quarta parte del triangolo  $ABC$ .
- b) Ammesso che l'area del quadrilatero  $DENM$  sia  $\frac{45}{2}a^2$ , dove  $a$  è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo  $\angle ABC$  sia acuto e si abbia inoltre:  $\overline{AB} = 13a$ ,  $\overline{BC} = 15a$ , verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
- c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta  $BC$  e passante per i punti  $M$ ,  $N$ ,  $C$ .
- d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo  $ADC$ .

Soluzione

### Questionario

1. Indicata con  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, si sa che  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow a$ , essendo  $l$  ed  $a$  numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che  $f(a) = l$  e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

2. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che  $f(0) = 2$ . calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x},$$

dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali.

Soluzione

3. Si consideri il cubo di spigoli  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ , in cui due facce opposte sono i quadrati  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ . Sia  $E$  il punto medio dello spigolo  $AB$ . I piani  $ACC'A'$  e  $D'DE$  dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

Soluzione

4. Un tronco di piramide ha basi di aree  $B$  e  $b$  ed altezza  $h$ . Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume  $V$  è espresso dalla seguente formula:  $V = (1/3)h(B + b + \sqrt{Bb})$ . In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

Soluzione

5. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo  $[a, b]$  e tale che, per ogni  $x$  di tale intervallo, risulti  $f'(x) = 0$ . Dimostrare che  $f(x)$  è costante in quell'intervallo.

Soluzione

6. Dimostrare che si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove  $n, k$  sono numeri naturali qualsiasi, con  $n > k > 0$ .

Soluzione

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

- a) area massima e perimetro massimo;
- b) area massima e perimetro minimo;
- c) area minima e perimetro massimo;
- d) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Soluzione

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove  $a$  è un parametro reale non nullo, determinare i valori di  $a$  per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

Soluzione

9. Il limite della funzione

$$\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x},$$

quando  $x$  tende a  $+\infty$ ,

- a) è uguale a 0;
- b) è uguale ad 1;
- c) è un valore diverso dai due precedenti;
- d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Soluzione

10. Si consideri la funzione

$$\frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}.$$

Stabilire se si può calcolarne il limite per  $x \rightarrow +\infty$  e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

a) Il testo del problema fornisce la relazione

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \\ a > 0 \end{cases}$$

che può esistere solo se  $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ . Solo ora è possibile e conveniente esplicitare nell'equazione la variabile  $y$  come suggerito dal testo

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \iff \frac{1}{y} = \frac{x-a}{ax} \quad \cdot axy \neq 0$$

e ottenere  $ax = y(x-a)$ . Ponendo l'ulteriore condizione  $x-a \neq 0$  abbiamo il sistema

$$\gamma : \begin{cases} y = \frac{ax}{x-a} \\ x \neq 0 \wedge x \neq a \\ y \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

che descrive completamente la funzione  $\gamma$  da studiare. Va notato comunque che la sola equazione

$$y = \frac{ax}{x-a}$$

rappresenta, al variare di  $a$ , un fascio di funzioni omografiche ossia di iperboli equilateri riferite ai propri asintoti e traslate: è difatti un rapporto di due polinomi di I grado. Lo studio del grafico può quindi proseguire sfruttando le conoscenze acquisite nella Geometria Analitica.

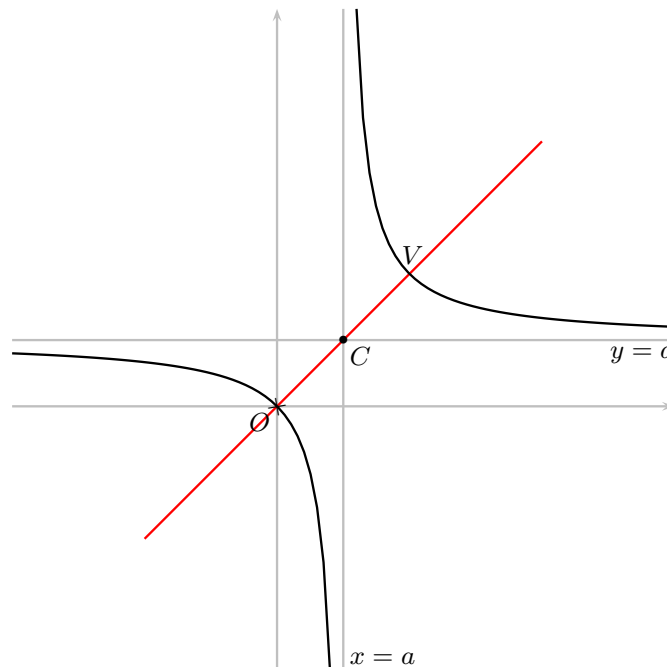
Essendo comunque un fascio verifichiamo l'esistenza o meno di punti fissi cioè di punti appartenenti a tutte le curve del fascio. Questi si ottengono fattorizzando il parametro

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \implies \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{a} \implies a(x+y) = xy$$

da cui  $a(x+y) - xy = 0$ . Indipendentemente da  $a$  i punti che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \end{cases} \implies \begin{cases} y=-x \\ xy=0 \end{cases}$$

saranno i punti fissi di  $\gamma$ . Il sistema è risolto solo da  $x=0 \wedge y=0$  per cui a causa delle condizioni espresse in (1) il fascio  $\gamma$  è formato da iperboli equilateri private tutte del vertice  $O(0,0)$ . L'altro vertice di questo fascio è di conseguenza un punto variabile.



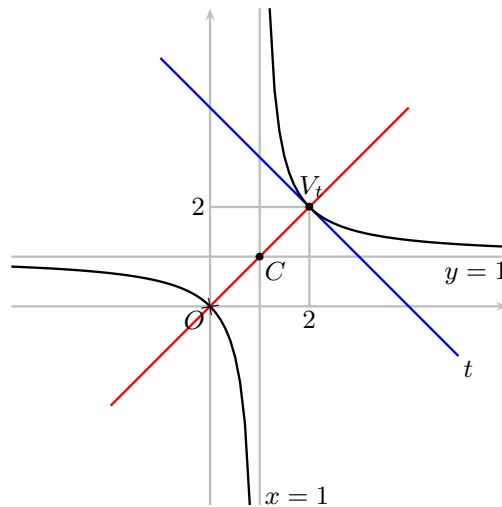
**Fig. 1.** Grafico di  $\gamma$ .

Gli asintoti hanno equazioni  $x = a$  e  $y = a/1 = a$ , quest'ultimo ottenuto come rapporto dei coefficienti dei termini di I grado del numeratore e del denominatore. Il grafico è pertanto dato dalla fig. 1 dove si è definito il punto  $C(a, a)$ , intersezione dei due asintoti. Il luogo di questi punti è evidentemente la retta di equazione  $y = x$ , rappresentata in rosso nella figura. Va inoltre sottolineato che l'origine  $O$ , pur essendo un punto fisso delle curve rappresentate dall'equazione  $y = ax/(x-a)$ , non lo è invece per le curve del sistema (1).

b) La forma esplicita della retta  $t: y = -x + 4$  mostra la sua perpendicolarità alla bisettrice  $y = x$ , luogo dei punti  $C$  ma pure dei vertici delle iperboli. Se quindi indichiamo con  $V$  il vertice di ascissa maggiore, le sue coordinate discendono immediatamente dal sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{ax}{x-a} \end{cases} \iff x = \frac{ax}{x-a}$$

dal quale, essendo  $x \neq 0$ , troviamo  $x - a = a$ ,  $x = 2a = y$ : pertanto  $V(2a, 2a)$ . La tangenza tra  $\gamma$  e  $t$  implica che sia  $V \in t$  ossia  $2a = -2a + 4$  dalla quale  $a = 1$  e  $V_t(2, 2)$  (fig. 2).



**Fig. 2.** Grafico di  $\gamma$  e retta tangente  $t$ .

Se si ricerca la condizione di intersezione allora dovrà essere  $a < 1$  ottenuta ponendo  $x_V < x_{V_t}$  (fig. 2) cioè  $2a < 2$  dovendo in tal caso  $V$  appartenere al semipiano descritto dalla  $y < -x + 4$ . In definitiva  $t \cap \gamma \neq \emptyset$  se  $0 < a \leq 1$ .

c) Per determinare l'equazione della circonferenza  $k$  di centro  $C_1(1, 1)$  (fig. 3) troviamo il raggio seguendo un approccio geometrico. Poiché  $C_1$  appartiene alla bisettrice del I quadrante troviamo la distanza  $\overline{C_1H}$  di  $C_1$  dalla retta  $t$  e

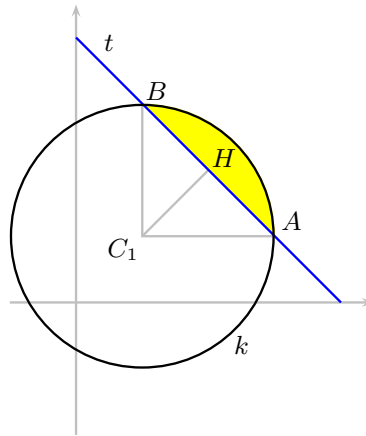
quindi, dato che è noto il valore di  $\overline{AH} = \overline{AB}/2 = \sqrt{2}$  possiamo applicare il teorema di Pitagora a  $\triangle AHC_1$  per determinare il raggio  $\overline{AC_1}$ . Pertanto

$$\overline{C_1H} = \frac{|1 - (-1 + 4)|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

da cui

$$\overline{C_1H}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{AC_1}^2 \implies (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = \overline{AC_1}^2 \implies \overline{AC_1} = 2.$$

L'equazione richiesta è  $k : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$  oppure  $k : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ .



**Fig. 3.** Circonferenza, corda  $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$  e segmento circolare.

d) Determiniamo ora le coordinate dei punti  $A$  e  $B$  (fig. 3) intersezioni di  $t$  con  $k$ :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ y = -x + 4 \end{cases} \implies (x-1)^2 + (-x+3)^2 = 4 \implies x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Quest'ultima equazione possiede le soluzioni  $x_B = 1$  e  $x_A = 3$  cosicché i punti cercati sono  $A(3, 1)$ ,  $B(1, 3)$ . Poiché l'ordinata di  $A$  e l'ascissa di  $B$  risultano rispettivamente uguali all'ordinata e all'ascissa di  $C_1$ , ne segue che l'angolo  $\angle BC_1A$  è retto e  $\triangle C_1AB$  è rettangolo. L'area di un segmento circolare (per es. quello individuato da  $t$  e dall'arco minore  $AB$ , in giallo nella fig. 3) si trova come differenza fra l'area  $\mathcal{A}(\text{sett } C_1ABC_1) = \frac{1}{2}\alpha r^2$  di un settore circolare definito dall'angolo al centro  $\alpha$  (in radianti), e l'area di un triangolo, in questo caso  $\mathcal{A}(\triangle C_1AB)$ . Poiché questa vale

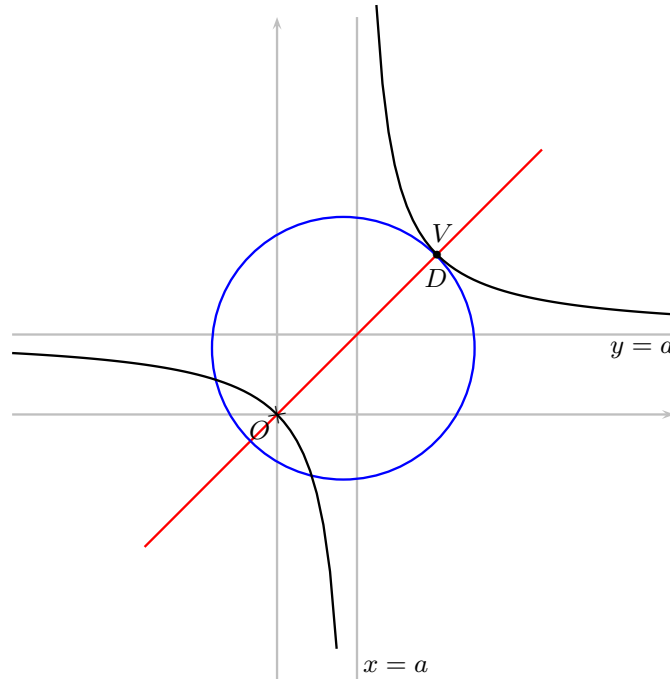
$$\mathcal{A}(\triangle C_1AB) = \frac{1}{2}\overline{AC_1} \cdot \overline{BC_1} = 2$$

ed essendo  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  risulta  $\mathcal{A}(\text{sett } C_1ABC_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \overline{AC_1}^2 = \pi$  da cui

$$\mathcal{A}(\text{seg min } AB) = \mathcal{A}(\text{sett } C_1ABC_1) - \mathcal{A}(\triangle C_1AB) = \pi - 2.$$

L'area invece del segmento corrispondente all'arco maggiore  $AB$  ne discende immediatamente essendo  $\pi \overline{AC_1}^2 = 4\pi$  l'area del cerchio:

$$\mathcal{A}(\text{sett magg } AB) = 4\pi - (\pi - 2) = 3\pi + 2.$$

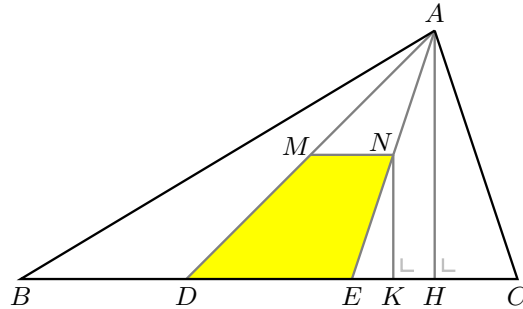


**Fig. 4.** Tangenza di  $\gamma$  con la circonferenza  $k$ .

e) Dato che entrambe le curve  $\gamma$  e  $k$  sono simmetriche rispetto alla retta bisettrice del I e III quadrante (fig. 4), queste potranno essere tangenti solo se il vertice variabile  $V$  (con coordinate dipendenti da  $a$ ) di  $\gamma$  coincide con il punto  $D$ , intersezione di  $k$  con la bisettrice. Determiniamo quest'ultimo dal sistema

$$\begin{cases} y = x \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases} \implies (x-1)^2 + (x-1)^2 = 4,$$

e quindi  $(x-1)^2 = 2$ . L'equazione fornisce i valori  $x = 1 \pm \sqrt{2}$  dei quali solo  $x_D = 1 + \sqrt{2}$  è accettabile dato che  $D$  giace nel I quadrante. Pertanto  $D(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$  e imponendo  $V \equiv D$  discende  $2a = 1 + \sqrt{2}$  e  $a = (1 + \sqrt{2})/2$ .

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)**Fig. 1.** Triangolo  $ABC$  e trapezio  $DENM$ .

a) Costruita la fig. 1, è per costruzione  $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ : inoltre  $\overline{AM} = \overline{MD}$  e  $\overline{AN} = \overline{NE}$ . Essendo quindi  $M$  ed  $N$  i punti medi dei lati  $AD$  e  $AE$  di  $\triangle ADE$ , per un teorema di Geometria, conseguenza del t. di Talete, che afferma che il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente con la sua metà, possiamo scrivere  $MN \parallel DE$  e  $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{DE}$ . Poiché, per costruzione risulta  $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$  si ottiene che

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overline{BC}\right) = \frac{\overline{BC}}{6}.$$

Se  $H$  e  $K$  sono i piedi delle altezze condotte rispettivamente da  $A$  e  $N$  al lato  $BC$ , è pure  $\triangle NEK \sim \triangle AEH$  cosicché  $\overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AH}$ . Per tutto ciò il quadrilatero  $DENM$  è un trapezio con altezza pari alla metà di quella del triangolo  $ABC$ . La sua area è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(DENM) &= \frac{1}{2}(\overline{DE} + \overline{MN}) \cdot \overline{NK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overline{BC} + \frac{1}{6}\overline{BC}\right) \cdot \frac{1}{2}\overline{AH} \\ &= \frac{1}{4}\overline{AH}\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overline{AH} \cdot \overline{BC}\right) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(\triangle ABC) \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare.

b) Posto che

$$\mathcal{A}(DENM) = \frac{45}{2}a^2, \quad \angle ABC < \frac{\pi}{2} \quad \overline{AB} = 13a, \quad \overline{BC} = 15a,$$

discende che

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = 4\mathcal{A}(DENM) = 4\left(\frac{45}{2}a^2\right) = 90a^2$$

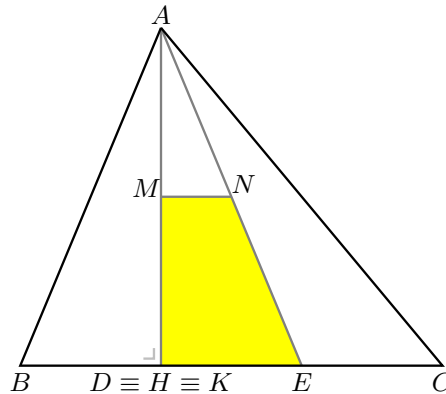
dalla quale deduciamo

$$\frac{15a \cdot \overline{AH}}{2} = 90a^2 \implies \overline{AH} = 12a.$$

Per verificare che il quadrilatero  $DENM$  risulta un trapezio rettangolo deve sussistere una delle due possibilità:

- a) se  $\angle DEA = \frac{\pi}{2}$  allora  $AE \equiv AH$  e deve valere il t. di Pitagora tra le misure dei segmenti  $AB$ ,  $BE$ ,  $AE$  ossia  $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$  oppure  
 b) se  $\angle ADE = \frac{\pi}{2}$ ,  $AD \equiv AH$  e  $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$ .

Nel primo caso risulta  $(13a)^2 - (10a)^2 \neq (12a)^2$ ; nel secondo invece  $(13a)^2 - (5a)^2 = (12a)^2$  in quanto  $(169 - 25)a^2 = 144a^2 = (12a)^2$ . La rappresentazione corretta è in questo caso la fig. 2.



**Fig. 2.** Triangolo  $ABC$  di area assegnata e trapezio  $DENM$ .

c) Riferiamo la figura del punto precedente ad un sistema cartesiano isometrico con origine nel punto  $M$  e assi disposti parallelamente a  $MN$  e  $MA$  (fig. 3).

Le coordinate dei vari punti sono

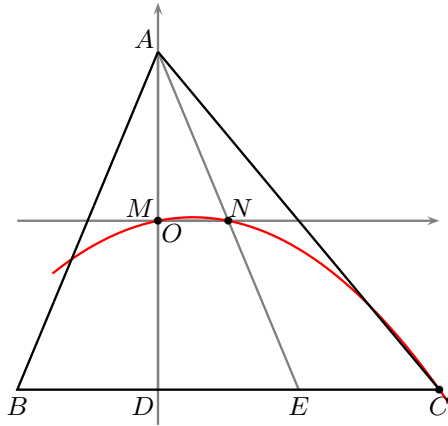
$$M \equiv O(0,0), \quad N\left(\frac{5}{2}a, 0\right), \quad B(-5a, -6a), \\ D(0, -6a), \quad E(5a, -6a), \quad C(10a, -6a), \quad A(0, 6a)$$

e dove si è tenuto conto del fatto che  $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 6a$ .

L'equazione della parabola  $p$  dovrà essere del tipo

$$y = \alpha(x - x_M)(x - x_N) = \alpha(x - 0)\left(x - \frac{5}{2}a\right) = \alpha x \left(x - \frac{5}{2}a\right)$$

per poter assicurare il passaggio per  $M$  e  $N$ . L'unica condizione che va posta è quindi l'appartenenza di  $C$  a  $p$  e ciò comporta che



**Fig. 3.** Triangolo  $ABC$ , sistema cartesiano con  $O \equiv M$  e parabola per  $M, N, C$ .

$$-6a = \alpha(10a) \left(10a - \frac{5}{2}a\right) \implies -6a = \alpha \frac{150}{2}a^2 \implies \alpha = -\frac{6}{75a}$$

e quindi

$$p: y = -\frac{6}{75a} \cdot \left(x - \frac{5}{2}a\right) = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x.$$

d) Per determinare le aree richieste conviene studiare le possibili (ulteriori) intersezioni tra la parabola e la retta  $AC$ . Quest'ultima ha equazione

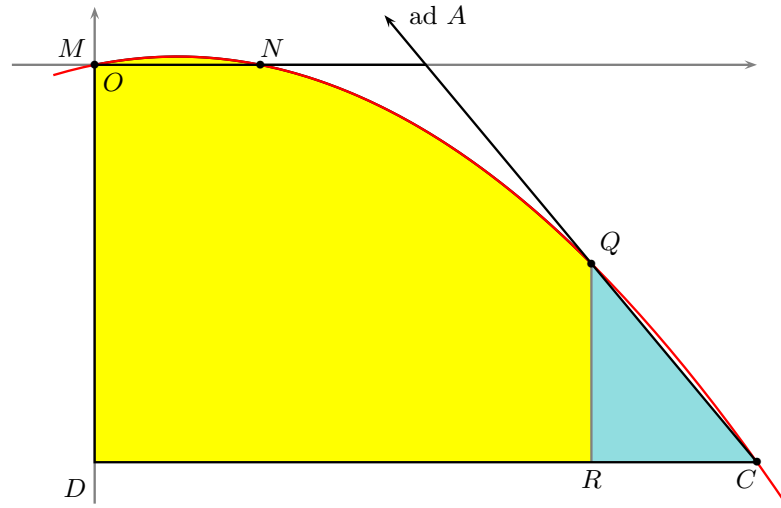
$$AC: y - 6a = \frac{6a - (-6a)}{0 - 10a} \cdot (x - 0) \implies AC: y = -\frac{6}{5}x + 6a$$

per cui

$$AC \cap p \implies \begin{cases} y = -\frac{6}{5}x + 6a \\ y = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x \end{cases} \implies -\frac{6}{5}x + 6a = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x:$$

riscritta l'ultima equazione come  $2x^2 - 35ax + 150a^2 = 0$  ne discendono le soluzioni  $x_c = 10a$  e l'ulteriore  $x_Q = \frac{15}{2}a$ . In aggiunta al punto  $C$  previsto, esiste pertanto un ulteriore punto di intersezione di ascissa  $\frac{15}{2}a$  e ordinata  $y = -\frac{6}{5} \left(\frac{15}{2}a\right) + 6a = -3a$ : sia  $Q(\frac{15}{2}a, -3a)$ .

Un ingrandimento della figura precedente porta ad individuare quattro regioni finite coinvolgenti la parabola  $p$  e  $\triangle ADC$ : di queste solo tre risultano interne a



**Fig. 4.** Regioni sottostanti la parabola  $p$  e interne a  $\triangle ADC$ .

$\triangle ADC$  (le due in colore nella fig. 4 e la terza al di sopra di quella gialla delimitata dai punti  $M, N, Q, A$ ).

Sia quindi  $\mathcal{A}_1$  l'area della regione delimitata dai punti  $M, D, R, Q, N$  (in giallo nella fig. 4), con  $R(\frac{15}{2}a, -6a)$ . Considerando che la retta  $DC$  possiede equazione  $y = -6a$ ,  $\mathcal{A}_1$  risulta un trapezoide delimitato da  $p$  e dalla retta  $DC$  per cui si calcola con l'integrale definito

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{\frac{15}{2}a} \left[ -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x - (-6a) \right] dx.$$

Risolvendolo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \left[ -\frac{2}{25a} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{10} + 6ax \right]_0^{\frac{15}{2}a} \\ &= -\frac{2}{75a} \cdot \frac{15^3}{2^3} a^3 + \frac{15^2}{10 \cdot 4} a^2 + 6a \cdot \frac{15}{2} a \\ &= -\frac{225}{20} a^2 + \frac{45}{8} a^2 + 45a^2 = \frac{315}{8} a^2. \end{aligned}$$

La prima regione in cui è suddiviso il triangolo  $ADC$  è data dall'unione delle due regioni in colore nella fig. 4 cosicché l'area si ottiene da

$$\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}(\triangle QRC) = \frac{315}{8} a^2 + \frac{1}{2} \overline{RC} \cdot \overline{QR} = \frac{315}{8} a^2 + \frac{15}{4} a^2 = \frac{345}{8} a^2.$$

Per differenza si ottiene infine l'altra area richiesta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{II} &= \mathcal{A}(\triangle ADC) - \mathcal{A}_I \\
 &= \frac{1}{2} \overline{DC} \cdot \overline{AD} - \frac{345}{8} a^2 = \frac{1}{2} \cdot 10a \cdot 12a - \frac{345}{8} a^2 \\
 &= 60a^2 - \frac{345}{8} a^2 = \frac{135}{8} a^2.
 \end{aligned}$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

L'ipotesi del quesito consiste nell'esistenza di

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad a, l \in \mathbb{R}.$$

Questa ipotesi non può essere sufficiente per concludere circa l'esistenza di  $f(x)$  nel punto  $a$  (cioè  $f(a) \in \mathbb{R}$ ) né, tanto meno, può discendere la sua continuità (cioè  $l = f(a)$ ). Per dimostrare quest'ultima affermazione è sufficiente proporre un esempio. Difatti la funzione

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

soddisfa alla prima condizione essendo manifestamente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

ma ciò non assicura che sia  $f(0) = 1$  in quanto  $f$  nemmeno esiste in  $x = 0$ .

Se comunque fosse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

allora la funzione  $f$  sarebbe continua nel punto  $a$ : ma sappiamo pure che non tutte le funzioni sono continue in  $\mathbb{R}$ .

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x},$$

con  $f(x)$  continua in  $\mathbb{R}$  e tale che  $f(0) = 2$ . La forma del limite proposto evidenzia al numeratore la funzione integrale  $F(x)$  della funzione  $f$  e al denominatore il termine  $x$  che coincide con l'ampiezza dell'intervallo  $[0, x]$ . Una riscrittura del tipo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right] \cdot \frac{1}{2e^x} \quad (1)$$

permette quindi di riconoscere nel primo fattore il valore medio integrale della funzione  $f$  nell'intervallo  $[0, x]$ . Studiamo perciò singolarmente ciascuno dei due limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2e^x}.$$

Il secondo è immediato essendo  $g(x) = 1/(2e^x)$  una funzione continua in  $x = 0$ : è pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2}.$$

Per il teorema della media integrale, l'argomento del I limite si può identificare con il valor medio di  $f$  nell'intervallo  $[0, x]$  per cui risulta

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(\bar{x}) \quad \text{con} \quad 0 < \bar{x} < x.$$

Poiché se  $x \rightarrow 0$  dev'essere pure  $\bar{x} \rightarrow 0$ , allora il limite si riscrive

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{\bar{x} \rightarrow 0} f(\bar{x}).$$

Infine essendo  $f(x)$  continua in  $\mathbb{R}$  e quindi anche in  $0$  e valendo per ipotesi  $f(0) = 2$ , si ha

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} f(\bar{x}) = f(0) = 2.$$

In definitiva, si può ora applicare il teorema del prodotto dei limiti al limite richiesto (1), cosicché si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right] \cdot \frac{1}{2e^x} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

• Un altro modo per giungere a tale risultato consiste nell'osservare che, per il teorema di Torricelli–Barrow, la funzione integrale a numeratore oltreché derivabile è continua in  $[0, x]$  e possiede limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t) dt = F(0) = 0.$$

Poiché è nullo pure il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2xe^x = 0$$

il limite proposto rientra nel caso di indeterminazione  $0/0$ . D'altra parte, le due funzioni soddisfano entrambe alle ipotesi del t. di De L'Hôpital relative alla

continuità e derivabilità cosicché conviene analizzare se esiste il limite del rapporto delle loro derivate. Poiché dal t. di Torricelli–Barrow la derivata della funzione integrale risulta essere quella integranda nell'estremo superiore,

$$D \left[ \int_0^x f(t) dt \right] = f(x)$$

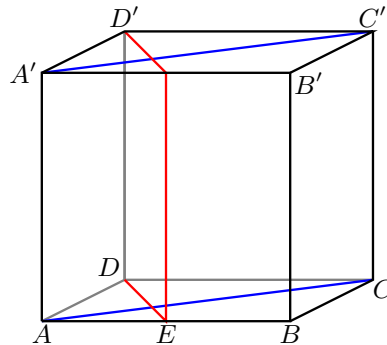
allora il limite del rapporto delle derivate è (risulta pure  $D(2xe^x) = 2e^x(1+x)$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2e^x(1+x)} = \frac{f(0)}{2e^0(0+1)} = 1.$$

dove si è sfruttata la continuità della funzione ad argomento del limite e di ciascuna componente. Visto che il limite esiste è soddisfatta pure l'ultima ipotesi del t. di De L'Hôpital e quindi possiamo concludere che il limite richiesto è pari ad 1.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

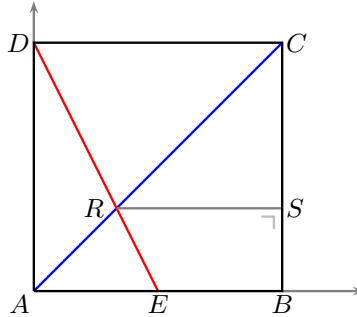
La **figura** sottostante mostra il cubo del problema e, in colore, i piani  $ACC'A'$  e  $D'DE$  che lo sezionano. In tal modo si formano 4 prismi, tutti aventi la medesima altezza, pari al lato  $AA'$  del cubo, per cui i rispettivi volumi differiscono solo per le diverse aree di base. Per tale motivo il problema può essere affrontato considerando una sezione piana parallela alla base  $ABCD$  o coincidente con essa.



**Fig. 1.** Il cubo sezionato  $ABCD A' B' C' D'$ .

Posto, per comodità  $\overline{AA'} = \overline{AB} = 2a$  e fatta coincidere l'origine di un sistema cartesiano con  $A$  e assi paralleli ai lati  $AB$  e  $AD$  (figura 2), è di conseguenza  $D(0, 2a)$ ,  $B(2a, 0)$ ,  $C(2a, 2a)$ ,  $E(a, 0)$ . Detta  $R$  l'intersezione di  $AC$  con  $DE$ , l'equazione della retta  $AC$  è quella della bisettrice del quadrante  $AC : y = x$  mentre per  $DE$

$$DE : y - y_D = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} (x - x_D) \implies y - 2a = \frac{2a - 0}{0 - a} (x - 0)$$



**Fig. 2.** Sezione piana della base del cubo.

da cui  $DE : y = -2x + 2a$ .

Le coordinate di  $R$  sono le soluzioni del sistema

$$\{R\} = AC \cap DE : \begin{cases} y = x \\ y = -2x + 2a \end{cases} \implies x = -2x + 2a$$

per cui

$$R \left( \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a \right) :$$

e di conseguenza il punto  $S$ , piede dell'altezza condotta da  $R$  al lato  $BC$ , è caratterizzato dalle coordinate  $S(2a, \frac{2}{3}a)$ .

Il calcolo dell'area del quadrilatero  $EBCR$  si può suddividere nella somma delle aree del triangolo  $RSC$  e del trapezio  $EBSR$  cosicché

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(EBCR) &= \mathcal{A}(EBSR) + \mathcal{A}(\triangle RSC) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{EB} + \overline{RS}) \cdot \overline{BS} + \frac{1}{2}\overline{RS} \cdot \overline{SC} \\ &= \frac{1}{2}[a - (2a - x_R)] \cdot y_S + \frac{1}{2}(2a - x_R)(2a - y_S) \\ &= \frac{1}{2} \left[ a + \left( 2a - \frac{2}{3}a \right) \right] \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{2} \left( 2a - \frac{2}{3}a \right) \left( 2a - \frac{2}{3}a \right) \\ &= \frac{7}{9}a^2 + \frac{8}{9}a^2 = \frac{5}{3}a^2. \end{aligned}$$

Essendo

$$\mathcal{A}(\triangle AER) = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot |y_R| = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}a = \frac{a^2}{3}$$

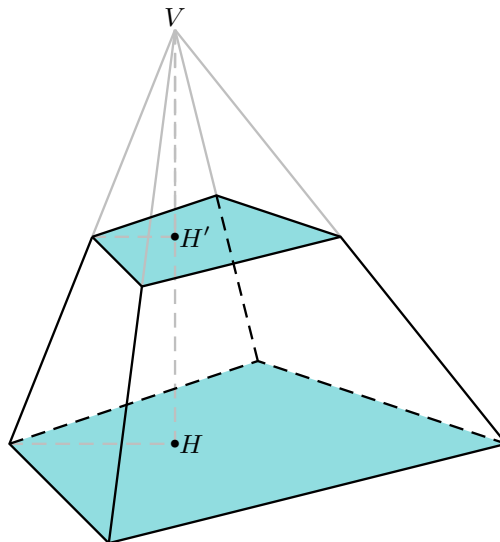
ne discende immediatamente per i volumi

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{V}(\text{prisma di base } AER)}{\mathcal{V}(\text{prisma di base } EBCR)} &= \frac{\mathcal{A}(EBCR) \cdot \overline{AA'}}{\mathcal{A}(\triangle AER) \cdot \overline{AA'}} \\ &= \frac{\mathcal{A}(EBCR)}{\mathcal{A}(\triangle AER)} = \frac{5}{3}a^2 \cdot \frac{3}{a^2} = 5 \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Consideriamo un tronco di piramide avente per basi due poligoni di  $n$  lati (in fig. 1,  $n = 4$ ).



**Fig. 1.** Tronco di piramide ed altezze.

Essendo i poligoni di **figura** ottenuti dall'intersezione di due piani paralleli con l'angoloide di vertice  $V$ , essi risultano simili e, per noti teoremi di Geometria Solida,

- il rapporto di similitudine è uguale al rapporto tra le distanze dal vertice dei rispettivi piani,
- le aree dei suddetti poligoni simili stanno tra loro come i quadrati delle distanze dal vertice dei rispettivi piani.

Posto per comodità di scrittura  $Y = \overline{VH}$  e  $y = \overline{VH'}$  essendo  $\overline{VH}$  e  $\overline{VH'}$  le misure delle altezze delle due piramidi rispettivamente di area di base  $B$  e  $b$ , il teorema b) afferma

$$\frac{B}{b} = \frac{Y^2}{y^2} \quad (1)$$

Il volume del tronco di piramide si ottiene per differenza tra la piramide di base maggiore con quella di base minore

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{tronco}) &= \mathcal{V}(\text{piramide base } B) - \mathcal{V}(\text{piramide base } b) \\ &= \frac{1}{3}BY - \frac{1}{3}by \end{aligned}$$

ma per la (1) quest'ultima si può riscrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{tronco}) &= \frac{1}{3}(BY - by) \quad \text{ed eliminando } B \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{Y^2}{y^2} bY - by \right) = \frac{1}{3} b \left( \frac{Y^3 - y^3}{y^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{y^2} \cdot (Y^3 - y^3). \end{aligned}$$

Introdotta l'altezza  $h = Y - y$  del tronco di cono e ricordata l'identità  $Y^3 - y^3 = (Y - y)(Y^2 + y^2 + Yy)$ , l'ultima relazione diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{tronco}) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{y^2} (Y - y)(Y^2 + y^2 + Yy) \\ &= \frac{1}{3} bh \left( \frac{Y^2 + y^2 + Yy}{y^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} bh \left( \frac{Y^2}{y^2} + 1 + \frac{Y}{y} \right) \end{aligned}$$

ma per il rapporto di similitudine già discusso ed espresso dalla (1) si trova

$$\mathcal{V}(\text{tronco}) = \frac{1}{3} bh \left( \frac{B}{b} + 1 + \sqrt{\frac{B}{b}} \right).$$

In definitiva, riportando il fattore  $b$  entro parentesi,

$$\mathcal{V}(\text{tronco}) = \frac{1}{3} h \left( B + b + \sqrt{Bb} \right)$$

che è quanto si chiedeva di dimostrare.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La risposta al quesito consiste nella ben nota dimostrazione di un corollario al teorema di Lagrange del valor medio. Sia pertanto

- a)  $f$  una funzione reale di variabile reale,
- b) derivabile in  $[a, b]$  e tale che
- c)  $f'(x) = 0$  per  $\forall x \in [a, b]$ .

Consideriamo l'intervallo  $[a, x]$  con l'estremo superiore  $x$  elemento qualsiasi interno all'intervallo  $[a, b]$ . In tale intervallo la funzione  $f$  soddisfa a tutte le ipotesi del t. di Lagrange e pertanto, in base ad esso, esiste  $x_1 \in ]a, x[$  tale che

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x_1) \quad \text{con} \quad a < x_1 < x.$$

Essendo  $x_1$  un elemento dell'intervallo  $[a, b]$  per l'ipotesi c) risulta  $f'(x_1) = 0$  cosicché il rapporto a primo membro dev'essere nullo e di conseguenza anche il termine a numeratore  $f(x) - f(a) = 0$ . Da quest'ultima discende che  $f(x) = f(a)$  ma data l'arbitrarietà di  $x$  ciò equivale ad affermare la costanza della funzione per  $\forall x \in [a, b]$  c.v.d.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito chiede di dimostrare la nota identità di Stifel che si incontra nell'ambito del Calcolo Combinatorio e in particolare nel contesto delle proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \quad (1)$$

Iniziamo pertanto dalla definizione di coefficiente binomiale data in termini dei fattoriali di  $n$  e  $k$  e della loro differenza

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{con} \quad 0 < k < n :$$

ne segue che i due addendi presenti a secondo membro dell'identità (1) si riscrivono

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

e

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Sommando membro a membro si giunge a

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} :$$

ora, tenuto presente che  $k! = k \cdot (k-1)!$  e, analogamente,  $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1)!$  si riconosce che il minimo comun denominatore delle frazioni a secondo membro è  $k!(n-k)!$  per cui discende

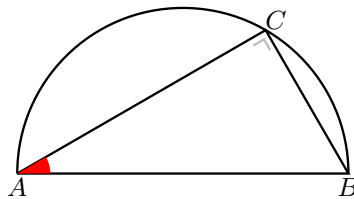
$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (n-k+k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \quad \text{ma } (n-1)!n = n! \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La risposta al quesito è immediata nel caso dell'area del triangolo: difatti tutti i triangoli inscritti in un semicerchio possiedono la medesima base che è il diametro del cerchio. Ne segue che, tra questi, il triangolo isoscele avrà area massima in quanto è pure il triangolo inscritto che possiede la massima altezza.

Volendo tradurre il problema in termini algebrici poniamo  $x = \angle CAB$  (fig. 1) con  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e  $\overline{AB} = 2r$ . Ne segue che  $\overline{AC} = \overline{AB} \cos x = 2r \cos x$  e  $\overline{BC} = \overline{AB} \sin x = 2r \sin x$  e l'area è



**Fig. 1.** Triangolo inscritto in un semicerchio.

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} (2r \sin x \cdot 2r \cos x) = 2r^2 \sin x \cos x = r^2 \sin 2x.$$

Tale funzione è massima quando  $\sin 2x = 1$  ossia per  $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ . L'unico valore accettabile data la condizione geometrica  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  è  $x_M = \frac{\pi}{4}$  che conferma che  $\triangle ABC$  è isoscele.

Il perimetro è espresso dalla

$$\begin{aligned} 2p &= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} \\ &= 2r + 2r \cos x + 2r \sin x \\ &= 2r + 2r(\cos x + \sin x) \\ &= 2r \left[ 1 + \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

dove si è fatto uso dell'identità  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ . Anche in tal caso la funzione  $2p$  raggiunge dal punto di vista algebrico il massimo, quando  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$ , condizione soddisfatta dai valori  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ossia  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ . Tra questi risulta geometricamente accettabile solo il valore  $x_M = \frac{\pi}{4}$  che, ancora, implica un triangolo isoscele. In definitiva, l'unica risposta corretta è la a).

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

È data la funzione

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x \quad a \neq 0.$$

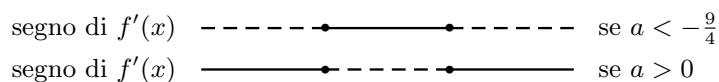
Questa rappresenta un fascio (o famiglia) di parabole cubiche, curve queste che possono presentare al massimo due punti di estremo relativo (o estremanti). Affinché quindi possieda un massimo ed un minimo relativi la sua derivata

$$f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$$

deve poter cambiare segno nel suo dominio  $\mathbb{R}$  cioè la disequazione  $f'(x) \geq 0$  ossia  $3ax^2 + 4ax - 3 \geq 0$  dovrà possedere un discriminante  $\Delta > 0$ . Questo comporta

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a > 0 \quad \implies \quad a(4a + 9) > 0 \quad \implies \quad a < -\frac{9}{4} \vee a > 0.$$

In tal caso il segno di  $f'(x)$  potrà assumere i seguenti andamenti



**Fig. 1.** Segno di  $f'(x)$  con  $a < -9/4 \vee a > 0$ .

che confermano l'esistenza degli estremi relativi per  $f(x)$ .

Non ci saranno punti estremanti se invece  $f'(x)$  risulterà per  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) \geq 0$  oppure  $f'(x) \leq 0$ . Pertanto  $3ax^2 + 4ax - 3 \geq 0$  dovrà possedere un discriminante  $\Delta \leq 0$  da cui, per quanto sopra  $-\frac{9}{4} \leq a < 0$  dato che  $a \neq 0$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Si tratta di determinare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}.$$

La trattazione separata del limite della funzione al numeratore non può fornire indicazioni in quanto tale limite non esiste essendo una funzione periodica. D'altra parte il numeratore è un'espressione lineare in seno e coseno e, con metodi standard della goniometria, si può scrivere identicamente

$$\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2} \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

per cui il limite diviene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{x}.$$

Sapendo che il codominio della funzione seno è l'intervallo  $[-1, 1]$  cioè, nel nostro caso

$$-1 \leq \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1,$$

è sufficiente moltiplicare entrambe le disuguaglianze per il termine positivo  $\frac{\sqrt{2}}{x}$  per dedurre che la funzione ad argomento soddisfa a sua volta alle disuguaglianze

$$-\frac{\sqrt{2}}{x} \leq \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{x}.$$

L'applicazione del teorema del confronto conduce alla determinazione del limite: difatti poiché si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{\sqrt{2}}{x} = 0$$

è pure per il suddetto teorema

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} = 0.$$

La risposta corretta è quindi la a).

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Cerchiamo di stabilire innanzitutto se sia possibile applicare il teorema di De l'Hôpital al calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x}.$$

Una delle ipotesi di tale teorema (che spesso, per la fretta, non viene correttamente analizzata a priori) è l'esistenza del limite del rapporto delle derivate delle due funzioni a rapporto  $f(x)$  e  $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nel nostro caso questo diviene in

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \operatorname{cos} x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

e manifestamente non esiste essendovi ad argomento una funzione periodica. Pertanto il teorema non è applicabile.

Riscriviamo quindi il limite nella forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} \right)}{\left( \frac{x - \operatorname{cos} x}{x} \right)}$$

dove si è diviso sia il numeratore che il denominatore per  $x$  (la condizione  $x \neq 0$  non comporta nessuna limitazione). Abbiamo pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{cos} x}{x}} :$$

poiché, analogamente a quanto dimostrato nel precedente **quesito** sfruttando il teorema del confronto, risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{cos} x}{x} = 0$$

si deduce per il t. della somma di limiti che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + 0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\operatorname{cos} x}{x} = 1 - 0 = 1.$$

L'applicazione del t. del quoziente di limiti conduce infine al risultato

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x} = \frac{1}{1} = 1$$

peraltro facilmente intuibile dato che per  $x \rightarrow +\infty$  il termine preponderante nelle due espressioni  $x + \operatorname{sen} x$  e  $x - \operatorname{cos} x$  è comune  $x$ . Difatti entrambe, per  $x \rightarrow +\infty$  sono approssimativamente uguali alla  $x$  cioè valgono le  $x + \operatorname{sen} x \approx x - \operatorname{cos} x \approx x$ .

# ESAME 2001 PNI

*La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.*

## • **Problema n. 1**

Sia  $AB$  un segmento di lunghezza  $2a$  e  $C$  il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$ :

a) si verifichi che il luogo dei punti  $P$  tali che

$$\frac{PA}{PB} = k \quad k \text{ costante positiva}$$

è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di  $k$  per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico  $\gamma$  dei punti  $X$  che vedono  $AC$  sotto un angolo di  $45^\circ$ ;

c) posto  $X$ , appartenente a  $\gamma$ , in uno dei due semipiani di origine la retta per  $A$  e per  $B$  e indicato con  $\alpha$  l'angolo  $\angle XAC$  si illustri l'andamento della funzione  $y = f(x)$  con  $f(x) = (XB/XA)^2$  e  $x = \operatorname{tg} \alpha$ .

Soluzione

## • **Problema n. 2**

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$ , è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \log(x + b)$$

con  $a$  e  $b$  diversi da zero.

- a) si trovino i valori di  $a$  e  $b$  tali che la curva  $\Gamma$  grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in  $x = 1$ ;
- b) si studi e si disegni  $\Gamma$ ;
- c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di  $\Gamma$  con l'asse  $x$ ;
- d) si determini l'equazione della curva  $\Gamma'$  simmetrica di  $\Gamma$  rispetto alla retta  $y = y(1)$ ;
- e) si disegni, per i valori di  $a$  e  $b$  trovati, il grafico di:

$$y = |x^2 + a \log(x + b)|.$$

Soluzione

**Questionario**

1. Provare che una sfera è equivalente ai  $2/3$  del cilindro circoscritto.

Soluzione

2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:  $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$ .

Soluzione

3. Dimostrare che se  $p(x)$  è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di  $p(x)$  c'è una radice di  $p'(x)$ .

Soluzione

4. Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = \arcsen x + \arccos x$ . Quali conclusioni se ne possono trarre per la  $f(x)$ ?

Soluzione

5. Calcolare l'integrale  $\int \frac{\log x}{x} dx$ .

Soluzione

6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

Soluzione

7. Verificato che l'equazione  $x - e^{-x} = 0$  ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Soluzione

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

Soluzione

9. Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

Soluzione

10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è di 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

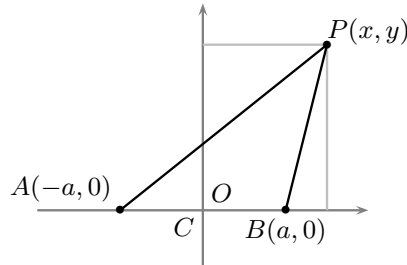
Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

a) Considerati gli elementi forniti dal testo (segmento  $AB$  di lunghezza  $2a$  e punto medio  $C$ ), appare conveniente scegliere un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrici con l'origine nel punto medio  $C$  del segmento  $AB$  e asse delle ascisse contenente  $AB$  ed orientato da  $C$  verso  $B$  (fig. 1).

Ne segue che  $A(-a, 0)$  e  $B(a, 0)$  mentre  $P(x, y)$  è un punto generico del piano che soddisfa alla relazione

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k \quad k > 0$$



**Fig. 1.** Scelta del piano cartesiano.

per cui  $P \neq B$ . La distanza di questo punto dagli estremi del segmento  $AB$  risulta data da

$$\overline{PA} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \quad \overline{PB} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

per cui la relazione diviene

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = k.$$

Dato che  $k > 0$  possiamo elevare al quadrato entrambi i membri dopo averli moltiplicati per il denominatore

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2[(x-a)^2 + y^2].$$

Sviluppando i quadrati e ordinando secondo le potenze di  $x$  e  $y$  abbiamo

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = k^2(x^2 - 2ax + a^2 + y^2)$$

e infine

$$(1 - k^2)x^2 + (1 - k^2)y^2 + 2ax(1 + k^2) + a^2(1 - k^2) = 0. \quad (1)$$

Notiamo che l'equazione ottenuta risulta di secondo grado in  $x$  e in  $y$  se il coefficiente comune dei termini al quadrato soddisfa alla  $1 - k^2 \neq 0$ . Inoltre mancando del termine misto  $xy$  l'equazione rientra nella forma cartesiana tipica delle rappresentazioni algebriche delle circonferenze: dividendo per  $1 - k^2 \neq 0$ , la riscriviamo quindi come

$$x^2 + y^2 + \frac{2a(1+k^2)}{1-k^2}x + a^2 = 0 \quad 1 - k^2 \neq 0. \quad (2)$$

Per  $k \neq 1$  (è  $k > 0$ ) questa equazione rappresenta una circonferenza di centro

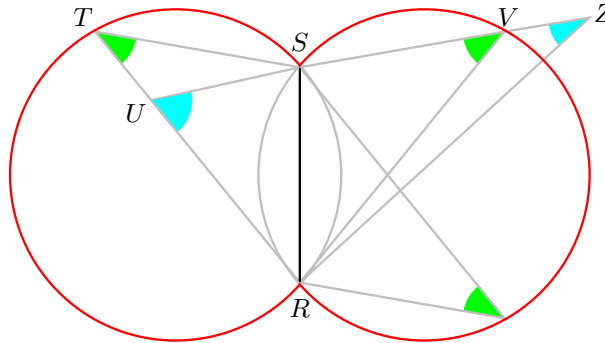
$$D \left( -\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0 \right)$$

e raggio\*

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \left[ \frac{1+k^4+2k^2-(1+k^4-2k^2)}{(1-k^2)^2} \right]} \\ &= \sqrt{a^2 \frac{4k^2}{(1-k^2)^2}} = \frac{2ka}{|1-k^2|}. \end{aligned}$$

Se invece  $k = 1$  l'equazione (1) si riduce alla  $4ax = 0$  che equivale alla  $x = 0$  e che rappresenta l'asse  $y$ , il quale è asse pure del segmento  $AB$ . Pertanto questo è il caso degenero prospettato dal testo.

b) Per determinare il luogo  $\gamma$  dei punti che vedono il segmento  $AC$  sotto un angolo di  $45^\circ$  conviene tener presente la proprietà elementare dei punti di una circonferenza rispetto ad una data corda. Essendo questi punti i vertici di altrettanti angoli alla circonferenza che insistono su tale corda ed essendo questi angoli tutti congruenti, possiamo affermare che i punti di uno stesso arco di circonferenza vedono una corda sotto il medesimo angolo. Se ora consideriamo la corda  $RS$  comune a due circonferenze di ugual raggio e secanti tra di loro (fig. 2), questa corda è vista sotto il medesimo angolo da ciascun punto appartenente alla figura che si ottiene dall'unione dei due archi congruenti rappresentati in colore in fig. 2.



**Fig. 2.** Luogo che vede un segmento  $RS$  sotto un angolo dato.

Si può facilmente dimostrare che tale insieme di punti è l'unico che soddisfa a tale proprietà.

Difatti da ogni punto interno  $U$  alla figura la corda  $RS$  è vista sotto un angolo maggiore mentre dai punti esterni la medesima corda è vista sotto un angolo minore. A tal fine è sufficiente osservare che  $\angle RUS > \angle RTS$  come  $\angle RZS < \angle RVS$ .

\* Per alcune considerazioni geometriche sulla circonferenza di Apollonio si veda la pagina web [www.lorenzoroi.net/geometria/Apollonio.html](http://www.lorenzoroi.net/geometria/Apollonio.html).

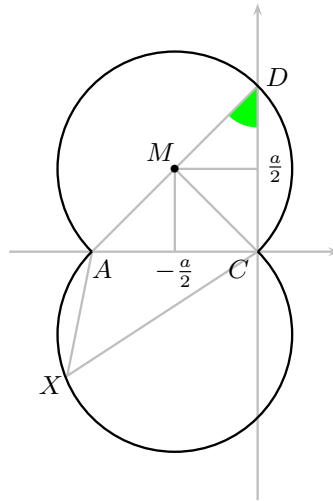


Fig. 3. Luogo  $\gamma$  dei punti  $X$ .

Il luogo  $\gamma$  richiesto dal quesito è pertanto dato dall'unione di due archi di circonferenza aventi il segmento  $AC$  come corda comune (fig. 3). Per determinare l'equazione cartesiana di una di queste circonferenze è sufficiente individuare un terzo punto da affiancare a  $A$  e  $C$ . Tra le infinite possibilità il punto dell'asse  $y$  di coordinate  $D(0, a)$  soddisfa alla condizione  $\angle ADC = \frac{\pi}{4}$ , in quanto  $\triangle ACD$  è rettangolo e isoscele ( $\overline{AC} = \overline{CD} = a$ ,  $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$ ). Per lo stesso motivo il medesimo punto è pure estremo del diametro della circonferenza cercata che pertanto avrà centro nel punto medio di  $AD$  ossia  $M(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  e raggio  $r = \overline{MC} = \overline{CD} \sin \frac{\pi}{4} = a/\sqrt{2}$ . L'equazione della circonferenza di centro  $M$  e raggio  $r$  è quindi

$$\left[ x - \left(-\frac{a}{2}\right) \right]^2 + \left( y - \frac{a}{2} \right)^2 = \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \implies x^2 + y^2 + ax - ay = 0,$$

e l'arco di nostro interesse è individuato dall'ulteriore condizione  $y \geq 0$ .

Il secondo arco corrispondente alle ordinate negative si ottiene per simmetria assiale dalla precedente circonferenza con la sostituzione  $y \rightarrow -y$ : otteniamo  $x^2 + y^2 + ax + ay = 0$  e  $y < 0$ . In definitiva, il luogo  $\gamma$  cercato viene espresso dalle

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + ax - ay = 0, & y \geq 0 \\ x^2 + y^2 + ax + ay = 0, & y < 0 \end{cases}$$

ma più sinteticamente, può essere rappresentato anche dall'unica equazione

$$\gamma : x^2 + y^2 + ax - a|y| = 0.$$

c) Scelto il semipiano delle ordinate positive, per determinare le lunghezze di  $XA$  e  $XB$  (fig. 4) in termini di  $\alpha = \angle XAC$  e relativa tangente goniometrica,

osserviamo che  $\overline{XA}$  è lato di  $\triangle XAC$ , triangolo del quale risultano noti i tre angoli,  $\alpha = \angle XAC$ ,  $\angle CXA = \frac{\pi}{4}$ ,  $\angle ACX = \pi - (\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}\pi - \alpha$  e il lato  $\overline{AC} = a$ . Al variare del punto  $X$  sull'arco di circonferenza, l'angolo  $\alpha$  potrà inoltre assumere i valori compresi nell'intervallo  $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\pi$ .

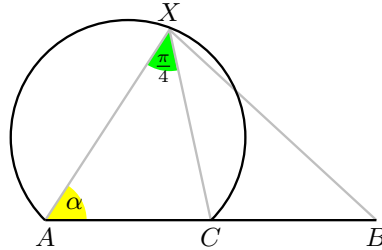


Fig. 4.

Con il teorema dei seni siamo quindi in grado di determinare  $\overline{XA}$  risolvendo la proporzione

$$\frac{\overline{XA}}{\sin \angle ACX} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle CXA} \implies \frac{\overline{XA}}{\sin (\frac{3}{4}\pi - \alpha)} = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

per cui

$$\overline{XA} = a\sqrt{2} \sin \left( \frac{3}{4}\pi - \alpha \right).$$

Dovendo esprimere il rapporto  $(\overline{XB}/\overline{XA})^2$  in termini di  $\text{tg } \alpha$  conviene riportare l'espressione trovata in termini dell'angolo  $\alpha$  utilizzando le formule di sottrazione per il seno:

$$\begin{aligned} \overline{XA} &= a\sqrt{2} \left( \sin \frac{3}{4}\pi \cos \alpha - \cos \frac{3}{4}\pi \sin \alpha \right) \\ &= a\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) \\ &= a(\cos \alpha + \sin \alpha). \end{aligned}$$

Per calcolare  $\overline{XB}^2$  possiamo applicare il teorema di Carnot a  $\triangle ABX$  dato che abbiamo sia  $\overline{AB}$  che  $\overline{XA}$  e l'angolo compreso. Pertanto

$$\begin{aligned} \overline{XB}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{XA}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{XA} \cos \alpha \\ &= (2a)^2 + a^2(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2(2a)a(\cos \alpha + \sin \alpha) \cos \alpha \\ &= a^2[4 + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - 4\cos^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha] \\ &= a^2(5 - 2\sin \alpha \cos \alpha - 4\cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

Il rapporto chiesto risulta

$$\begin{aligned} \left( \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} \right)^2 &= \frac{a^2(5 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha)}{a^2(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)^2} \\ &= \frac{5 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)^2} \end{aligned}$$

con  $0 \leq \alpha < \frac{3}{4}\pi$  in quanto va escluso il caso che sia  $\overline{XA} = 0$  corrispondente ad  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ . Per esprimerlo in termini di  $x = \operatorname{tg} \alpha$  dovremo eseguire la divisione del numeratore e del denominatore del secondo membro per  $\cos^2 \alpha$  ponendo ovviamente  $\cos \alpha \neq 0$  e quindi escludendo pure  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ . Poiché  $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$  discende

$$\begin{aligned} \left( \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} \right)^2 &= \frac{(5 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha) / \cos^2 \alpha}{(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)^2 / \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(5/\cos^2 \alpha) - 2 \operatorname{tg} \alpha - 4}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} \\ &= \frac{(5 + 5 \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2 \operatorname{tg} \alpha - 4}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} \\ &= \frac{5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha + 1}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2} \end{aligned}$$

In definitiva, la funzione  $f(x)$  da studiare risulta

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1 + x)^2}$$

ma le condizioni accumulate su  $\alpha$  ossia

$$0 \leq \alpha < \frac{3}{4}\pi \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

si riflettono sulla  $x = \operatorname{tg} \alpha$ . Per determinare queste ultime va tenuto presente l'andamento della tangente (rappresentato dal grafico in colore di fig. 5): per angoli compresi nel primo quadrante essa assume qualsiasi valore positivo o nullo mentre i valori di  $\operatorname{tg} \alpha$  quando sia  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{4}\pi$  appaiono essere minori di  $-1$ .

La funzione da studiare e le limitazioni della variabile  $x$  sono pertanto

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1 + x)^2} \quad x < -1 \vee x \geq 0.$$

La funzione  $f$ , a prescindere dalle condizioni geometriche discusse è definita in  $\mathbb{R} - \{-1\}$  per cui potremo estendere il suo studio pure in questo dominio. In

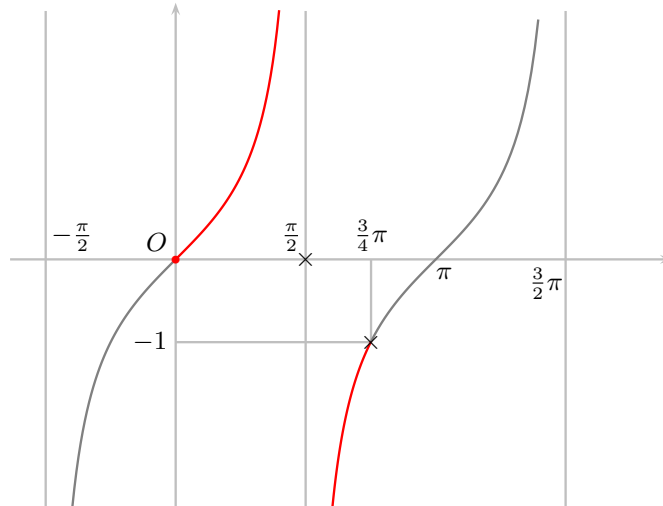


Fig. 5.

quest'ultimo insieme essa rientra nella classe delle funzioni razionali fratte e pertanto risulta continua in tutti i punti che non annullano il denominatore ossia  $\forall x \neq -1$ .

- Segno:  $f(x) > 0$  implica  $5x^2 - 2x + 1 > 0$  in quanto il denominatore risulta sempre positivo. Avendo il trinomio discriminante sempre negativo ( $\Delta/4 = 1 - 5 < 0$ ) la disequazione è sempre soddisfatta cosicché  $f(x) > 0 \forall x \neq -1$ .
- Limiti. I limiti agli estremi del dominio,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$  sono finiti in quanto, per la teoria delle funzioni razionali fratte il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore. Risulta pertanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 - (2/x) + (1/x^2)}{(1 + 1/x)^2} = \frac{5}{1} = 5$$

in quanto i termini del tipo  $1/x$ ,  $1/x^2$  possiedono ciascuno limite nullo all'infinito. La retta  $y_a = 5$  risulta quindi un asintoto orizzontale.

Se invece studiamo il limite nel punto dove non esiste la funzione  $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x)$  troviamo

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -1} 5x^2 - 2x + 1 = 5 - 2(-1) + 1 = 8 \quad \lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^2 = (1-1)^2 = 0^+$$

La retta  $x = -1$  è quindi asintoto verticale.

Il confronto con l'asintoto orizzontale  $y_a = 5$  implica lo studio della disequazione

$$f(x) - y_a \geq 0 \quad \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2} - 5 \geq 0.$$

Abbiamo

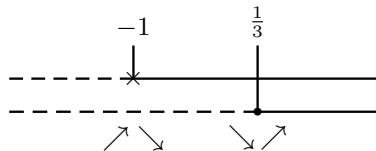
$$\frac{5x^2 - 2x + 1 - 5(1 + x^2 + 2x)}{(1+x)^2} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-12x - 4}{(1+x)^2} \geq 0$$

che comporta  $-12x - 4 \geq 0$  ossia  $x \leq -\frac{1}{3}$ . Pertanto la funzione interseca l'asintoto nel punto di ascissa  $-\frac{1}{3}$  mentre avrà ordinate maggiori per valori  $x < -\frac{1}{3}$ .

• Derivata prima. Il calcolo della  $f'(x)$  conduce all'espressione

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x - 2)(1+x)^2 - 2(1+x)(5x^2 - 2x + 1)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{2(5x - 1 + 5x^2 - x - 5x^2 + 2x - 1)(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{4(3x - 1)}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Il segno di questa  $f'(x) \geq 0$  dipende sia dal numeratore che dal denominatore. Da  $3x - 1 \geq 0$  discende  $x \geq 1/3$  mentre il denominatore risulta positivo quando  $(1+x)^3 > 0$ ,  $1+x > 0$ ,  $x > -1$ . Combinandoli otteniamo lo schema



**Fig. 6.**

che mostra come la funzione sia crescente per  $x < -1$  oppure per  $x > 1/3$ . La  $f$  possiede inoltre un minimo relativo proprio in  $x = 1/3$  che pure risulta assoluto. Il valore di questo minimo si ottiene dalla  $f(1/3) = 1/2$ .

• Derivata seconda. La derivata seconda risulta

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4 \cdot \frac{3(1+x)^3 - 3(1+x)^2(3x-1)}{(1+x)^6} \\ &= 12 \cdot \frac{(1+x-3x+1)(1+x)^2}{(1+x)^6} \\ &= \frac{24(1-x)}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

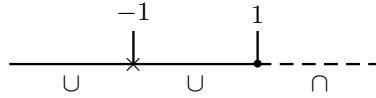
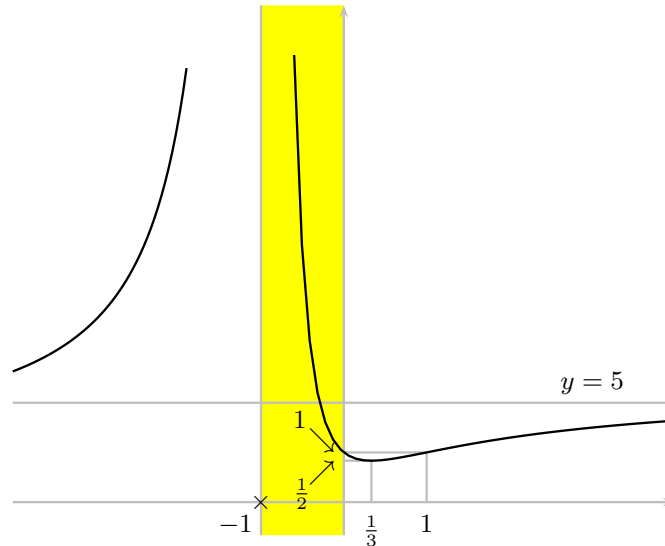


Fig. 7.

e il suo segno dipende solo dal termine  $f''(x) \geq 0$ ,  $1 - x \geq 0$  che implica  $x \leq 1$ . La concavità sarà quindi rivolta verso l'alto quando  $x < 1$  come riassunto dallo schema di fig. 7.

L'unico punto di flesso si ha in corrispondenza di  $x = 1$  e l'ordinata corrispondente è  $f(1) = 1$ . Notato che  $f(0) = 1$ , il grafico complessivo è riportato in fig. 8 dove, la parte di grafico che soddisfa alle limitazioni geometriche ( $x < -1 \vee x \geq 0$ ) risulta quella esterna alla fascia di piano evidenziata in giallo.

Fig. 8. Grafico (qualitativo) della funzione  $f$ .

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

a) Il dominio della funzione assegnata  $f : y = x^2 + a \ln(x + b)$  con  $a, b \neq 0$ , deve evidentemente rispettare la condizione  $x + b > 0$  ossia  $x > -b$ . Dovendo il grafico di  $f$  attraversare l'origine, va inoltre soddisfatta l'equazione  $f(0) = 0$  che implica  $0^2 + a \ln(0 + b) = 0$  da cui, essendo  $a \neq 0$ ,  $\ln(b) = 0$  risolta da  $b = 1$ . La funzione

$$f : y = x^2 + a \ln(x + 1) \quad \text{con} \quad x > -1$$

deve inoltre presentare un minimo assoluto in  $x = 1$ . Notato che, nel suo dominio,  $f$  risulta derivabile, si può soddisfare alla richiesta imponendo che la sua derivata

prima sia nulla in  $x = 1$  ossia valga  $f'(1) = 0$ . Lo studio del segno di  $y'$  o il calcolo di  $y''$  potranno successivamente chiarire il carattere di tale punto visto che la condizione  $f'(1) = 0$ , pur necessaria, non è sufficiente per rispondere alla richiesta. Pertanto

$$f'(x) = 2x + \frac{a}{x+1} \quad f'(1) = 0 \quad 2 + \frac{a}{2} = 0 \quad \implies \quad a = -4.$$

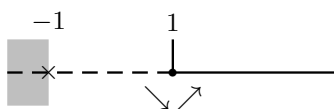
La funzione cui si è giunti risulta quindi

$$f(x) = x^2 - 4 \ln(x+1) \quad x > -1$$

mentre la sua derivata prima è

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x+1} = \frac{2(x^2 + x - 2)}{x+1}.$$

Notato che il denominatore di quest'ultima espressione risulta sempre positivo nel dominio  $\mathcal{D} = ]-1, +\infty[$ , lo studio del segno di  $f'(x) \geq 0$  si riduce alla disequazione  $x^2 + x - 2 \geq 0$ , risolta da  $x \leq -2 \vee x \geq 1$ . Tenendo ancora una volta conto del dominio, possiamo pertanto confermare che la funzione  $f$  presenta un minimo assoluto in  $x = 1$ , essendo in  $] -1, 1[$  monotona decrescente, crescente invece strettamente in  $]1, +\infty[$ .

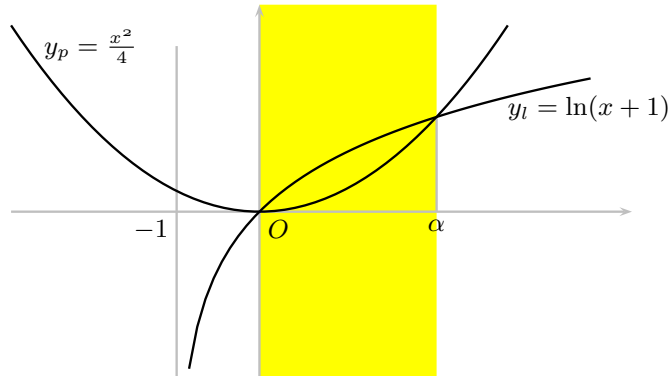


**Fig. 1.** Segno di  $f'$ .

b) Essendo richiesto il grafico  $\Gamma$  di  $f$  converrà continuare il suo studio a partire dallo studio del segno. Questo implica la ricerca delle soluzioni della disequazione (contenente termini razionali e trascendenti)  $x^2 - 4 \ln(x+1) \geq 0$ . Poiché non vi sono metodi analitici per la risoluzione di tali disequazioni miste cercheremo, tramite un confronto grafico, di riconoscere comunque la struttura delle sue soluzioni. Riscritta quindi nella forma

$$x^2 \geq 4 \ln(x+1) \quad \frac{x^2}{4} \geq \ln(x+1)$$

possiamo reinterpretare la ricerca delle soluzioni come la ricerca delle ascisse dei punti della parabola di equazione  $y_p = x^2/4$  che hanno ordinate maggiori o eguali alle ordinate dei punti della curva logaritmica  $l : y = \ln(x+1)$ . Il grafico di quest'ultima curva è noto in quanto appare essere nient'altro che quello del logaritmo  $y' = \ln x'$  traslato verso sinistra di una unità. Difatti la curva  $l$  è



**Fig. 2.** Confronto grafico di  $y_p = x^2/4$  e  $y_l = \ln(x+1)$ .

immagine secondo la traslazione  $x' = x+1$  e  $y' = y$  della curva logaritmica. Dato che l'origine appartiene sia a quest'ultima che alla parabola, i rispettivi grafici rivelano l'esistenza di un loro ulteriore punto di intersezione di ascissa  $\alpha > 0$ .

La funzione  $f$  risulterà positiva o nulla quando  $x \leq 0 \vee x \geq \alpha$  ossia per i valori di  $x$  esterni alla fascia gialla di fig. 2.

I limiti agli estremi del dominio forniscono

$$\lim_{x \rightarrow -1+} x^2 - 4 \ln(x+1) = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -1+} x^2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1+} -4 \ln(x+1) = \lim_{z \rightarrow 0+} -4 \ln z = +\infty,$$

mentre il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4 \ln(x+1)$$

conduce alla forma indeterminata  $+\infty - \infty$  dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 \ln(x+1) = -\infty.$$

Allo scopo di risolverlo, riscriviamo la funzione fattorizzando il termine  $x^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4 \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

e calcoliamo il limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore della funzione ad argomento di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

così da poter, eventualmente, applicare il teorema di De L'Hôpital: otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x(x+1)} = 0.$$

Esistendo tale limite, possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital e, rilevato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = 0$$

possiamo risolvere il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4 \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = +\infty$$

in quanto il termine tra parentesi quadre ha limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = 1 - 0 = 1.$$

Con tale risultato, la funzione potrebbe presentare un asintoto obliquo. Va quindi affrontato l'ulteriore limite

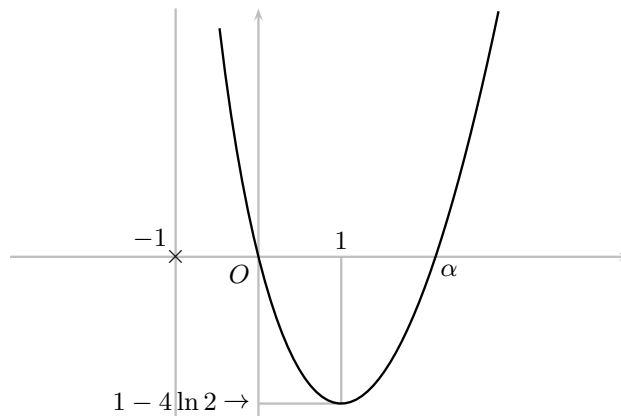
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

che risulta ancora pari a  $+\infty$  in base alle medesime osservazioni. Possiamo quindi escludere l'esistenza di un tale asintoto obliquo.

Derivata seconda. Il calcolo fornisce

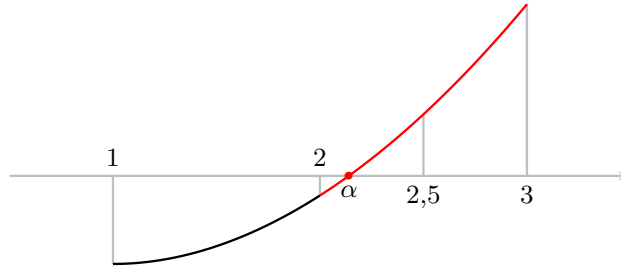
$$f''(x) = 2 + \frac{4}{(x+1)^2},$$

espressione manifestamente sempre positiva nel dominio: il grafico  $\Gamma$  volge sempre la concavità verso l'alto ossia  $f$  risulta convessa. Calcolata l'ordinata del minimo assoluto  $f(1) = 1 - 4 \ln 2$ , possiamo concludere proponendo il grafico  $\Gamma$  richiesto: questo è rappresentato in fig. 3.



**Fig. 3.** Grafico  $\Gamma$  della funzione  $f$ .

c) Come visto, la funzione  $f$  assume in  $x = 1$  il valore  $f(1) = 1 - 4 \ln 2 < 0$ . Inoltre essendo  $f$  monotona crescente per  $x > 1$  in quanto  $f'(x) > 0$  ed avendo dimostrato che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  esiste, per il teorema degli zeri, un'unica intersezione con l'asse delle ascisse che, sempre **precedentemente**, abbiamo identificato con  $\alpha$  (fig. 4).



**Fig. 4.** Grafico di  $f$  per  $x \in [1, 3]$ .

Volendo ottenere una sua approssimazione con il metodo di bisezione, dobbiamo individuare un estremo dove la funzione risulti positiva. Allora procedendo per tentativi calcoliamo  $f(2) = 4 - 4 \ln 3 = 4(1 - \ln 3)$ . Poiché  $f(2) < 0$  proviamo ancora con  $f(3)$ : si ottiene  $f(3) = 9 - 4 \ln 4 \approx 3,45 > 0$  per cui  $\alpha$  apparterrà all'intervallo  $2 < \alpha < 3$ .

Calcoliamo quindi la  $f$  nel punto medio di questo intervallo: risulta

$$f(2,5) = 1,23895 > 0 \quad \text{per cui segue che} \quad 2 < \alpha < 2,5.$$

Procedendo allo stesso modo:

$$\begin{aligned} f(2,25) &\approx +0,34788 &\implies & 2 < \alpha < 2,25 \\ f(2,125) &\approx -0,042112 &\implies & 2,125 < \alpha < 2,25 \\ f(2,1875) &\approx +0,148209 &\implies & 2,125 < \alpha < 2,1875 \end{aligned}$$

Si giunge infine, con ulteriori iterazioni al valore  $\alpha \approx 2,1391$ .

c) Per determinare l'equazione della curva  $\Gamma'$  immagine di  $\Gamma$  secondo la simmetria assiale di asse  $y = y(1) = 1 - 4 \ln 2$  conviene riprendere le equazioni generali per tale trasformazione. Queste sono rappresentate dalle

$$\sigma : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

e si ottengono imponendo che il punto medio del segmento di estremi  $(x, y)$  e  $(x', y')$  appartenga all'asse di equazione  $y = b$  ossia valga la  $(y + y')/2 = b$ . Queste nel nostro caso diventano

$$\sigma : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2y(1) = -y + 2(1 - 4 \ln 2). \end{cases}$$

Scritta la trasformazione inversa

$$\sigma^{-1} : \begin{cases} x = x' \\ y = -y' + 2(1 - 4 \ln 2) \end{cases}$$

basta ora sostituire in luogo di  $x$  e  $y$  nella equazione rappresentativa di  $\Gamma$   $y = x^2 - 4 \ln(x + 1)$ , ottenendo

$$-y' + 2(1 - 4 \ln 2) = (x')^2 - 4 \ln(x' + 1)$$

da cui infine l'equazione rappresentativa dell'insieme immagine  $\Gamma'$

$$y' = 2 - 8 \ln 2 - (x')^2 + 4 \ln(x' + 1).$$

d) Il grafico della funzione  $g : y = |x^2 - 4 \ln(x + 1)|$  si deduce da quello già studiato di  $f$  considerando l'azione del valore assoluto sul suo argomento.

Trattando il problema in forma generale, il grafico della funzione  $g : y = |f(x)|$  appare l'unione di due rami, ciascuno dei quali è descritto, per la definizione di valore assoluto, dalle equazioni

$$g : \begin{cases} y = f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ y = -f(x), & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Ne segue che, per i valori di  $x$  che soddisfano alla condizione  $f(x) \geq 0$  ossia dove il grafico di  $f$  appartiene al semipiano delle ordinate positive, il grafico di  $g$  coincide con quello di  $f$  in quanto descritto dalla medesima equazione. In corrispondenza dell'insieme di valori di  $x$  dove  $f(x) < 0$  il grafico di  $g$  risulta il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse di quello di  $f$  in quanto l'equazione  $y = -f(x)$  deriva dalla  $y = f(x)$  imponendo la simmetria assiale  $x' = x \wedge y' = -y$ .

Nel nostro caso quindi, l'equazione  $g : y = |x^2 - 4 \ln(x + 1)|$  si esplicita nei due rami

$$g : \begin{cases} y = x^2 - 4 \ln(x + 1), & \text{se } -1 < x \leq 0 \vee x \geq \alpha \\ y = -[x^2 - 4 \ln(x + 1)] = -x^2 + 4 \ln(x + 1), & \text{se } 0 < x < \alpha. \end{cases}$$

In fig. 5 appare in colore il grafico di  $g$  e, per  $x \in ]0, \alpha[$  il grafico originario di  $f$ .

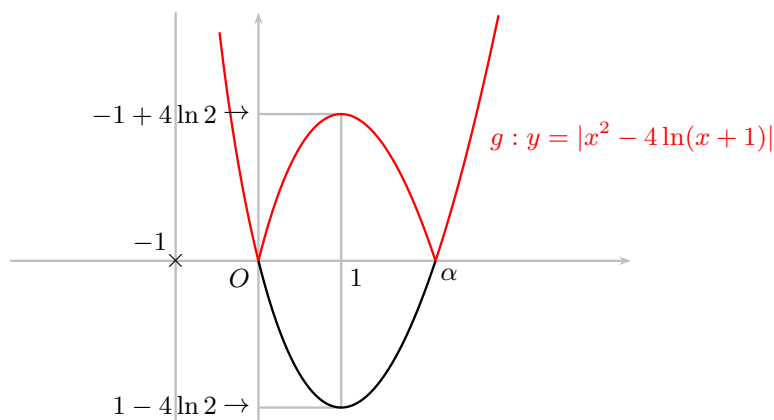


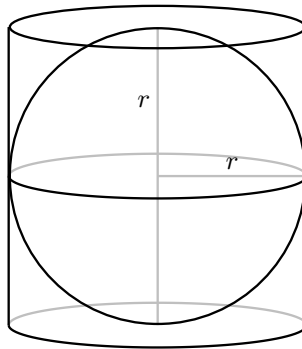
Fig. 5. Grafico della funzione  $g$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $r$  il raggio noto della sfera: il suo volume risulta espresso dalla formula

$$\mathcal{V}(\text{sfera}) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Il cilindro ad essa circoscritto, rappresentato in fig. 1 possiede il raggio di base pari al raggio  $r$  della sfera e l'altezza uguale al diametro  $2r$ .



**Fig. 1.** Sfera e cilindro circoscritto.

Il suo volume risulta quindi

$$\mathcal{V}(\text{cilindro}) = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

Il loro rapporto è

$$\frac{\mathcal{V}(\text{sfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$$

come richiesto dal quesito.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Per determinare il numero delle soluzioni dell'equazione  $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$ , equazione che contiene sia espressioni razionali che funzioni trascendenti dell'incognita  $x$ , possiamo sfruttare l'approccio grafico che, in tali casi può fornire informazioni anche significative. Riscriviamo quindi l'equazione in forme più opportune in modo da poter riconoscere, almeno parzialmente, funzioni note dell'incognita. Notato quindi che  $x = 0$  non può essere soluzione dell'equazione data in quanto  $-2 \neq 0$ , dividiamo per  $x$  entrambi i membri e sommiamo il termine  $2/x$ : otteniamo

$$e^x + e^{-x} = \frac{2}{x}.$$

Posto  $f(x) = e^x + e^{-x}$  e  $g(x) = 2/x$ , la ricerca del numero delle soluzioni dell'equazione viene ricondotta alla ricerca del numero delle intersezioni tra i grafici rappresentativi di  $f$  e  $g$ . Poiché il grafico di  $g$  è quello noto di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti ed appartenente al I e III quadrante, studiamo brevemente quello di  $f$ .

Innanzitutto l'equazione  $f(x) = e^x + e^{-x}$  soddisfa all'identità  $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  per cui rappresenta una funzione pari. Risulta inoltre sempre positiva. I limiti agli estremi del dominio  $\mathbb{R}$  forniscono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

in quanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  (e viceversa  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ ).

La derivata prima risulta  $f'(x) = e^x - e^{-x}$  per cui  $f'(x) \geq 0$  se  $e^x - e^{-x} \geq 0$  ossia  $e^x \geq e^{-x}$ . Quest'ultima implica  $x \geq -x$  e quindi  $x \geq 0$ : in  $x = 0$  la funzione  $f$  presenta pertanto un minimo relativo ed assoluto (con  $f(0) = 2$ ) mentre per  $x > 0$  risulta strettamente crescente.

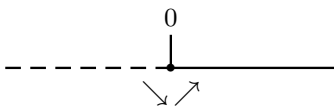


Fig. 1.

Gli elementi accumulati ci permettono di proporre un abbozzo di grafico per la  $f$  (fig. 2) che, assieme a quello dell'iperbole equilatera  $g$ , mostra come i grafici delle due funzioni debbano intersecarsi in un sol punto di ascissa positiva  $\alpha$ .

Se poi calcoliamo  $f(1) = e + e^{-1} \approx 3,09$  e  $g(1) = 2$  e osserviamo che  $f(1) > g(1)$  possiamo proporre una prima stima di  $\alpha$  ossia  $0 < \alpha < 1$ .

### Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Consideriamo il polinomio  $p(x)$  e siano  $\alpha$  e  $\beta$  due sue radici distinte e quindi tali che  $p(\alpha) = p(\beta) = 0$ . Supponiamo che sia  $\alpha < \beta$ . Poiché un polinomio rappresenta una funzione

- continua in tutto  $\mathbb{R}$  e quindi pure nell'intervallo  $[\alpha, \beta]$  ed inoltre
- è derivabile in  $] \alpha, \beta [$  (così come in  $\mathbb{R}$ ) ed infine
- i suoi valori agli estremi di  $[\alpha, \beta]$  sono uguali perché  $p(\alpha) = p(\beta) = 0$ ,

possiamo applicare il teorema di Rolle essendo soddisfatte tutte le ipotesi di questo teorema. Pertanto possiamo concludere che deve esistere almeno un valore  $\gamma$  con  $\gamma \in ] \alpha, \beta [$  in corrispondenza del quale  $p'(\gamma) = 0$  ossia  $\gamma$  è una radice dell'equazione  $p'(x) = 0$ .

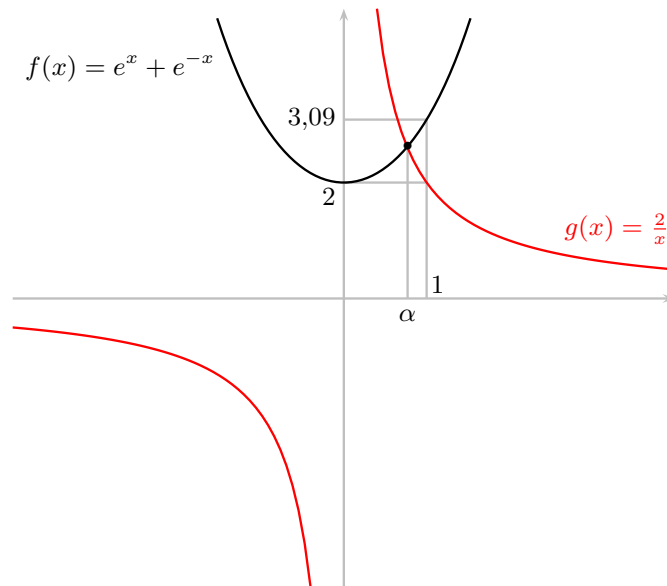


Fig. 2. Grafici delle funzioni  $f$  e  $g$ .

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il calcolo della derivata prima della funzione

$$f(x) = \arcsen x + \arccos x \quad \text{con } x \in [-1, 1]$$

è immediato e conduce all'espressione

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

valida per  $x \in ]-1, 1[$ . Poiché  $f$  è definita in  $[-1, 1]$ , derivabile internamente e con derivata nulla, possiamo applicare il corollario del teorema di Lagrange (o del valor medio) per concludere che  $f(x)$  è costante in  $[-1, 1]$ . Calcolando quindi il suo valore in un punto qualsiasi di tale intervallo, per esempio in  $x = 0$ , risulta  $f(0) = \arcsen 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ : pertanto

$$\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1],$$

relazione già nota nell'ambito delle funzioni inverse e che lega l'arcoseno con l'arcocoseno.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

L'integrale indefinito

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

si può calcolare riconoscendo nel fattore  $\frac{1}{x}$  la derivata del termine  $\ln x$ . In tal caso conviene ricorrere alla sostituzione

$$t = \ln x \quad \text{per cui il differenziale è} \quad dt = D(\ln x) dx = \frac{1}{x} dx$$

e quindi ricondurre l'integrale richiesto ad uno elementare

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

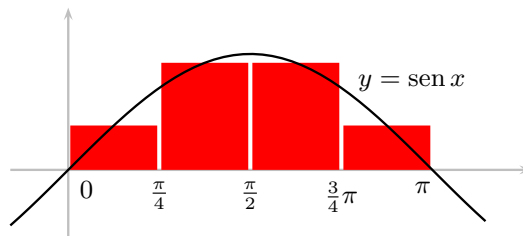
Il valore esatto dell'integrale definito è facilmente calcolabile in quanto

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2,$$

e dove si è fatto uso dell'integrale indefinito elementare

$$\int \sin x dx = -\cos x + c.$$

Richiamato il grafico del seno nell'intervallo  $[0, \pi]$  (fig. 1), per il calcolo approssimato applichiamo il metodo dei rettangoli suddividendo questo intervallo  $[0, \pi]$  in  $n$  intervalli parziali di ampiezza  $h = (\pi - 0)/n = \pi/n$ .



**Fig. 1.** Grafico di  $y = \sin x$ .

Posto quindi  $x_0 = 0$ , discende che gli estremi degli intervalli parziali sono dati dai valori

$$x_1 = x_0 + h = h, \quad x_2 = x_1 + h = 2h, \quad \dots, \quad x_i = ih, \quad \dots, \quad x_n = \pi,$$

e in ciascuno di questi intervalli calcoliamo la funzione nel punto medio: per l' $i$ -esimo intervallo, l'altezza (positiva) del rettangolo risulta

$$f\left(ih - \frac{h}{2}\right) = f\left[h\left(i - \frac{1}{2}\right)\right] = \operatorname{sen} h\left(i - \frac{1}{2}\right).$$

La somma quindi delle aree dei rettangoli fornisce infine una stima  $\mathcal{A}(n)$  dipendente da  $n$  dell'area richiesta

$$\mathcal{A}(n) = \sum_1^n h \operatorname{sen} h\left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{n} \sum_1^n \operatorname{sen} h\left(i - \frac{1}{2}\right).$$

A partire da  $n = 1$  dove  $\mathcal{A}(1) = \pi \cdot 1 = \pi$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(2) &= \frac{\pi}{2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2,2214, \end{aligned}$$

mentre per  $\mathcal{A}(3)$  risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(3) &= \frac{\pi}{3} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi \right) \approx 2,0944. \end{aligned}$$

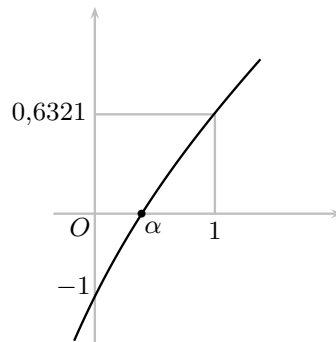
$\mathcal{A}(4)$  fornisce invece

$$\mathcal{A}(4) = \frac{\pi}{4} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} + \operatorname{sen} \frac{3}{8}\pi + \operatorname{sen} \frac{5}{8}\pi + \operatorname{sen} \frac{7}{8}\pi \right) \approx 2,05234.$$

Procedendo ulteriormente il valore di  $\mathcal{A}(n)$  fornisce stime dell'area sempre in eccesso (per esempio,  $\mathcal{A}(10) \approx 2,00825$ ) ma sempre più prossime a 2.

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Posto  $f(x) = x - e^{-x}$  notiamo che il dominio di  $f$  coincide con  $\mathbb{R}$  e che, in esso, la derivata prima risulta  $f'(x) = 1 - (-1)e^{-x} = 1 + e^{-x}$ . Poiché  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  la funzione risulta strettamente crescente in  $\mathbb{R}$  e quindi pure in  $[0, 1]$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $f(x) = x - e^{-x}$  in  $[0, 1]$ .

I suoi valori agli estremi risultano di segno opposto,  $f(0) = 0 - e^{-0} = -1 < 0$  e  $f(1) = 1 - e^{-1} = 1 - 1/e \approx 0,6321 > 0$  per cui, in base al teorema degli zeri (o di Bolzano) applicabile alle funzioni continue in un intervallo chiuso, possiamo affermare l'esistenza di almeno un valore  $\alpha$  in corrispondenza del quale si ha  $f(\alpha) = 0$ . Per la monotonia crescente di  $f$  questo valore deve inoltre essere unico e ciò è assicurato dal teorema sull'esistenza della funzione inversa di una funzione continua e monotona in un intervallo: se esiste  $f^{-1}$  allora  $\alpha = f^{-1}(0)$  è unico. Determiniamo quindi  $\alpha$  con un approccio numerico, il metodo di bisezione. Calcoliamo quindi la funzione  $f$  nel punto medio  $x = 0,5$ . Poiché  $f(0,5) = -0,1065 < 0$ , il successivo intervallo risulta  $[0,5, 1]$ . Ne segue:

$$\begin{aligned} f(0,75) &\approx +0,2776 &\implies & 0,5 < \alpha < 0,75 \\ f(0,625) &\approx +0,0897 &\implies & 0,5 < \alpha < 0,625 \\ f(0,5625) &\approx -0,0072 &\implies & 0,5625 < \alpha < 0,625 \end{aligned}$$

Procedendo in tal modo, si giunge dopo 10 iterazioni alla stima  $\alpha \approx 0,567$ .

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

La probabilità richiesta si può calcolare ricordando la definizione classica di probabilità ossia come rapporto tra i casi favorevoli ad un evento con il numero dei casi possibili. Essendo 16 gli allievi il numero  $C_{16,3}$  di gruppi che si possono formare con 3 elementi, indifferentemente di soli maschi o sole femmine o misti, è espresso dal coefficiente binomiale

$$C_{16,3} = \binom{16}{3} = 560$$

in quanto tale numero si può identificare con il numero delle combinazioni semplici di 16 elementi a gruppi di 3.

Analogamente, il numero dei gruppi di soli tre maschi è dato dal coefficiente binomiale

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = 220$$

in quanto 12 sono i maschi presenti nella classe. Ne segue che la probabilità richiesta risulta

$$P = \frac{C_{12,3}}{C_{16,3}} = \frac{220}{560} \approx 0,3929.$$

Al medesimo risultato si può giungere applicando il teorema della probabilità composta. Sia  $E$  l'evento che vede scelti 3 allievi maschi.  $E$  può essere scomposto nell'intersezione di altri tre eventi  $E_1, E_2, E_3$  rispettivamente

$E_1$  = viene scelto per primo un ragazzo maschio

$E_2$  = viene scelto per secondo un ragazzo maschio

$E_3$  = viene scelto per terzo un ragazzo maschio

Pertanto

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) :$$

l'associatività dell'intersezione e il teorema della probabilità condizionata (o composta) permette di scrivere

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1 \cap (E_2 \cap E_3)) = P(E_1) \cdot P((E_2 \cap E_3)/E_1)$$

e riapplicando il teorema al termine  $P((E_2 \cap E_3)/E_1)$  otteniamo

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) \cdot P(E_3/(E_1 \cap E_2)). \quad (1)$$

Ma essendo 12 gli allievi maschi su 16 complessivi allora  $P(E_1) = \frac{12}{16}$  mentre

$$P(E_2/E_1) = \frac{12-1}{15} = \frac{11}{15},$$

essendo rimasti dopo la prima scelta solo 11 maschi su 15 allievi. Infine, la probabilità di  $E_3$  dopo che si sono avverati  $E_1$  ed  $E_2$  (sono rimasti 10 maschi su 14) è data da

$$P(E_3/(E_1 \cap E_2)) = \frac{12-2}{14} = \frac{10}{14}.$$

Inserendo questi valori nella (1) risulta infine

$$P(E) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{1320}{3360} \approx 0,3929.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Un sistema assiomatico o teoria formale si ritiene definito quando siano dati, a) un linguaggio, b) un sistema di assiomi e c) un insieme di regole di deduzione. Tralasciando le caratteristiche del linguaggio e come questo si possa costruire, a seconda dell'insieme di proprietà *primitive* che si vuole assumere come verità costitutive, verità che non necessitano di dimostrazione per la loro evidenza intuitiva, si possono formulare uno o più sistemi formali. Tali proprietà sono appunto gli assiomi o postulati della teoria. Con le regole di deduzione si ottengono poi i teoremi della teoria.

Per quanto riguarda la geometria, la distinzione che Euclide pone nel primo libro dei suoi "Elementi" tra assiomi e postulati, i primi considerati come enunciati matematici generali mentre i secondi sono visti come asserzioni a carattere geometrico, oggi non risulta più valida essendo i due termini divenuti sinonimi. In entrambi i casi Euclide considera la verità di tali proposizioni garantita dall'evidenza intuitiva per cui non ne è necessaria una dimostrazione. Ogni altra affermazione che non sia una definizione, costituisce invece un teorema e va rigorosamente dimostrata. Esempi di assiomi euclidei espressi nella forma oggi più comune sono:

postulato 1—*per due punti distinti passa una e una sola retta;*

postulato 2—*una retta contiene infiniti punti;*

postulato 5—*per un punto esterno ad una retta, passa una sola parallela ad essa.*

Quest'ultimo postulato, detto anche *postulato delle parallele*, ha a livello storico, svolto un ruolo determinante per la nascita delle geometrie non-euclidee. Difatti il fallimento dei tentativi per dedurre questa affermazione dagli altri assiomi portarono *Nicolaj Lobacevskij* a riconoscere l'indipendenza di tale assioma dai rimanenti e quindi ad una nuova definizione di parallelismo e ad una nuova geometria. L'indipendenza degli assiomi per un sistema assiomatico è quindi una proprietà della teoria formale. Con la pubblicazione nel 1901 dei "*Grundlagen der Geometrie*" ("*I fondamenti della Geometria*"), *David Hilbert* forniva una sistemazione assiomatica rigorosa della geometria (o meglio delle "geometrie") e dell'insieme dei suoi assiomi.

Altre proprietà di una teoria assiomatica sono la coerenza (o non contraddittorietà dei suoi assiomi) e la completezza: nel caso di quest'ultima caratteristica, *Kurt Gödel* nel 1931 ha dimostrato che ogni teoria formale contiene affermazioni o formule che non sono né dimostrabili né possono essere negate (teorema di incompletezza): in ogni teoria formale si possono allora incontrare proposizioni indecidibili.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Nel quesito proposto vengono richiamati due tipi di velocità: la velocità media in un certo intervallo di tempo e la velocità indicata dal tachimetro che intendiamo come la velocità istantanea ossia la velocità in un qualsiasi istante  $t$ . Se  $s(t)$

è la legge che lega la posizione dell'automobile durante il viaggio al punto di partenza in funzione del tempo (rappresenta quindi la legge oraria) e  $t_1$  è la durata complessiva del viaggio, la velocità media nell'intervallo  $[0, t_1]$ , è definita come

$$v_m = \frac{s(t_1) - s(0)}{t_1 - 0}. \quad (1)$$

Se, com'è naturale, supponiamo che nell'istante iniziale  $t = 0$  l'automobile si trovi nel punto di partenza allora  $s(0) = 0$  km e la velocità media assume l'espressione più semplice

$$v_m = \frac{s(t_1)}{t_1} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (2)$$

Poiché il viaggio si svolge senza soste possiamo supporre che la funzione  $s(t)$  sia derivabile in tutti i punti dell'intervallo  $[0, t_1]$ : possiamo perciò applicare ad essa in tale intervallo il teorema di Lagrange e quindi affermare che esiste almeno un istante  $t_0$  con  $0 < t_0 < t_1$  tale che

$$\frac{s(t_1) - s(0)}{t_1 - 0} = s'(t_0)$$

e dove  $s'(t_0)$  rappresenta la derivata di  $s(t)$  calcolata in  $t_0$ . Poiché la derivata  $s'(t)$  si interpreta dal punto di vista fisico come la velocità dell'auto nell'istante  $t$  ossia la velocità indicata dal tachimetro, in base alle (1) (2) risulta che

$$\exists t_0 \in ]0, t_1[ \quad \text{dove} \quad s'(t_0) = \frac{s(t_1)}{t_1} = v_m.$$

L'uguaglianza ottenuta prova quanto richiesto, ossia che durante il viaggio la velocità istantanea può, almeno in un istante, essere uguale alla velocità media.

## ESAME 2002

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

### • Problema n. 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , è assegnata la curva  $k$  di equazione  $y = f(x)$ , dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

- Determinare per quali valori di  $x$  essa è situata nel semipiano  $y > 0$  e per quali nel semipiano  $y < 0$ .
- Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine  $O$  degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse  $y$ , sapendo che essa incide ortogonalmente la curva  $k$  nel punto di ascissa  $-1$  (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
- Stabilire se la retta tangente alla curva  $k$  nel punto di ascissa  $-1$  ha in comune con  $k$  altri punti oltre a quello di tangenza.
- Determinare in quanti punti la curva  $k$  ha per tangente una retta parallela all'asse  $x$ .
- Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione  $f(x)$  assegnata, relativamente all'intervallo  $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ .

Soluzione

### • Problema n. 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$a + 2x, \quad a - x, \quad 2a - x, \quad (1)$$

dove  $a$  è una lunghezza nota non nulla ed  $x$  è una lunghezza incognita.

- a) Determinare per quali valori di  $x$  le lunghezze (1) si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.
- b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze (1), ne esiste uno di area massima o minima.
- c) Verificato che per  $x = a/4$  le (1) rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
- d) Indicato con  $ABC$  il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che  $BC$  sia il lato maggiore, si conduca per  $A$  la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto  $D$  tale che  $AD$  sia lungo  $a$ : calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani  $DBC$  e  $ABC$ .

Soluzione

### Questionario

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

Soluzione

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali  $A'$  e  $A''$  e volumi  $V'$  e  $V''$ . Si sa che  $A'/A'' = 2$ . Calcolare il valore del rapporto  $V'/V''$ .

Soluzione

3. Considerati i numeri reali  $a, b, c, d$  – comunque scelti – se  $a > b$  e  $c > d$  allora:

$$\text{a) } a + d > b + c; \quad \text{b) } a - d > b - c; \quad \text{c) } ad > bc; \quad \text{d) } \frac{a}{d} > \frac{b}{c}.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

Soluzione

4. Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

Soluzione

5. Determinare, se esistono, i numeri  $a, b$  in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità.

Soluzione

6. Si consideri la funzione

$$f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ .

Soluzione

7. Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x)$  tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

Soluzione

8. La funzione reale di variabile reale  $f(x)$  è continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[1, 3]$  e derivabile nell'intervallo aperto  $(1, 3)$ . Si sa che  $f(1) = 1$  e inoltre  $0 \leq f'(x) \leq 2$  per ogni  $x$  dell'intervallo  $(1, 3)$ . Spiegare in maniera esauriente perché risulta  $1 \leq f(3) \leq 5$ .

Soluzione

9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani  $(Oxy)$ , è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

- a) un punto;
- b) due punti;
- c) infiniti punti;
- d) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

10. La funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , continua per ogni  $x$ , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) dx = a, \quad \int_0^6 f(x) dx = b,$$

dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori  $a, b$  per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x) dx = \ln 4.$$

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

- a) Assegnata la curva  $k$  di equazione

$$k : y = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}$$

conviene esplicitare innanzitutto il suo dominio  $D$ , definito dall'unica condizione  $x^3 + 2 \neq 0$ . Questa implica  $x^3 \neq -2$  dalla quale  $x \neq \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ . Pertanto  $D = \mathbb{R} - \{-\sqrt[3]{2}\}$ .

Per determinare i valori appartenenti al semipiano delle ordinate positive ( $y > 0$ ) va perciò risolta la disequazione

$$y > 0 \quad \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} > 0 \quad \implies \quad x^3 + 2 > 0 \quad \implies \quad x^3 > -2.$$

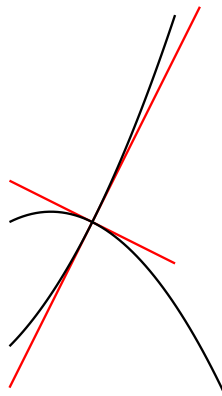
Essendo la radice di indice dispari si può estrarre la radice cubica di entrambi i membri ed ottenere  $x > -\sqrt[3]{2}$ .

Analogamente la condizione  $y < 0$  comporta  $x^3 + 2 < 0$  ossia  $x^3 < -2$  e quindi  $x < -\sqrt[3]{2}$ .

b) Il passaggio per  $O$  implica che sia  $c = 0$  per l'equazione rappresentativa della parabola  $\gamma : y = ax^2 + bx + c$  richiesta dal testo. Poiché  $\gamma$  passa pure per il punto di  $k$  di ascissa  $-1$ , la relativa ordinata si ottiene calcolando

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 2}{(-1)^3 + 2} = 3.$$

Definiamo quindi il punto comune alle due curve come  $A(-1, 3)$ . Questo punto dovrà appartenere a  $\gamma$  e quest'ultima, in  $A$ , dovrà incidere perpendicolarmente a  $k$  come esemplificato dalla fig. 1.



**Fig. 1.** Esempio di incidenza ortogonale di due curve.

Pertanto, come seconda condizione, i coefficienti angolari delle rette tangenti a ciascuna curva dovranno soddisfare alla condizione di perpendicolarità nel punto  $A$ . Ne segue per le derivate

$$y' = D(ax^2 + bx) = 2ax + b$$

e in  $x = -1$  si ha  $y'(-1) = -2a + b$ . La derivata della funzione  $k$  risulta

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 2) - 3x^2(x^2 + 2)}{(x^3 + 2)^2} = \frac{2x^4 + 4x - 3x^4 - 6x^2}{(x^3 + 2)^2} = \frac{x(-x^3 - 6x + 4)}{(x^3 + 2)^2}$$

e poiché  $f'(-1) = -1(1 + 6 + 4) = -11$  la condizione di perpendicolarità si scrive

$$y'(-1) = -\frac{1}{f'(-1)} \quad \text{cioè} \quad -2a + b = \frac{1}{11}.$$

L'altra condizione, come detto, è connessa all'appartenenza di  $A$  alla parabola  $\gamma$ ,  $3 = a(-1)^2 + b(-1)$  per cui dalla loro applicazione discende il sistema

$$\begin{cases} 3 = a - b \\ -2a + b = \frac{1}{11}. \end{cases}$$

Si deducono facilmente i valori  $a = -34/11$  e  $b = -67/11$  ossia l'equazione della parabola richiesta è

$$\gamma : y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x.$$

c) La retta tangente a  $k$  in  $A$  si calcola immediatamente sfruttando l'espressione generale che fornisce l'equazione della tangente nel punto  $(x_0, f(x_0))$  alla curva di equazione  $y = f(x)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nel nostro caso risulta

$$t : y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad \implies \quad y - 3 = -11(x + 1) \quad y = -11x - 8.$$

Per ricercare eventuali altri punti di intersezione tra  $k$  e la tangente  $t$  vanno studiate le possibili soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = -11x - 8 \\ y = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} \end{cases}$$

non dimenticando che, essendo le due "curve" tangenti in  $A$  una con l'altra, tale sistema dovrà presentare a) la soluzione  $x = -1$ , b) tale soluzione dovrà avere molteplicità almeno pari a 2. Pertanto l'equazione risolvente

$$-11x - 8 = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2} \quad \implies \quad (x^3 + 2)(-11x - 8) = x^2 + 2$$

e che si può riscrivere come  $11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = 0$ , deve presentare la radice  $x = -1$  per due volte. Applicando quindi, per due volte, la divisione con il metodo di Ruffini si ha:

	11	8	1	22	18
-1		-11	3	-4	-18
	11	-3	4	18	0

cioè  $(x - 1)(11x^3 - 3x^2 + 4x + 18)$ . Riapplicandolo al secondo polinomio fattore

$$\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 11 & -3 & 4 & 18 \\ & & -11 & 14 & -18 \\ \hline & 11 & -14 & 18 & 0 \end{array}$$

otteniamo la seguente scomposizione per l'equazione risolvente  $(x - 1)^2(11x^2 - 14x + 18) = 0$ . Uguagliato a zero il secondo fattore

$$11x^2 - 14x + 18 = 0 \quad \text{questo possiede} \quad \frac{\Delta}{4} = 7^2 - 11 \times 18 = -149 < 0$$

per cui non vi possono essere altre soluzioni reali del sistema iniziale. Ciò significa, in definitiva, che la retta tangente non incontra ulteriormente la curva  $k$  in punti distinti da  $A$ .

d) Per rispondere al quesito è sufficiente studiare le soluzioni dell'equazione  $f'(x) = 0$  in quanto l'interpretazione geometrica della derivata di una funzione afferma che quest'ultima rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente e dalla geometria analitica si conosce che una retta orizzontale possiede coefficiente angolare nullo. Ne segue esplicitamente l'equazione

$$f'(x) = \frac{x(-x^3 - 6x + 4)}{(x^3 + 2)^2} = 0$$

dalla quale abbiamo  $x(-x^3 - 6x + 4) = 0$ . Questa è risolta innanzitutto da  $x = 0$  mentre per gli eventuali valori non nulli potranno discendere dalla

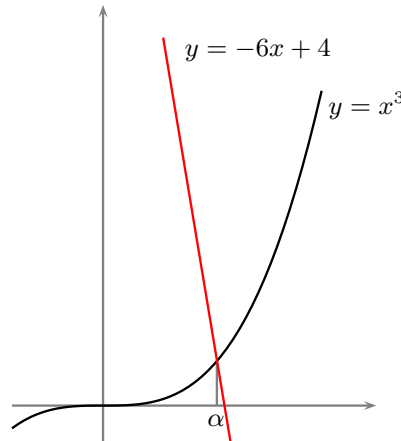
$$-x^3 - 6x + 4 = 0.$$

Poiché il tentativo che sfrutta, come possibili radici, i divisori del termine noto 4 ossia  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ , non conduce ad alcun risultato in quanto i resti della divisione secondo il metodo di Ruffini sono tutti diversi da zero, converrà ricercare le possibili soluzioni aiutandosi con un approccio grafico.

Pertanto riscritta l'equazione nella forma  $x^3 = -6x + 4$  possiamo interpretare la ricerca delle sue soluzioni come equivalente alla ricerca delle intersezioni tra le curve del seguente sistema

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -6x + 4. \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta la parabola cubica più semplice mentre la seconda una retta di coefficiente angolare negativo e termine noto positivo. La rappresentazione grafica, per entrambe, è immediata e viene riportata in fig. 2. Dall'analisi dei loro grafici discende l'esistenza di un'altra soluzione reale positiva  $\alpha$ . Poiché  $-6x + 4 = 0$  per  $x = 2/3$ , la radice  $\alpha$  soddisfa alle disuguaglianze



**Fig. 2.** Grafici di  $y = x^3$  e  $y = -6x + 4$ .

$0 < \alpha < 2/3$ . In definitiva la curva  $k$  possiede due punti a tangente orizzontale corrispondenti alle ascisse  $x = 0$  e  $x = \alpha$ .

e) Le ipotesi del teorema di Lagrange o del valor medio sono

- 1) la funzione di equazione  $y = f(x)$  dev'essere definita e continua  $[a, b]$  e
- 2) derivabile in  $]a, b[$

In tali ipotesi il teorema assicura

$$\exists c \in ]a, b[ \quad \text{tale che} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poiché l'unico valore dove la funzione  $k$  non è definita è  $x = -\sqrt[3]{2}$  si tratta innanzitutto di assicurarci che questo valore non sia interno all'intervallo  $[-\sqrt{2}, 0]$  proposto dal testo cioè che sia  $-\sqrt[3]{2} < -\sqrt{2}$ . Moltiplicando entrambi i membri per  $-1$  ne segue  $\sqrt[3]{2} > \sqrt{2}$  ed elevando a potenza 6 si ha  $4 > 8$ .

Data l'evidente falsità di quest'ultima disuguaglianza risulta che  $-\sqrt[3]{2} \in ]-\sqrt{2}, 0[$  per cui non è soddisfatta la prima ipotesi del teorema: il teorema di Lagrange non è perciò applicabile.

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

a) Poniamo  $l_1 = a + 2x$ ,  $l_2 = a - x$ ,  $l_3 = 2a - x$  con il parametro  $a$  e la variabile  $x$  che potranno assumere qualsiasi valore positivo ( $a > 0$  e  $x > 0$ ). Difatti il testo introduce queste grandezze come delle (misure di) lunghezze ossia come grandezze che comunemente sono definite positive. Affinché  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  possano essere le misure delle lunghezze dei lati di un triangolo non degenere, cioè di un triangolo che non degeneri in un punto o in un segmento, dovrà essere innanzitutto

$$\begin{cases} l_1 > 0 \\ l_2 > 0 \\ l_3 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Soddisfatto questo sistema, per i lati di un triangolo qualsiasi deve valere la disuguaglianza triangolare in conseguenza della quale la somma delle lunghezze di due lati dev'essere maggiore o uguale al terzo. Viceversa, non sarebbe possibile costruire il triangolo: si pensi ad esempio a segmenti di lunghezze pari a 10, 1, 2. Con tale terna non si potrà certo costruire un triangolo in quanto  $2 + 1 < 10$ . Poiché la disuguaglianza triangolare deve valere per qualsiasi permutazione dei tre lati di un triangolo ossia \*

$$l_1 + l_2 > l_3 \quad \wedge \quad l_2 + l_3 > l_1 \quad \wedge \quad l_3 + l_1 > l_2,$$

le ulteriori condizioni da aggiungere alle precedenti sono

$$\begin{cases} (a + 2x) + (a - x) > 2a - x \\ (a - x) + (2a - x) > a + 2x \\ (2a - x) + (a + 2x) > a - x. \end{cases} \quad (2)$$

Dal sistema (1) discende

$$\begin{cases} a + 2x > 0 \\ a - x > 0 \\ 2a - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > -a/2 \\ x < a \\ x < 2a \\ x > 0 \end{cases}$$

Supposto come detto,  $a > 0$ , il sistema è risolto dai valori dell'intervallo  $0 < x < a$  (fig. 1).

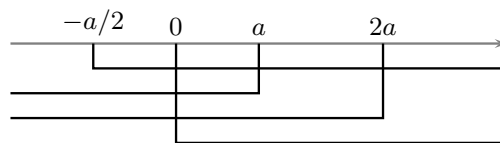


Fig. 1.

Il sistema (2) ammette invece le soluzioni

$$\begin{cases} 2a + x > 2a - x \\ 3a - 2x > a + 2x \\ 3a + x > a - x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x > 0 \\ -4x > -2a \\ 2x > -2a \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ x < a/2 \\ x > -a \end{cases}$$

\* Ringrazio lo studente Daniele Angella per avermi fatto notare un errore sfuggitomi nella prima stesura del testo di questa soluzione.

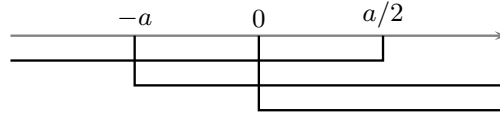


Fig. 2.

da cui  $0 < x < a/2$  (fig. 2).

In definitiva perché sussista un triangolo non degenere le condizioni a carattere geometrico implicano che dev'essere  $a > 0$  e  $0 < x < a/2$ .

b) Per determinare gli estremi dell'area del triangolo, dovremo esprimere l'area in funzione della variabile  $x$ . Poiché i lati sono assegnati, conviene rifarsi alla formula di Erone che fornisce l'area in base alla lunghezza dei lati e del semiperimetro  $p$

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-l_1)(p-l_2)(p-l_3)}.$$

Risulta

$$2p = l_1 + l_2 + l_3 \quad 2p = (a + 2x) + (a - x) + (2a - x) = 4a.$$

Notiamo inoltre che la positività dei fattori coinvolti nel radicando della formula di Erone è assicurata dalla disuguaglianza triangolare. Difatti il termine  $p - l_1$ , per esempio, si riscrive come

$$\begin{aligned} p - l_1 &= \left( \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} \right) - l_1 \\ &= \frac{l_1 + l_2 + l_3 - 2l_1}{2} \\ &= \frac{l_2 + l_3 - l_1}{2} \end{aligned}$$

e dato che sussiste la disuguaglianza  $l_2 + l_3 > l_1$  tale termine risulta certamente positivo. Analogamente per gli altri fattori. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \sqrt{2a(2a - a - 2x)(2a - a + x)(2a - 2a + x)} \\ &= \sqrt{2ax(a - 2x)(a + x)} \quad x \in \left] 0, \frac{a}{2} \right[. \end{aligned}$$

Per individuare gli estremi di  $\mathcal{A}(x)$  calcoliamone la derivata e il relativo segno.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(x) &= \frac{2a(a - 2x)(a + x) + 2ax(-2)(a + x) + 2ax(a - 2x)}{2\sqrt{2ax(a - 2x)(a + x)}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{(\dots)}} \cdot (a^2 + ax - 2ax - 2x^2 - 2ax - 2x^2 + ax - 2x^2) \\ &= \frac{a(-6x^2 - 2ax + a^2)}{\sqrt{2ax(a - 2x)(a + x)}} \end{aligned}$$

Posto  $\mathcal{A}'(x) \geq 0$  otteniamo l'equazione  $-6x^2 - 2ax + a^2 \geq 0$ : essendo le radici dell'equazione associata

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 6a^2}}{-6}$$

e, dopo aver posto

$$x_1 = a \left( \frac{-1 - \sqrt{7}}{6} \right) \approx -0,60a \quad x_2 = a \left( \frac{-1 + \sqrt{7}}{6} \right) \approx 0,27a,$$

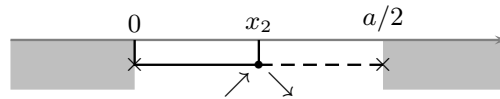


Fig. 3.

le soluzioni della disequazione risultano espresse dalle condizioni  $x_1 \leq x \leq x_2$ , intervallo che va intersecato con le condizioni di esistenza già discusse. Il grafico del segno della derivata prima è riassunto dalla fig. 3 che mette in luce come in corrispondenza di  $x_2$  l'area assuma valore massimo. Fra i triangoli studiati ne esiste pertanto solo uno di area massima mentre, poiché l'intervallo di variabilità della  $x$  è aperto, non vi possono essere minimi. L'estremo inferiore di  $\mathcal{A}(x)$  risulta invece lo zero essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(x) = 0.$$

c) Se  $x = \frac{a}{4}$  discende che  $l_1 = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$ ,  $l_2 = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a$ ,  $l_3 = 2a - \frac{a}{4} = \frac{7}{4}a$  e poiché

$$l_1 + l_2 > l_3 \quad \text{in quanto} \quad \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}a > \frac{7}{4}a,$$

esiste certamente il triangolo annunciato dal testo.

Per costruirlo è sufficiente tracciare il segmento di lunghezza  $\overline{BC} = \frac{7}{4}a$  (fig. 4) e quindi, tramite il compasso, tracciare due circonferenze di centro  $B$  e  $C$  e di raggio rispettivamente pari a  $\frac{3}{2}a$  e  $\frac{3}{4}a$ .

I loro punti di intersezione, simmetrici rispetto al segmento di partenza, definiscono il terzo vertice, per esempio  $A$  in figura, del triangolo.

Per stabilire il valore dell'angolo corrispondente a questo terzo vertice,  $\angle BAC$ , applichiamo il teorema di Carnot in quanto sono noti tutti e tre i lati di  $\triangle BAC$ .

Ne segue

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{BA} \cdot \overline{CA} \cos \angle BAC$$

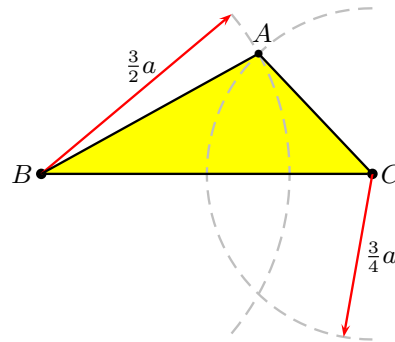


Fig. 4. Costruzione del triangolo.

che diventa

$$\left(\frac{7}{4}a\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right) \cdot \left(\frac{3}{4}a\right) \cos \angle BAC$$

Si ottiene quindi

$$\frac{4}{16}a^2 = -\frac{9}{4}a^2 \cos \angle BAC \implies \cos \angle BAC = -\frac{1}{9}$$

per cui, passando all'inversa del coseno (angoli maggiori di  $\pi$ , ovviamente, non vanno considerati)

$$\angle BAC = \arccos\left(-\frac{1}{9}\right) \approx 96^\circ.$$

Essendo  $\angle BAC > \frac{\pi}{2}$  il  $\triangle BAC$  è ottusangolo.

d) Posto  $\overline{AD} = a$ , l'angolo richiesto è quello formato dalla perpendicolare a  $BC$  condotta da  $D$  nel punto  $H$  e dal segmento  $AH$ , altezza di  $\triangle ABC$  rispetto alla base  $BC$  (fig. 5). Per determinarlo è sufficiente trovare  $\overline{AH}$  e quindi risolvere l'equazione

$$\operatorname{tg} \angle AHD = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} \quad (3)$$

nell'incognita  $\beta = \angle AHD$ .

Analogamente a quanto fatto nel punto precedente per l'angolo  $\angle BAC$ , determineremo con il teorema di Carnot  $\gamma = \angle ABC$  e di conseguenza la misura dell'altezza  $AH$ . Pertanto

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos \gamma$$

dalla quale, ricordando che  $\overline{AB} = \frac{3}{2}a$  e  $\overline{BC} = \frac{7}{4}a$  si ottiene

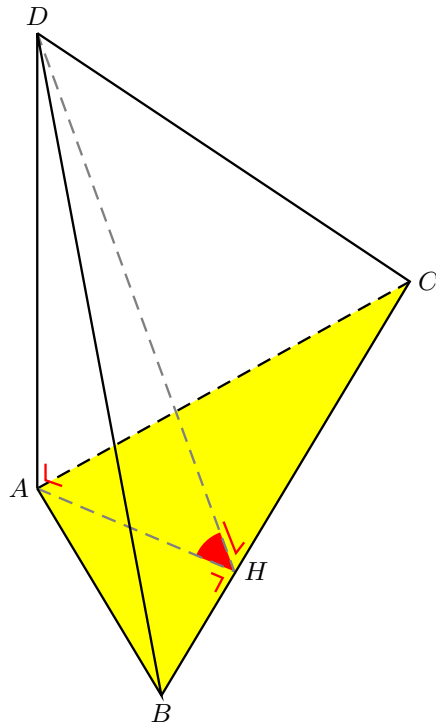


Fig. 5. Piramide retta

$$\left(\frac{3}{4}a\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{7}{4}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right) \cdot \left(\frac{7}{4}a\right) \cos \gamma$$

cioè

$$\frac{9}{16}a^2 = \frac{9}{4}a^2 + \frac{49}{16}a^2 - \frac{21}{4}a^2 \cos \gamma \quad \frac{21}{4} \cos \gamma = \frac{76}{16} \quad \cos \gamma = \frac{76}{84}.$$

Per le relazioni goniometriche intercorrenti tra cateti e ipotenusa in un triangolo rettangolo sia ha che

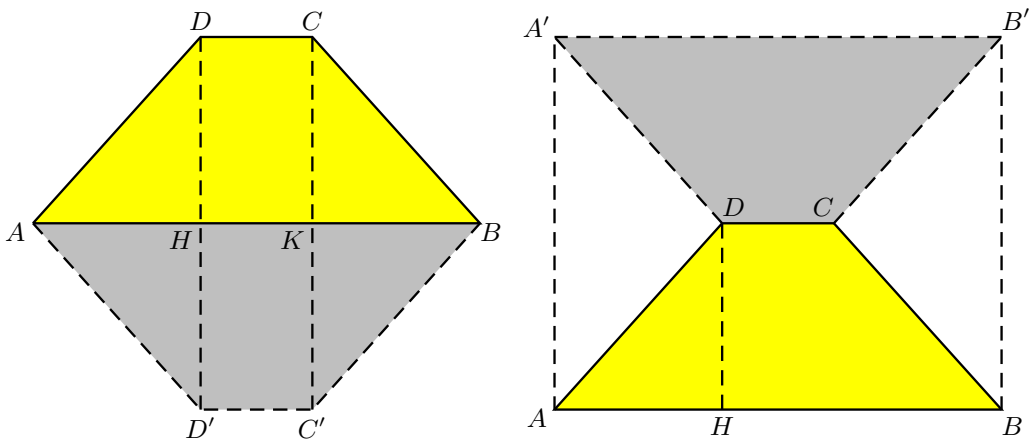
$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \overline{AB} \sin \gamma = \frac{3}{2}a \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \frac{3}{2}a \sqrt{1 - \left(\frac{76}{84}\right)^2} = \frac{3}{2}a \sqrt{\frac{1280}{84^2}} \end{aligned}$$

e, dopo le opportune semplificazioni, si ha  $\overline{AH} = \frac{a}{7}\sqrt{20} = \frac{2a}{7}\sqrt{5}$ . Riprendendo infine la (3) deduciamo

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = a : \left( \frac{2a}{7} \sqrt{5} \right) \implies \operatorname{tg} \beta = \frac{7}{2\sqrt{5}}$$

ossia  $\beta = \operatorname{arctg} \frac{7\sqrt{5}}{10} \approx 57,42^\circ$  che, a meno di un grado come richiesto dal testo, diviene  $\beta \approx 57^\circ$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)



**Fig. 1.** I due solidi di rotazione.

Le due situazioni sono rappresentate nella fig. 1. Si conosce che  $\overline{AB} = 4\overline{CD}$ . Posto quindi, per semplicità di scrittura,  $\overline{CD} = x$  e  $\overline{DH} = y$  esprimiamo in termini di queste variabili (ovviamente positive) il volume di ciascuno dei due solidi di rotazione proposti dal testo.

Nel primo caso il volume si esprime come

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= 2\mathcal{V}(\text{cono } AD'D) + \mathcal{V}(\text{cilindro } DD'C'C) \\ &= 2 \left( \frac{1}{3} \overline{AH} \cdot \pi \overline{DH}^2 \right) + \pi \overline{DH}^2 \cdot \overline{HK} \end{aligned}$$

mentre nel secondo diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \mathcal{V}(\text{cilindro } ABB'A') - 2\mathcal{V}(\text{cono } ADA') \\ &= \pi \overline{DH}^2 \cdot \overline{AB} - 2 \left( \frac{1}{3} \overline{AH} \cdot \pi \overline{DH}^2 \right) \end{aligned}$$

Per determinare le altezze dei due coni è sufficiente, in entrambi i casi, notare che

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} (\overline{AB} - \overline{CD}) = \frac{1}{2} (4x - x) = \frac{3}{2} x$$

e che  $\overline{HK} = \overline{CD}$ .

Ne segue che

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= 2 \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x \cdot \pi y^2 \right) + \pi y^2 \cdot x = \pi y^2 x + \pi y^2 x = 2\pi y^2 x \\ \mathcal{V}_2 &= \pi y^2 \cdot (4x) - 2 \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x \cdot \pi y^2 \right) = 4\pi y^2 x - \pi y^2 x = 3\pi y^2 x\end{aligned}$$

Il loro rapporto è allora

$$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{2\pi y^2 x}{3\pi y^2 x} = \frac{2}{3}.$$

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Il tetraedro è un poliedro con quattro facce “equilatera”. Difatti le facce di questo poliedro (assieme al cubo, all’ottaedro, al dodecaedro e all’icosaedro, uno dei cinque poliedri regolari o platonici) sono costituite da quattro triangoli equilateri congruenti (fig. 1). Il tetraedro può quindi essere considerato come una piramide regolare retta avente per base un triangolo equilatero.

Sia  $l$  il lato dei quattro triangoli equilateri e calcoliamone l’area totale e il volume. Posta pari ad  $\mathcal{A}_t$  l’area di un triangolo equilatero di lato  $l$ , è immediato determinare l’area totale

$$\mathcal{A} = 4 \cdot \mathcal{A}_t = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot l \right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \sqrt{3} l^2.$$

L’espressione ottenuta mostra quanto ci si poteva aspettare senza un calcolo esplicito e cioè come l’area sia proporzionale al quadrato del lato  $l$ . Ci aspettiamo quindi che pure per il volume esista una analoga proporzionalità ovviamente, per ragioni dimensionali, con  $l^3$ .

Difatti l’altezza del tetraedro rispetto alla base si può dedurre considerando il triangolo di vertici  $VBA$  (fig. 1) dove  $B$  rappresenta il piede dell’altezza alla base nonché baricentro di quest’ultima. Ricordando che questo punto divide la mediana, che in un triangolo equilatero coincide con l’altezza, in parti una doppia dell’altra, abbiamo che  $\overline{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{1}{\sqrt{3}} l$  da cui, per il teorema di Pitagora,

$$\overline{VB} = \sqrt{\overline{VA}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{l^2 - \frac{1}{3} l^2} = l \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il volume che ne discende è

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_t \cdot \overline{VB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \cdot l \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} \sqrt{2} l^3,$$

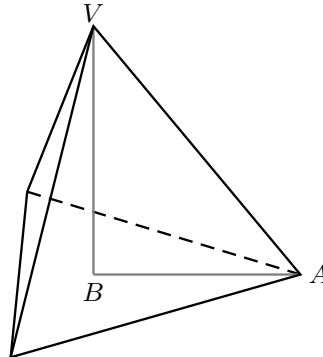


Fig. 1. Tetraedro.

espressione che conferma le aspettative di proporzionalità con  $l^3$ . Poiché il testo del quesito pone il rapporto tra le aree di due tetraedri pari a  $A'/A'' = 2$ , per quanto dimostrato **sopra** dev'essere

$$\frac{A'}{A''} = 2 \implies \frac{(l')^2}{(l'')^2} = 2 \implies \frac{l'}{l''} = \sqrt{2}.$$

In definitiva il rapporto tra volumi è pertanto

$$\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}''} = \frac{(l')^3}{(l'')^3} = \left(\frac{l'}{l''}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}.$$

Evidentemente si poteva arrivare al medesimo risultato semplicemente supponendo le proporzionalità

$$\mathcal{A} \propto l^2 \quad \mathcal{V} \propto l^3,$$

evitando così la dimostrazione esplicita delle espressioni dell'area totale  $\mathcal{A}$  e del volume  $\mathcal{V}$  del tetraedro.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Se, per ipotesi, è

$$a > b \wedge c > d \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

segue pure

$$a > b \wedge -c < -d,$$

avendo moltiplicato per  $-1$  la seconda disuguaglianza. Leggendo la  $-c < -d$  da destra verso sinistra e riscritte le precedenti come

$$a > b \wedge -d > -c,$$

si può, in base alle proprietà fondamentali delle disuguaglianze tra numeri reali, sommare membro a membro e ottenere

$$a + (-d) > b + (-c) \implies a - d > b - c$$

che evidenzia come la risposta corretta sia la b).

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Ricordato che le medie aritmetica e geometrica di due numeri sono, rispettivamente date da

$$\text{media aritmetica: } \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{media geometrica } \sqrt{x_1 \cdot x_2},$$

supponiamo coerentemente con l'affermazione riportata nel quesito, che sia

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 \cdot x_2} \\ x_1 > 0 \wedge x_2 > 0. \end{cases}$$

Essendo entrambi i membri della prima disuguaglianza positivi, possiamo elevare al quadrato ed ottenere

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} > x_1 x_2 \quad \text{dalla quale} \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 > 4x_1 x_2$$

ossia

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 > 0 \quad \text{che si può riscrivere come} \quad (x_1 - x_2)^2 > 0.$$

Ora quest'ultima, nel caso che sia  $x_1 = x_2$ , può pure essere nulla diversamente da quanto supposto inizialmente. Pertanto l'affermazione del quesito è falsa mentre l'enunciato corretto è che *“la media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore o uguale della loro media geometrica”*. Si veda per un'ulteriore dimostrazione la discussione del [quesito 1](#) assegnato nei corsi sperimentali PNI.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Dobbiamo determinare due numeri  $a$  e  $b$  in modo che la relazione

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità cioè valga per ogni  $x$  appartenente al dominio dell'espressione a primo membro ossia  $x^2 - 2x - 3 \neq 0$ . Questa implica che sia  $x \neq -1$  e  $x \neq 3$ . In tali ipotesi, possiamo moltiplicare entrambi i membri per il minimo comune denominatore  $(x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3$  ottenendo

$$1 = a(x + 1) + b(x - 3) \implies 1 = x(a + b) + (a - 3b).$$

Abbiamo in tal modo ricondotto l'espressione iniziale all'uguaglianza di due polinomi. Essendo questi ridotti a forma normale, il principio di identità dei polinomi assicura che due polinomi sono identici se i coefficienti delle potenze dello stesso grado sono uguali. Ne segue che dev'essere

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 3b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -b \\ -b - 3b = 1 \end{cases}$$

In definitiva, otteniamo facilmente che la relazione di partenza è un'identità se  $a = 1/4$  e  $b = -1/4$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Poiché la funzione  $f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5$  sviluppata si riduce ad un polinomio di 12° grado, sappiamo che i polinomi rappresentano funzioni continue in tutto  $\mathbb{R}$  e quindi pure nell'intervallo chiuso  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ . La funzione rientra nelle ipotesi del teorema di Weierstrass, *ogni funzione continua su un insieme chiuso e limitato è limitata e assume un valore massimo e minimo assoluti*: pertanto la  $f$  ammette certamente un massimo e un minimo assoluti.

In modo solo leggermente diverso, possiamo notare che essendo  $x \geq \frac{1}{2}$ , il primo fattore risulta  $(2x - 1)^7 \geq 0$ , annullandosi per  $x = \frac{1}{2}$ . Analogamente  $(4 - 2x)^5 \geq 0$  per  $x \leq 2$ , annullandosi in  $x = 2$ .

La funzione  $f$ , nell'intervallo assegnato, appare il prodotto di due fattori positivi in tutti i punti distinti dagli estremi dell'intervallo, dove si annulla. Il minimo non potrà che essere lo zero raggiunto negli estremi mentre il massimo, la cui esistenza è, ancora, assicurata dal teorema di Weierstrass, si avrà in corrispondenza di (almeno) un punto interno.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione  $f$  di variabile reale  $x$ , è rappresentata dall'integrale definito

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \quad x > 0,$$

dove la variabile indipendente appare negli estremi di integrazione.

Se  $a$  è una qualsiasi costante positiva, per l'additività dell'integrazione definita, l'integrale originario si può riscrivere

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt = \int_x^a \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt = -\int_a^x \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt,$$

dove si è pure applicata la proprietà dello scambio degli estremi di integrazione e le sue conseguenze sul segno dell'integrale.

Poiché, per il teorema di Torricelli–Barrow, la derivata della funzione integrale risulta essere la funzione integranda calcolata nell'estremo superiore dell'integrale supposto costante l'estremo inferiore, la derivata di  $f(x)$  risulta

$$\begin{aligned} D[f(x)] &= D \left[ -\int_a^x \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt \right] \\ &= -D \left[ \int_a^x \ln t \, dt \right] + D \left[ \int_a^{x+1} \ln t \, dt \right] \\ &= -\ln x + \ln(x+1) = \ln \left( \frac{x+1}{x} \right). \end{aligned}$$

In alternativa a quanto sopra, si poteva giungere allo stesso risultato anche con la risoluzione esplicita dell'integrale. Applicando a quest'ultimo il metodo di integrazione per parti con  $\ln x$  come fattore finito, si ha

$$\int \ln t \, dt = t \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t \, dt = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + \text{cost.}$$

Pertanto la  $f(x)$  diviene

$$\begin{aligned} f(x) &= [t \ln t - t + \text{cost.}]_x^{x+1} \\ &= (x+1) \ln(x+1) - (x+1) - (x \ln x - x) \\ &= (x+1) \ln(x+1) - x \ln x - 1, \end{aligned}$$

e la sua derivazione conduce facilmente al medesimo risultato

$$f'(x) = \ln(x+1) - \ln x = \ln \left( \frac{x+1}{x} \right).$$

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Poiché per ipotesi la funzione  $f(x)$  è continua nell'intervallo chiuso  $[1, 3]$  e derivabile nei suoi punti interni  $(1, 3)$  (oppure  $]1, 3[$ ), ad essa risulta applicabile il **teorema di Lagrange** (o del valor medio) che assicura l'esistenza di (almeno) un punto  $c \in (1, 3)$  tale

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c) \quad 1 < c < 3.$$

Dalle ulteriori due ipotesi  $f(1) = 1$  e  $0 \leq f'(x) \leq 2$  per ogni  $x$  di  $(1, 3)$  discende

$$0 \leq \frac{f(3) - 1}{3 - 1} \leq 2$$

dalla quale si ricava subito

$$0 \leq f(3) - 1 \leq 4 \implies 1 \leq f(3) \leq 5$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Per poter individuare il luogo rappresentato dall'equazione

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$$

va innanzitutto definito il dominio ponendo le condizioni di esistenza delle due radici quadrate

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Dato che la seconda equivale alla  $x^2 - 1 \leq 0$ , le uniche soluzioni del sistema si hanno quando  $x^2 - 1 = 0$  ossia in corrispondenza di  $x = \pm 1$  dove risulta pure  $y = 0$ . Il luogo cercato è pertanto individuato dai soli due punti  $A(-1, 0)$  e  $B(1, 0)$  e la risposta corretta è la b).

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La continuità della funzione reale di variabile reale  $f(x)$  in  $\mathbb{R}$  assicura l'esistenza dei due integrali definiti

$$\int_0^2 f(x) dx = a \quad \int_0^6 f(x) dx = b.$$

Volendo determinare  $a$  e/o  $b$  e supposta la validità di

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \quad \int_1^3 f(2x) dx = \ln 4,$$

si cercherà di esprimere i primi membri in funzione degli integrali incogniti  $a$  e  $b$ . Partendo dal primo di questi due integrali, cambiamo variabile di integrazione ponendo  $2x = t$ . Ne discende

$$x = \frac{t}{2} \quad dx = \frac{1}{2} dt,$$

mentre gli estremi diventano, se  $x = 0$ ,  $t = 0$  e se  $x = 3$ ,  $t = 6$ . L'integrale si può riscrivere come

$$\int_0^3 f(2x) dx = \int_0^6 f(t) \cdot \frac{dt}{2} = \ln 2 \implies \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \ln 2.$$

Considerando che la variabile  $t$  è muta, a primo membro è possibile riconoscere l'integrale incognito  $b$ . Ne segue

$$\frac{1}{2} \cdot b = \ln 2 \quad \text{e quindi ottenere il valore} \quad b = 2 \ln 2.$$

Procediamo nello stesso modo riscrivendo l'integrale a primo membro di

$$\int_1^3 f(2x) dx = \ln 4$$

in termini di  $a$  e/o  $b$ . Con la medesima sostituzione  $2x = t$ , gli estremi diventano, se  $x = 1$ ,  $t = 2$ , se  $x = 3$ ,  $t = 6$ , cosicché

$$\int_1^3 f(2x) dx = \int_2^6 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \ln 4.$$

Utilizzando la proprietà di addittività dell'integrale definito, considerando lo zero come terzo estremo di integrazione, l'uguaglianza precedente si riscrive

$$\frac{1}{2} \int_2^6 f(t) dt = \frac{1}{2} \left[ \int_2^0 f(t) dt + \int_0^6 f(t) dt \right] = \ln 4$$

che, scambiati gli estremi di integrazione nel primo addendo, implica

$$-\frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \ln 4.$$

Per le posizioni iniziali e il risultato già ottenuto, questa equazione diviene

$$-\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = \ln 4 \quad \implies \quad -\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} (2 \ln 2) = \ln 4$$

da cui

$$-\frac{1}{2} a = \ln 4 - \ln 2 \quad \implies \quad -\frac{1}{2} a = \ln \frac{4}{2} \quad \implies \quad a = -2 \ln 2.$$

Gli integrali incogniti quindi esistono e valgono rispettivamente  $a = -2 \ln 2$  e  $b = 2 \ln 2$ .

# ESAME 2002 PNI

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

Due numeri  $x$  e  $y$  hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale  $a$  non nullo. Riferito il piano ad un sistema  $S$  di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche  $(x, y)$ :

1. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di  $a$ ;
2. si trovi l'equazione cartesiana del luogo  $\gamma$  dei punti  $P(x, y)$  che soddisfano al problema;
3. si rappresentino in  $S$  sia la curva  $\gamma$  che la curva  $\gamma'$  simmetrica di  $\gamma$  rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4. si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da  $\gamma$  e da  $\gamma'$  e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5. si calcoli  $y$  nel caso che  $x$  sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

Soluzione

## • Problema n. 2

I raggi  $OA = OB = 1$  metro tagliano il cerchio di centro  $O$  in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

- 1) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono  $C$  di volume massimo, il valore  $V$  di tale volume

massimo e il valore  $V'$  assunto in questo caso dal volume del secondo cono  $C'$ ;

- 2) la capacità complessiva, espressa in litri, di  $C$  e di  $C'$ ;
- 3) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono  $C$ , specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

Soluzione

### Questionario

1. Se  $a$  e  $b$  sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono  $n$ ?

Soluzione

2. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré* (1610–1685), amico di *Blaise Pascal*: “giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?”

Soluzione

3. Assumendo che i risultati – X, 1, 2 – delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

Soluzione

4. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Soluzione

5. Cosa si intende per “funzione periodica”? Quale è il periodo di  $f(x) = -\sin \frac{\pi x}{3}$ ? Quale quello di  $\sin 2x$ ?

Soluzione

6. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio  $x^n + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ), se  $n$  è pari ha al più due radici reali, se  $n$  è dispari ha al più tre radici reali.

Soluzione

7. Data la funzione

$$f(x) = e^x - \sin x - 3x$$

calcolarne i limiti per  $x$  tendente a  $+\infty$  e  $-\infty$  e provare che esiste un numero reale  $\alpha$  con  $0 < \alpha < 1$  in cui la funzione si annulla.

Soluzione

8. Verificare che la funzione  $3x + \log x$  è strettamente crescente. Detta  $g$  la funzione inversa, calcolare  $g'(3)$ .

Soluzione

9. Trovare  $f(4)$  sapendo che  $\int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$ .

Soluzione

10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Le ipotesi date dal testo si traducono facilmente nelle equazioni

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = a \\ a \in \mathbb{R}_0. \end{cases} \quad (1)$$

Evidentemente l'esistenza del rapporto implica che sia  $y \neq 0$  mentre l'ultima condizione ( $a \neq 0$ ) comporta pure  $x \neq 0$ . In sostanza la coppia di valori reali  $(0, 0)$  non è soluzione del sistema iniziale. Chiarito ciò possiamo riscrivere il sistema iniziale come

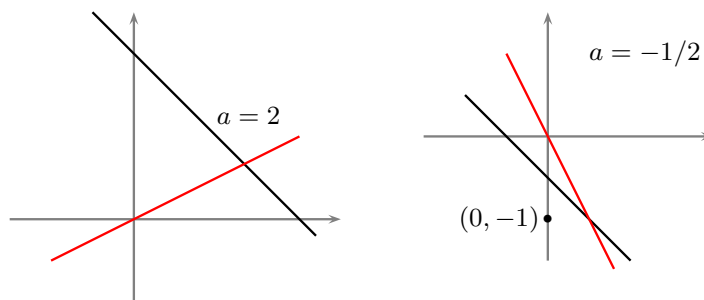
$$\begin{cases} y = -x + a \\ y = \left(\frac{1}{a}\right)x \\ x, y, a \in \mathbb{R}_0, \end{cases} \quad (2)$$

che si può interpretare graficamente nel sistema  $S$  come equivalente alla ricerca delle intersezioni di

1. un fascio di rette parallele (fascio improprio) di coefficiente angolare  $-1$  e termine noto  $a$ , con
2. un secondo fascio proprio con centro l'origine di  $S$  e coefficiente angolare  $\frac{1}{a}$ .

Le condizioni poste implicano che dal fascio improprio sia esclusa la retta passante per l'origine mentre in quello proprio è escluso l'asse delle ordinate. Possiamo ora discutere il problema trattando le diverse situazioni che si possono presentare.

Se  $a$  assume valori positivi esiste comunque una intersezione tra i due fasci appartenente al primo quadrante e se  $a \rightarrow +\infty$  il punto di intersezione tende ad allontanarsi dall'origine (fig. 1).



**Fig. 1.** Situazioni corrispondenti ad  $a = 2$  e  $a = -1/2$ .

Per  $-1 < a < 0$  il problema presenta ancora una soluzione rappresentata da un punto del IV quadrante che, al tendere di  $a$  a  $-1$ , possiede coordinate che assumono gli andamenti  $x \rightarrow +\infty$  e  $y \rightarrow -\infty$ . Questo comportamento discende dal fatto che la retta di equazione  $y = \frac{1}{a}x$  (in rosso nelle figg. 1, 2) tende a divenire parallela all'altra quando  $a \rightarrow -1^+$ . Se  $a = -1$  invece non vi possono essere punti di intersezione essendo le due rette parallele (fig. 2). Il sistema non ammette quindi soluzione.

Infine se  $a < -1$  (fig. 2) il problema possiede ancora una soluzione rappresentata da un punto nel II quadrante. Ancora, se  $a \rightarrow -1^-$ , risulta  $x \rightarrow -\infty$  e  $y \rightarrow +\infty$ . In definitiva il sistema (2) ammette una ed una sola soluzione per  $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ .

2. Notato che il sistema iniziale (1) si può pure interpretare come la rappresentazione parametrica del luogo  $\gamma$  dei punti  $P(x, y)$ , l'equazione cartesiana di questo

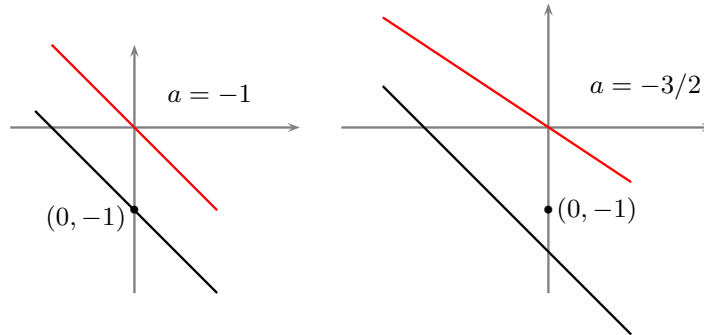


Fig. 2. Situazioni corrispondenti ad  $a = -1$  e  $a = -3/2$ .

luogo si determina eliminando il parametro  $a$  dal sistema. Pertanto, sostituendo  $a = x + y$  nella seconda equazione discende

$$\frac{x}{y} = x + y$$

da cui l'equazione richiesta

$$\gamma : y^2 + xy - x = 0, \quad x, y \neq 0. \quad (3)$$

Essendo di secondo grado in  $y$  e di primo in  $x$  conviene esplicitare quest'ultima variabile ed ottenere per il luogo  $\gamma$  l'espressione alternativa

$$\gamma : x = \frac{y^2}{1 - y} \iff y \neq 0, 1. \quad (4)$$

3. Per ottenere l'equazione della curva  $\gamma'$ , simmetrica di  $\gamma$  rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, è sufficiente applicare all'equazione (4) la trasformazione

$$\sigma : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

che sostanzialmente scambia il ruolo delle variabili: si ottiene

$$\gamma' : y' = \frac{x'^2}{1 - x'}.$$

Se abbandoniamo gli indici, l'equazione si riscrive più opportunamente come

$$\gamma' : y = \frac{x^2}{1 - x} \quad x \neq 0, 1.$$

Quest'ultima è ora rappresentativa di una funzione di variabile reale per cui per studiarne il grafico possiamo applicare i metodi dell'analisi. Determinato poi il

grafico di  $\gamma'$  possiamo ottenere, per simmetria, pure quello di  $\gamma$ . Va comunque osservato che l'equazione (3) è un caso particolare dell'equazione generale di una conica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Poiché in riferimento a questa equazione, si hanno i seguenti tre casi:

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ : ellisse;
- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ : parabola;
- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ : iperbole;

possiamo prevedere che, avendo  $\Delta = 1 > 0$ , la curva rappresentativa di  $\gamma$  (e  $\gamma'$ ) sarà un'iperbole.

• Studio del segno di  $\gamma'$ . Tenendo presente che in mancanza della condizione  $x \neq 0$  l'equazione rappresentativa si annullerebbe, risulta per i restanti valori del dominio,  $y > 0$  se  $1 - x > 0$  cioè se  $x < 1$ .

I limiti nei punti singolari e agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1\pm} y = \mp\infty,$$

con  $\lim_{x \rightarrow 1\pm} 1 - x = 0\mp$  e  $\lim_{x \rightarrow 1\pm} x^2 = 1$  e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(-1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(-1 + \frac{1}{x})} = \mp\infty.$$

Dato quest'ultimo risultato, la funzione può quindi presentare un asintoto obliquo. Eseguita la divisione del polinomio  $x^2$  con  $1 - x$  si può riscrivere, identicamente

$$\gamma' : y = \frac{x^2}{1 - x} = -x - 1 + \frac{1}{1 - x}$$

che mette in evidenza la sua parte asintotica  $-x - 1$ . Formalmente poi, discende che il coefficiente angolare risulta

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(1 - x)} = -1$$

mentre il termine noto possiede il valore

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y - (-x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -1 + \frac{1}{1 - x} = -1.$$

L'asintoto obliquo è pertanto espresso dall'equazione  $a : y = -x - 1$ .

Passando alla derivata prima si ottiene

$$y' = -1 + \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{x(2 - x)}{(1 - x)^2},$$

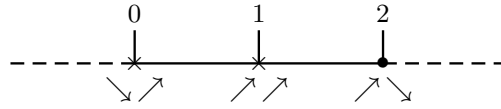


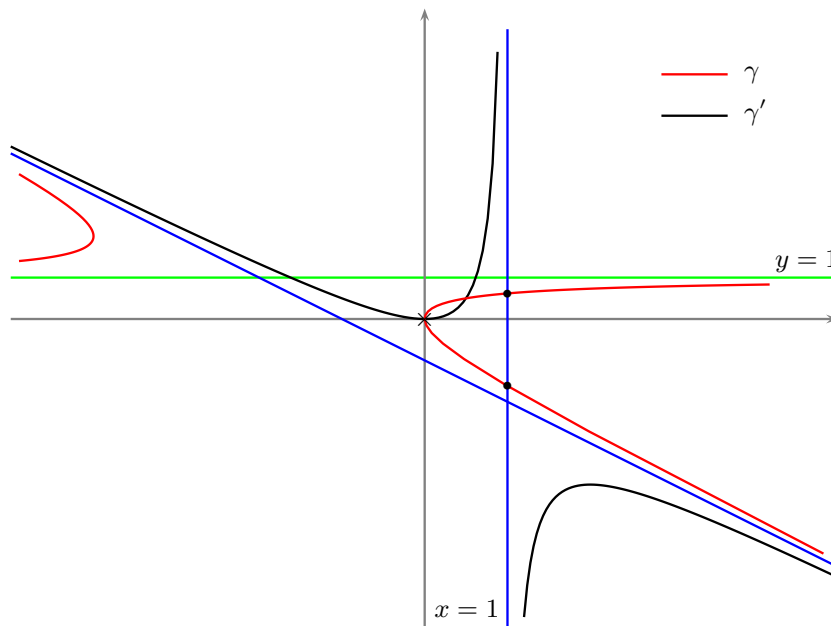
Fig. 3.

e la condizione  $y' \geq 0$  comporta che sia  $0 < x \leq 2$  con  $x \neq 1$ , cosicché la monotonia della funzione è riassunta in fig. 3.

Il calcolo della  $y''$  implica che sia

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3} \quad \text{risultando} \quad y'' > 0 \quad \text{se} \quad x < 1.$$

Il grafico di  $\gamma'$  e il suo simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante sono riportati in fig. 4 dove, per ragioni di opportunità grafica, non si sono rispettate le condizioni di monometricità richieste dal testo.

Fig. 4. Grafici di  $\gamma$  e  $\gamma'$  in un sistema non isometrico.

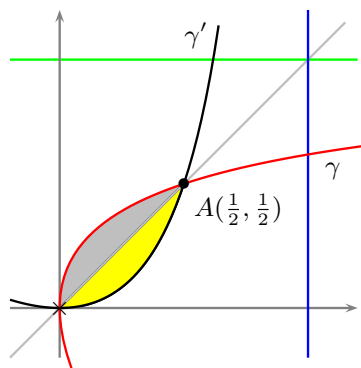
Va notato che l'origine è un punto non appartenente ad entrambe le curve: inoltre lo scambio di  $x$  e  $y$  non modifica l'equazione dell'**asintoto**  $a$  che pertanto risulta unito rispetto alla simmetria assiale  $\sigma$ . L'asintoto verticale di  $\gamma'$  di equazione  $x = 1$  (in blu nella fig. 4) diventa invece un asintoto orizzontale  $y = 1$  per  $\gamma$  (verde in fig. 4).

4. Rappresentiamo la regione finita di piano delimitata da  $\gamma$  e  $\gamma'$  in fig. 5. Per

individuare il punto di intersezione  $A$  tra le due curve e distinto dall'origine, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{1-x} \\ y = x \end{cases}$$

in quanto  $A$ , dovendo appartenere sia a  $\gamma$  che a  $\gamma'$ , deve essere unito rispetto alla trasformazione assiale  $\sigma$ . Si ottiene facilmente che  $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Considerando ancora la simmetria rispetto alla retta bisettrice  $r : y = x$ , l'area richiesta sarà pari al doppio dell'area della regione limitata tra la bisettrice  $r$  e la curva  $\gamma'$  (in giallo in fig. 5).



**Fig. 5.** Regione delimitata da  $\gamma$  e da  $\gamma'$ .

L'area  $\mathcal{A}$  è quindi espressa dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \int_0^{1/2} \left( x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx$$

per cui, scomponendo la funzione integranda utilizzando la **seconda forma** per  $\gamma'$

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^{1/2} \left( x + x + 1 - \frac{1}{1-x} \right) dx = 2 \int_0^{1/2} \left( 2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx,$$

l'integrazione si riduce ad integrali elementari e fornisce

$$\mathcal{A} = 2 [x^2 + x + \ln|x-1|]_0^{1/2} = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \approx 0,1137.$$

Il calcolo approssimato dell'integrale precedente si può condurre indifferentemente con uno dei due metodi elementari, quello dei rettangoli o quello dei trapezi (o di Bezzout). Entrambi suddividono l'intervallo di integrazione  $[a, b]$  in un numero  $n$  di intervallini di ampiezza uguale a  $h = (b-a)/n$ , di estremi  $x_i = h \cdot i + a$

e quindi, nel primo caso si calcola la funzione nel punto medio  $x_{M,i}$  dell' $i$ -esimo intervallino, nel secondo invece la si calcola agli estremi. Infine l'area totale è la somma delle aree dei rettangoli di dimensioni  $h$  e  $f(x_{i,M})$  (metodo dei rettangoli) oppure dei trapezi di altezza  $h$  e basi  $f(x_i)$ ,  $f(x_{i+1})$ . Ne risultano quindi le due formule

$$\mathcal{A} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{M,i}) = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + \frac{h}{2}(2i+1)\right] \quad \text{metodo dei rettangoli}$$

oppure

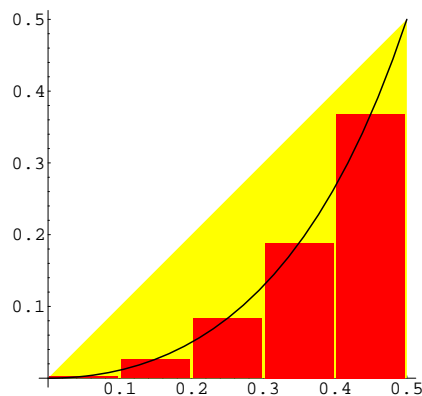
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \{f[h(i+1)+a] + f(hi+a)\} \quad \text{metodo dei trapezi} \end{aligned}$$

Applicheremo il primo metodo. Suddividiamo quindi l'intervallo  $[0, \frac{1}{2}]$  di ampiezza 0,5 in 5 intervallini di ampiezza  $h = 0,1$  e calcoliamo la funzione  $\gamma'$  nei punti medi  $x_{M,i} = \frac{0,1}{2}(2i+1)$ ,  $i = 0 \dots 4$ . Si ottengono i valori

$x_{M,i}$	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45
$f(x_{M,i})$	0.00263	0.0265	0.083	0.188	0.368

e la rappresentazione di fig. 6. Il valore approssimato dell'area sottostante  $\gamma'$  è quindi dato dalla

$$\mathcal{A}' = 0.1(0.00263 + 0.0265 + 0.083 + 0.188 + 0.368) = 0.0669.$$



**Fig. 6.** Calcolo approssimato tramite la suddivisione in 5 intervalli.

Ne discende che la stima dell'area richiesta dal problema è

$$\mathcal{A}_s = 2 \left( \frac{1}{8} - 0.0669 \right) = 0.1162,$$

essendo  $\frac{1}{8}$  l'area del triangolo avente per base (e altezza) l'intervallo di integrazione (in giallo nella fig. 6).

Pur non richiesto dal testo, forniamo per completezza, degli spezzoni di codice sorgente che implementano nel linguaggio procedurale Pascal il calcolo dell'area sia con il metodo dei rettangoli che con quello dei trapezi.

```
{*****}
{definisce la funzione integranda}

FUNCTION FunzIntegranda(x: Real): Real;
BEGIN
    FunzIntegranda:= x*x/(1-x);
END;

{*****}
{applica il metodo dei rettangoli}

PROCEDURE SommaRettangoli( a,b      : Real    {IN};
                          n        : Integer {IN};
                          VAR Area : Real    {OUT});

VAR
    i: Integer;
    Ampiezza, Somma: Real;
BEGIN
    Somma:=0.0;
    Ampiezza:=Abs(b-a)/n;
    FOR i:=0 TO n-1 DO BEGIN
        Somma:=Somma+FunzIntegranda(a+Ampiezza/2*(2*i+1));
    END;
    Area:=Ampiezza*Somma;
END;

{*****}
{applica il metodo dei trapezi}

PROCEDURE SommaTrapezi( a,b      : Real    {IN};
                        n        : Integer {IN};
                        VAR Area : Real    {OUT});

VAR
    i: Integer;
    Ampiezza, Somma: Real;
BEGIN
    Somma:=0.0;
    Ampiezza:=Abs(b-a)/n;
    FOR i:=0 TO n-1 DO BEGIN
        Somma:=Somma +
            FunzIntegranda(Ampiezza*(i+1)+a)+FunzIntegranda(Ampiezza*i+a);
    END;
    Area:=(Ampiezza/2)*Somma;
```

END;

{\*\*\*\*\*}

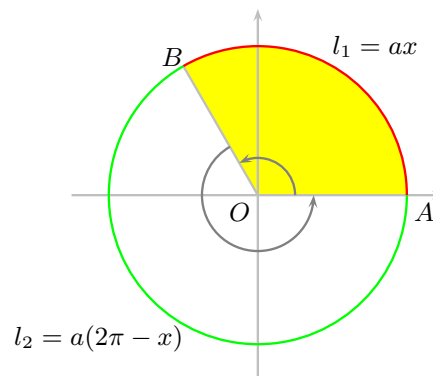
5. Riprendendo l'equazione (3) e posto in essa  $x = 1$ , le soluzioni di

$$y^2 + y - 1 = 0 \quad \text{sono} \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Interpretati sul piano cartesiano questi valori costituiscono le ordinate dei due punti di intersezione di  $\gamma$  con la retta di equazione  $x = 1$  (fig. 4). Il punto appartenente al primo quadrante possiede ordinata pari a  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  che è la sezione aurea dell'ascissa. Questo valore è inoltre il reciproco del *numero aureo*  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  che, a parte il segno, è pure l'ordinata dell'altro punto di intersezione.

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

La situazione proposta dal testo è riassunta nella figura 1 dove si è introdotto il parametro dimensionale  $a = 1$  metro pari al raggio del cerchio, cosicché nelle deduzioni successive si potranno controllare, anche dal punto di vista dimensionale, i risultati ottenuti.



**Fig. 1.** Settori circolari e grandezze che li caratterizzano.

Se i settori evidenziati sono gli sviluppi piani della superficie laterale di due coni  $C$  e  $C'$ , significa che la lunghezza di ciascun arco che delimita il settore, si dovrà interpretare come la lunghezza della circonferenza di base dei coni mentre il raggio  $a$  costituirà l'apotema di ciascuno. Detta quindi  $x = \angle AOB$  l'ampiezza in radianti del primo settore, grandezza che evidentemente dovrà soddisfare alle condizioni  $0 \leq x \leq 2\pi$ , le lunghezze degli archi saranno  $l_1 = ax$  e  $l_2 = a(2\pi - x)$ . Ne segue che i raggi di base dei due coni saranno

$$r_1 = \frac{l_1}{2\pi} = \frac{ax}{2\pi} \quad r_2 = \frac{l_2}{2\pi} = \frac{a}{2\pi}(2\pi - x).$$

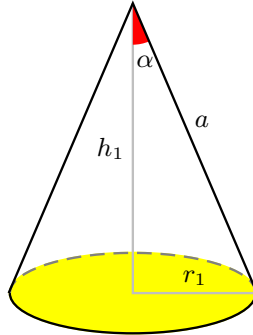


Fig. 2. Cono circolare retto.

Essendo i coni retti (cioè con le altezze che cadono nel centro del cerchio di base), le rispettive altezze si ottengono con il teorema di Pitagora (fig. 2)

$$h_1 = \sqrt{a^2 - r_1^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ax}{2\pi}\right)^2} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

$$h_2 = \sqrt{a^2 - r_2^2} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - (2\pi - x)^2} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi x - x^2}.$$

Il volume  $\mathcal{V}$  del cono  $C$  è pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} h_1 (\pi r_1^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \cdot \pi \left(\frac{ax}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (1)$$

mentre per  $C'$  riesce (sostituiamo  $\mathcal{V}'$  con  $\mathcal{V}_1$  onde non confondere con la derivata prima),

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} h_2 (\pi r_2^2) = \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot (2\pi - x)^2 \sqrt{4\pi x - x^2} \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (2)$$

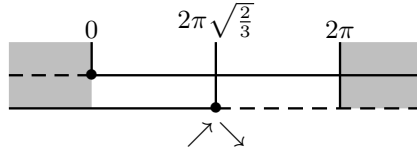
Si tratta ora di determinare il valore di  $x$  in corrispondenza del quale si ottiene il volume  $\mathcal{V}$  massimo. Dato che l'espressione ottenuta non rappresenta una funzione elementare nota, calcoliamo la sua derivata prima e studiamone il segno

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{a^3}{24\pi^2} \left( 2x \sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right) \\ &= \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot \frac{2x(4\pi^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \\ &= \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot \frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

La condizione  $\mathcal{V}' \geq 0$  implica lo studio dei fattori  $x \geq 0$  e

$$8\pi^2 - 3x^2 \geq 0, \quad \text{quest'ultima risolta per } -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ne segue il segno complessivo



**Fig. 3.**

che mette in luce la presenza di un massimo in corrispondenza di  $x_M = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ . I primi dati richiesti dal testo sono perciò:

$$\text{ampiezza: } x_M = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{arco: } l_1(\text{max}) = ax_M = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ metri.}$$

Per ottenere il rapporto percentuale tra le aree cioè il valore  $\mathcal{A}(\text{sett.})/\mathcal{A}(\text{cerchio})$  dove l'area del settore è data dall'espressione

$$\mathcal{A}(\text{sett.}) = \frac{1}{2}a^2x_M.$$

Risulta

$$\frac{\mathcal{A}(\text{sett.})}{\mathcal{A}(\text{cerchio})} = \frac{\frac{1}{2}a^2x_M}{\pi a^2} = \frac{x_M}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

che in percentuale diviene  $\mathcal{A}(\text{settore})/\mathcal{A}(\text{cerchio}) \times 100 \approx 81,65\%$ .

Calcoliamo infine i volumi in corrispondenza di  $x_M$  utilizzando le espressioni (1) e (2): si ha

$$\mathcal{V}_{\text{max}} = \frac{a^3}{24\pi^2} \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{4\pi^2 - 4\pi^2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} a^3 \approx 0,4031 \text{ metri}^3,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \frac{a^3}{24\pi^2} \left( 2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{4\pi \cdot 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\pi^2 \cdot \frac{2}{3}} \\ &= \frac{a^3\pi}{3} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{2 \left( \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \right)} \approx 0,0347 \text{ metri}^3 \end{aligned}$$

2. Per le capacità espresse in litri è sufficiente tener presente che  $1 \text{ metro}^3 = 10^3$  litri per cui

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= 0,4031 \text{ metri}^3 = 403,1 \text{ litri} \\ \mathcal{V}_1 &= 0,0347 \text{ metri}^3 = 34,7 \text{ litri.}\end{aligned}$$

3. L'angolo di apertura  $\alpha$  del cono  $C$  (fig. 2) si deduce per mezzo della tangente goniometrica è espresso da

$$\text{tg } \alpha = \frac{r_1}{h_1} = \frac{ax_M}{2\pi} : \frac{a}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x_M^2},$$

da cui, introdotto il valore  $x_M = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$  discende  $\text{tg } \alpha = \sqrt{2}$  cioè  $\alpha = \text{arctg } \sqrt{2}$ .

Per ottenere una stima numerica di tale angolo possiamo, per esempio, ridurre il problema all'applicazione di uno dei metodi numerici affrontati per la ricerca degli zeri di una funzione. Difatti posto  $f(x) = \text{tg } x - \sqrt{2}$  dobbiamo cercare un valore di  $\alpha$ , evidentemente positivo e minore di  $90^\circ$  tale che si abbia  $y = 0$ . Il metodo più semplice è allora quello di bisezione che si fonda innanzitutto sull'ipotesi di continuità della funzione in un intervallo chiuso dove la funzione assume, agli estremi, valori di segno opposto. Si possono ovviamente applicare pure altri metodi come quello delle secanti o delle tangenti (o di Newton): tutti comunque richiedono di calcolare la funzione (e quindi la tangente) in punti di un certo intervallo.

Nel nostro caso l'intervallo iniziale contenente  $\alpha$  emerge immediatamente in quanto risulta

$$f(45^\circ) = 1 - \sqrt{2} < 0 \quad \text{così come} \quad f(60^\circ) = \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0.$$

Come prima approssimazione dev'essere  $45^\circ < \alpha < 60^\circ$ . Procedendo con "bisezione", calcoliamo poi la funzione nel punto medio di tale intervallo. Si ha

$$f\left(\frac{45^\circ + 60^\circ}{2}\right) = f(52,5^\circ) \approx 1,3032 - 1,4142 < 0,$$

per cui in seconda approssimazione dovrà essere  $52,5^\circ < \alpha < 60^\circ$ . Procedendo ad una terza stima si ottiene:

$$f\left(\frac{52,5^\circ + 60^\circ}{2}\right) = f(56,25^\circ) \approx -1,7221 < 0;$$

Ne segue che la terza approssimazione (e qui ci fermiamo) implica  $56,25^\circ < \alpha < 60^\circ$ . Nel sistema sessagesimale risulta in definitiva  $56^\circ 15' 00'' < \alpha < 60^\circ$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Dati due numeri positivi  $a$  e  $b$  la loro media aritmetica è

$$m_a = \frac{a+b}{2} \quad \text{mentre quella geometrica risulta} \quad m_g = \sqrt{a \cdot b}.$$

Per dedurre quale sia la maggiore partiamo dall'ipotesi che sia  $m_a > m_g$  e vediamo le conseguenze. Pertanto

$$m_a > m_g \quad \text{passando ai quadrati} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$$

e moltiplicando per 4, discende

$$a^2 + b^2 + 2ab > 4ab \quad \text{ossia} \quad a^2 + b^2 - 2ab > 0 \quad \text{cioè} \quad (a-b)^2 > 0,$$

disuguaglianza soddisfatta per tutti i valori positivi di  $a$  diversi da  $b$ . Potendo aversi anche  $a = b$ , il primo membro può di conseguenza essere nullo cosicché l'ipotesi iniziale va modificata: in generale vale perciò  $m_a \geq m_g$ .

La generalizzazione di tale medie a  $n$  numeri assegnati conduce invece alle seguenti espressioni:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

mentre per la media geometrica è

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},$$

dove, accanto al simbolo di sommatoria  $\sum$  si è introdotto il simbolo di prodotto  $\prod$ .

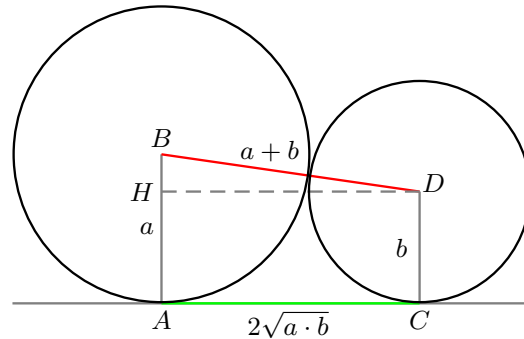
La disuguaglianza appena dimostrata possiede pure una immediata interpretazione geometrica. Siano  $a$  e  $b$  le misure dei raggi  $AB$  e  $CD$  di due circonferenze (fig. 1) tra di loro tangenti. Ciascuna circonferenza sia pure tangente alla retta comune  $AC$ .

Essendo  $\overline{BD} = a + b$ , l'applicazione del teorema di Pitagora comporta che sia

$$\overline{AC} = \overline{DH} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{a \cdot b}.$$

Poiché  $BD$  è l'ipotenusa di  $\triangle BHD$  rettangolo in  $H$  risulta  $\overline{BD} \geq \overline{AC}$  ossia  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ , dove l'uguaglianza si presenta quando le due circonferenze possiedono il medesimo raggio. Dividendo infine per 2 questa disuguaglianza si ottiene la tesi

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{cioè} \quad m_a \geq m_g.$$



**Fig. 1.** Circonferenze di raggi  $a$  e  $b$  e confronto tra segmenti.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Evidentemente definiti gli eventi

$$E = \{\text{Esce il numero 1}\} \quad F = \{\text{Esce la coppia di numeri } 1, 1\},$$

si tratta di ottenere le seguenti probabilità:

- la probabilità che con 4 lanci di un dado si ottenga almeno una volta l'evento  $E$  ossia si abbia almeno un successo su 4 prove, ciascuna ripetuta nelle medesime condizioni e indipendentemente dalle prove precedenti;
- la probabilità che si presenti almeno una volta l'evento  $F$  in una serie di 24 prove con due dadi.

Lo schema da seguire in entrambi i casi è pertanto quello della distribuzione binomiale che considera eventi elementari di tipo Bernoulli ossia eventi che in una singola prova possono solo accadere (successo) o non accadere (insuccesso). Tale distribuzione permette di determinare la probabilità di ottenere  $k$  successi in un numero  $n$  di prove indipendenti e in ciascuna delle quali la probabilità di successo sia  $p$ .

Le probabilità per gli eventi elementari delineati dal problema in una singola prova sono, per il lancio con un dato

$$p(E) = \frac{1}{6} \quad p(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

dove  $\bar{E}$  rappresenta l'evento complementare o contrario ossia l'uscita di un numero diverso da 1. Nel caso del lancio con due dadi si ha invece

$$p(F) = \frac{1}{36} \quad p(\bar{F}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Nel primo caso la probabilità di  $k$  successi in 4 prove è data da

$$p(4, k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

e nel secondo

$$p(24, k) = \binom{24}{k} \left(\frac{1}{36}\right)^k \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{24-k}$$

Poiché si chiede che il numero di successi sia  $k \geq 1$  risulta

$$\begin{aligned} p(4, k \geq 1) &= \sum_{i=1}^4 \binom{4}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-i} \\ &= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177 \end{aligned}$$

e dove si è sfruttato il completamento ad 1 dell'evento contrario. Analogamente

$$\begin{aligned} p(24, k \geq 1) &= \sum_{i=1}^{24} \binom{24}{i} \left(\frac{1}{36}\right)^i \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{24-i} \\ &= 1 - \binom{24}{0} \left(\frac{1}{36}\right)^0 \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{24-0} \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914 \end{aligned}$$

Risulta pertanto  $p(4, k \geq 1) > p(24, k \geq 1)$  e quindi appare “più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado che almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi.”

L'ultima disuguaglianza si può riportare equivalentemente ad un confronto tra logaritmi. Difatti supposto che sia  $p(4, k \geq 1) > p(24, k \geq 1)$  cioè

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 > 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

discende

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 < \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

per cui, prendendo i logaritmi si ottiene

$$4 \ln \frac{5}{6} < 24 \ln \frac{35}{36} \quad \text{ossia} \quad \ln 5 - \ln 6 < 6 \ln 35 - 12 \ln 6.$$

Scomposto in fattori 35 e utilizzate ancora le proprietà dei logaritmi si giunge quindi alla  $6 \ln 7 + 5 \ln 5 - 11 \ln 6 > 0$  che, un calcolo esplicito del primo membro ( $\approx 0,0133$ ) mostra essere corretta confermando la supposizione iniziale.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Assunto come “successo” l’esito in parità di una partita ed equiprobabili tutti i possibili esiti (X, 1, 2), la probabilità dell’evento “X” è  $p = 1/3$  mentre la probabilità che una partita non finisca in parità risulta evidentemente  $q = 1 - p = 2/3$ . Siamo perciò di fronte ad un evento elementare di tipo Bernoulli e la probabilità richiesta si può quindi identificare con la probabilità di avere 12 successi in 13 prove (le partite), ognuna delle quali viene svolta (giocata) indipendentemente dalle altre. In queste ipotesi la probabilità richiesta è descritta dalla distribuzione binomiale: si ha cioè

$$\begin{aligned} p(13, k = 12) &= \binom{13}{12} p^{12} q^{13-12} \\ &= \binom{13}{12} \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13-12} \\ &= 13 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \approx 1,6308 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Per calcolare il limite della successione a termini positivi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!},$$

notiamo che il termine generale si può scrivere come

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}^{n \text{ volte}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Sia il numeratore che il denominatore contengono ciascuno  $n$  fattori per cui, per l’associatività e commutatività della moltiplicazione i termini si possono raggruppare a coppie nel modo seguente

$$\begin{aligned} \frac{3^n}{n!} &= \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}^{n \text{ volte}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \\ &= \left(\frac{3}{1}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{3}\right) \cdot (n - 4 \text{ fattori minori di } 1) \cdot \left(\frac{3}{n}\right) \end{aligned}$$

A questo punto in luogo di ogni fattore minore di 1 sostituiamo appunto l’unità ottenendo un’espressione che certamente risulta maggiore del termine iniziale: in definitiva

$$0 < \frac{3^n}{n!} < 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \overbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}^{n-4 \text{ fattori}} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{2n}.$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{27}{2n} = 0$$

(e ovviamente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ ), per il teorema del confronto dev'essere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Per definizione, una funzione  $f$  di dominio  $D$  si dice periodica di periodo  $T$  se e solo se, per  $\forall x \in D$  sussiste l'identità

$$f(x + kT) = f(x) \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \wedge T \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Va notato che dev'essere  $x + kT \in D$  e che la funzione risulta periodica anche per ogni multiplo intero di  $T$ . Per tale motivo il valore minore  $T$  positivo, nell'insieme dei possibili periodi  $\{kT, k \in \mathbb{Z}\}$  cioè quello che corrisponde a  $k = 1$ , viene detto più precisamente, il *periodo principale* della funzione. Comunemente è questo valore che si ricerca in una funzione periodica.

Per determinare formalmente il periodo (principale)  $T$  di una funzione va quindi imposta l'identità sopra studiandone le possibili soluzioni nell'incognita  $T$ . Pertanto per individuare il periodo di  $f(x) = -\text{sen} \frac{\pi x}{3}$  cerchiamo una soluzione che soddisfi alla

$$-\text{sen} \left[ \frac{\pi(x+T)}{3} \right] = -\text{sen} \left( \frac{\pi x}{3} \right).$$

Da questa discende

$$\text{sen} \left[ \frac{\pi x}{3} + \frac{\pi T}{3} \right] = \text{sen} \left( \frac{\pi x}{3} \right)$$

per cui, a seguito della nota periodicità della funzione seno i due angoli devono differire per un multiplo del periodo cioè di  $2\pi$

$$\left( \frac{\pi x}{3} + \frac{\pi T}{3} \right) - \left( \frac{\pi x}{3} \right) = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Facilmente si deduce che

$$\frac{\pi T}{3} = 2\pi k \quad \text{ossia} \quad T = 6k.$$

Il periodo principale è quindi  $T = 6$ .

Nello stesso modo si ha

$$\operatorname{sen} 2(x + T) = \operatorname{sen} 2x \implies \operatorname{sen}(2x + 2T) = \operatorname{sen} 2x,$$

per cui

$$(2x + 2T) - (2x) = 2\pi k \implies 2T = 2\pi k \implies T = k\pi$$

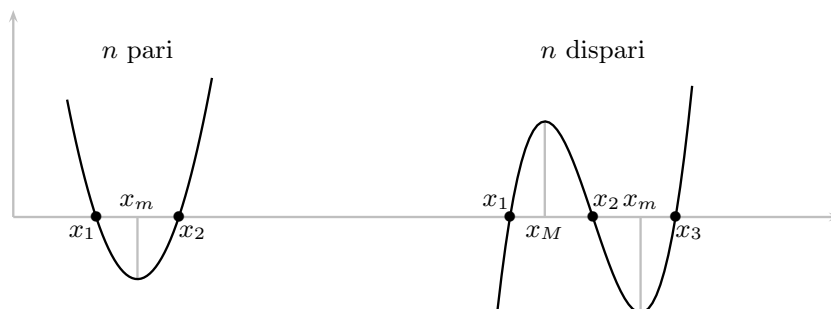
e il periodo principale è  $T = \pi$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Notato che il polinomio  $P(x) = x^n + px + q$  rappresenta una funzione continua e derivabile in tutto  $\mathbb{R}$ , supponiamo inizialmente che il suo grado  $n$  sia pari. In tal caso la derivata prima risulta espressa da un polinomio di grado  $n - 1$  dispari

$$P'(x) = nx^{n-1} + p \quad \text{e la disequazione} \quad P'(x) = nx^{n-1} + p \geq 0$$

ammette come soluzioni  $x \geq \sqrt[n-1]{-p/n}$ . Pertanto, per un corollario del teorema di Lagrange (piuttosto che tramite il teorema di Rolle),  $P(x)$  è sempre crescente quando  $x > x_m$  con  $x_m = \sqrt[n-1]{-p/n}$  mentre è decrescente per  $x < x_m$ . Se l'ordinata del punto di ascissa  $x_m$  è negativa,  $P(x_m) < 0$ , deve esistere per la continuità di  $P(x)$  un intervallo  $[x_1, x_2]$  dove  $P(x_1) = P(x_2) = 0$  con  $x_m \in ]x_1, x_2[$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Possibili grafici di  $P(x)$ .

In tale intervallo sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Rolle e quindi è verificata pure la sua tesi cioè  $P'(x_m) = 0$ . Esistono pertanto al più due radici (ma pure nessuna) che permettono di definire un intervallo dove applicare il teorema di Rolle al polinomio assegnato.

Nel caso si abbia  $n$  dispari la disequazione  $P'(x) \geq 0$  presenta a primo membro un polinomio di grado  $n - 1$  pari per cui

$$P'(x) = nx^{n-1} + p \geq 0 \implies x^{n-1} \geq -\frac{p}{n}.$$

Supposto che sia  $-p/n > 0$ , l'estrazione della radice pari  $(n-1)$ -esima comporta le soluzioni

$$|x| \geq \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}} \implies x \leq -\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}} \vee x \geq \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}.$$

Il segno della  $P'(x)$ , riassunto dalla fig. 2

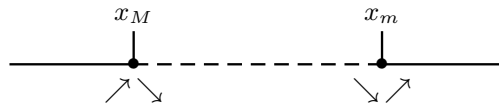


Fig. 2.

implica l'esistenza di un massimo e di un minimo locali. Se quindi  $P(x_M) > 0$  e  $P(x_m) < 0$  cioè se l'ordinata del punto di massimo è positiva e quella del minimo negativa (fig. 1), dovranno esistere 3 valori  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  in corrispondenza dei quali  $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$ . Gli intervalli entro i quali si verifica il teorema di Rolle saranno in tal caso  $[x_1, x_2]$  e  $[x_2, x_3]$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Noto l'andamento dell'esponenziale per  $x \rightarrow +\infty$  appare subito che il limite richiesto presenta una indeterminazione del tipo  $+\infty - \infty$ . Riscriviamo quindi il limite come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \operatorname{sen} x - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right)$$

e risolviamo i limiti delle funzioni tra parentesi. Il primo addendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$$

è ancora indeterminato ( $\infty/\infty$ ) ma poiché esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

ottenuto eseguendo il rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore, è applicabile il teorema di De L'Hôpital cosicché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Per il secondo addendo notiamo che valgono le disuguaglianze

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0$$

in quanto  $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ . Poiché i limiti di  $\pm \frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow +\infty$  sono nulli il teorema del confronto assicura che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

Da tutto ciò segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right) = +\infty$$

come pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \operatorname{sen} x - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right) = +\infty.$$

Se  $x \rightarrow -\infty$ , riscritta ancora la funzione come

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \operatorname{sen} x - 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right)$$

e avendosi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \quad \text{ancora per il teorema del confronto,}$$

si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right) = 0 - 0 - 3 = -3.$$

Essendo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ , il limite richiesto risulta ancora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \operatorname{sen} x - 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 3 \right) = +\infty.$$

Circa l'esistenza del numero reale  $\alpha$  è sufficiente calcolare la funzione agli estremi dell'intervallo  $[0, 1]$ . Difatti essendo

$$f(0) = e^0 - 0 - 0 = 1 > 0 \quad f(1) = e^1 - \operatorname{sen} 1 - 3 = e - \operatorname{sen} 1 - 3 < 0,$$

la funzione  $f$  assume valori di segno opposto agli estremi. Poiché  $f$  è pure una funzione continua in  $\mathbb{R}$  e quindi anche in  $[0, 1]$ , possiamo sfruttare il teorema, conseguenza del teorema di Weierstrass, d'esistenza degli zeri e che assicura l'esistenza in tali ipotesi di almeno un punto dove la funzione si annulla. Esiste quindi  $\alpha \in ]0, 1[$  tale che  $f(\alpha) = 0$ .

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il dominio della funzione  $f(x) = 3x + \ln x$  (consideriamo logaritmi naturali) risulta evidentemente l'insieme  $\mathbb{R}_0^+$ . Per trovarne la monotonia calcoliamo la sua derivata prima  $f'(x)$  e studiamone il segno:

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{che risulta soddisfatta per } \forall x > 0.$$

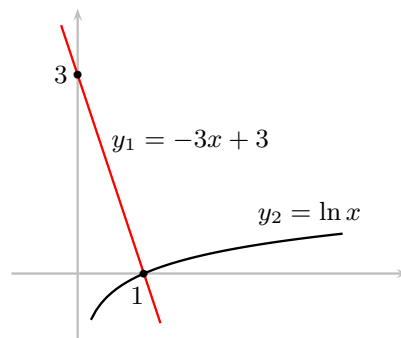
In base ad un corollario del teorema di Lagrange la funzione è monotona strettamente crescente nel suo dominio.

Esiste quindi la funzione inversa  $x = g(y)$  e la sua derivata si dimostra essere

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Poiché dal testo viene chiesta  $g'(3)$  cioè si assegna il valore della variabile  $y_0$  essendo  $y_0 = f(x_0)$ , si tratta di determinare il valore  $x_0$  in corrispondenza del quale è  $y_0 = 3$ : quindi si calcolerà  $f'(x_0)$ . Ciò equivale a risolvere l'equazione

$$3 = 3x + \ln x \quad \text{che può essere riscritta come} \quad -3x + 3 = \ln x.$$



**Fig. 1.** Confronto tra i grafici della retta  $y_1$  e del logaritmo  $y_2$ .

Assodato che, con un immediato confronto tra i grafici noti della retta  $y_1 = -3x + 3$  e del logaritmo  $y_2 = \ln x$  esiste certamente una soluzione  $x_0$  di tale equazione (fig. 1), questo valore risulta essere  $x_0 = 1$  ed emerge immediatamente appena si tracci con qualche cura il grafico della retta (che deve passare per i

punti  $(0, 3)$  e  $(1, 0)$  e quello del logaritmo (che pure interseca l'asse delle ascisse in  $(1, 0)$ ). Ne segue che

$$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{4}.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il testo del quesito assegna esplicitamente la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$$

e chiede il calcolo in 4 della funzione integranda  $f(x)$ . Poiché queste due funzioni sono collegate dalla relazione

$$F'(x) = D \left( \int_0^x f(t) dt \right) = f(x)$$

che riassume il teorema di Torricelli–Barrow, per ottenere  $f(x)$  basta eseguire la derivata della funzione integrale ossia

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(x \cos \pi x) = \cos \pi x + x(-\operatorname{sen} \pi x)\pi \\ &= \cos \pi x - \pi x \operatorname{sen} \pi x = f(x). \end{aligned}$$

Ne segue che  $f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \operatorname{sen} 4\pi = 1$ .

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Fissato un punto  $C$  del piano e un numero reale  $k \in \mathbb{R}_0$ , la trasformazione che associa ad un punto  $P$  il punto  $P'$ , allineato con  $C$  e tale che sia

$$\frac{\overline{CP'}}{\overline{CP}} = k$$

si definisce *omotetia di centro  $C$* .

Se introduciamo un riferimento cartesiano tale che sia  $C(a, b)$ ,  $P(x, y)$  e  $P'(x', y')$  la relazione  $\overline{CP'}/\overline{CP} = k$  assume, per il teorema di Talete, le forme

$$\frac{x' - a}{x - a} = k \quad \frac{y' - b}{y - b} = k,$$

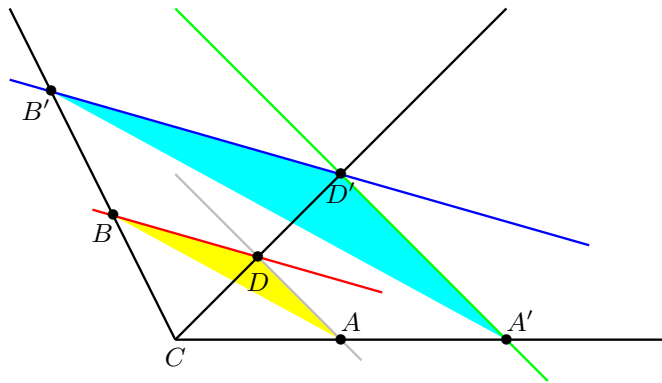
cosicché le equazioni rappresentative di una omotetia di rapporto  $k$  risultano

$$\begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = k(y - b) + b \end{cases} \quad \text{oppure, più in generale} \quad \begin{cases} x' = kx + c \\ y' = ky + d, \end{cases}$$

con  $c = a(1 - k)$  e  $d = b(1 - k)$ . Come caso particolare, l'omotetia con centro l'origine degli assi e rapporto  $k$  è descritta analiticamente dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases}$$

In un'omotetia l'unico punto unito risulta il suo centro  $C$ . È poi facile mostrare come una retta passante per il centro sia una retta unita così come rette che non passino per il centro abbiano come immagini, rette ad esse parallele (per esempio,  $AD$  e  $A'D'$  in fig. 1). Ne segue che le figure corrispondenti in una omotetia sono simili: pertanto, in riferimento ancora alla figura 1, risulta  $\triangle ADB \sim \triangle A'D'B'$ . In questo caso, se il rapporto di omotetia è  $k$  le aree stanno nel rapporto  $k^2$ .



**Fig. 1.** Punti collegati da un'omotetia di centro  $C$ , rette unite e non.

Una similitudine è invece una trasformazione del piano in sè che a due punti distinti  $A$  e  $B$ , associa due punti  $A'$ ,  $B'$ , tali che il rapporto

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$$

con  $k$  grandezza costante assegnata. Il suo valore viene detto *rapporto di similitudine*. Le equazioni rappresentative di una similitudine sono

$$\begin{cases} x' = ax \pm by + c \\ y' = bx \mp ay + f \end{cases}$$

dove il rapporto di similitudine è dato dal valore assoluto del determinante della matrice

$$T = \begin{pmatrix} a & \pm b \\ b & \mp a \end{pmatrix} \quad k^2 = |\det T| = a^2 + b^2.$$

Poiché in una omotetia  $C \equiv C'$  la definizione di similitudine comprende come caso particolare le trasformazioni omotetiche. Queste trasformazioni si ottengono

pure dalle equazioni rappresentative di una similitudine supponendo che sia  $b = 0$ . Comunque le similitudini, diversamente dalle omotetie, associano a rette, rette corrispondenti che non sono in generale parallele. Per esempio, la similitudine  $s$  di equazioni

$$s : \begin{cases} x' = 2x - y - 1 \\ y' = x + 2y - 1 \end{cases}$$

e rapporto  $k = \sqrt{5}$ , associa ai punti  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$  e  $B(0, 1)$ , i punti  $O'(-1, -1)$ ,  $A'(3, 1)$  e  $B'(-2, 1)$  (fig. 2).

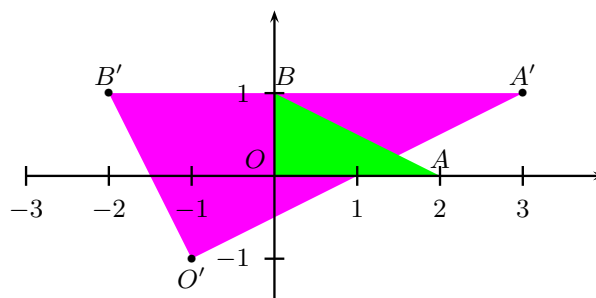


Fig. 2. Punti collegati da una similitudine.

È immediato notare che le rette che collegano punti corrispondenti, per esempio  $OA$  e  $O'A'$  non sono parallele, diversamente dall'esempio grafico portato per le omotetie. Pertanto, i triangoli che si corrispondono in una omotetia sono simili e possiedono i lati paralleli mentre i triangoli che si corrispondono tramite una similitudine non hanno necessariamente i lati paralleli (pur essendo simili).

Infine si può dimostrare che una similitudine di rapporto  $k$  può sempre essere espressa come la composizione di una isometria e di una omotetia nello stesso rapporto. Come esempio riscriviamo la similitudine sopra come composizione di una rotazione (isometria) e di una omotetia. Osserviamo quindi che per ottenere il parallelismo tra i lati di  $\triangle OAB$  con quelli di  $\triangle O'A'B'$  l'angolo  $\alpha$  della rotazione attorno all'origine deve soddisfare alla condizione  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  che rappresenta il coefficiente angolare della retta (ruotata)  $O'A'$  immagine di quella orizzontale  $OA$ . Ne segue che  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$  e  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Le equazioni della rotazione sono pertanto

$$r : \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \end{cases}$$

L'omotetia di rapporto  $\sqrt{5}$  discende immediatamente in quanto basta porre

$$o : \begin{cases} x'' = \sqrt{5}x' - 1 \\ y'' = \sqrt{5}y' - 1 \end{cases}$$

per ottenere le equazioni della similitudine  $s$  come prodotto di  $r$  e  $o$  ossia esprimere  $s = o \circ r$ , come nelle intenzioni.

# ESAME 2003

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

Si consideri un tetraedro regolare  $T$  di vertici  $A, B, C, D$ .

- Indicati rispettivamente con  $V$  ed  $S$  il volume e l'area totale di  $T$  e con  $r$  il raggio della sfera inscritta in  $T$ , trovare una relazione che leghi  $V$ ,  $S$  ed  $r$ .
- Considerato il tetraedro  $T'$  avente per vertici i centri delle facce di  $T$ , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di  $T$  e  $T'$  e il rapporto fra i volumi di  $T$  e  $T'$ .
- Condotto il piano  $\alpha$ , contenente la retta  $AB$  e perpendicolare alla retta  $CD$  nel punto  $E$ , e posto che uno spigolo di  $T$  sia lungo  $s$ , calcolare la distanza di  $E$  dalla retta  $AB$ .
- Considerata nel piano  $\alpha$  la parabola  $p$  avente l'asse perpendicolare alla retta  $AB$  e passante per i punti  $A, B$  ed  $E$ , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di  $p$ .
- Determinare per quale valore di  $s$  la regione piana delimitata dalla parabola  $p$  e dalla retta  $EA$  ha area  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  cm<sup>2</sup>.

Soluzione

## • Problema n. 2

È assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + m + |m|}, \quad \text{dove } m \text{ è un parametro reale.}$$

- Determinare il suo dominio di derivabilità.

- b) Calcolare per quale valore di  $m$  la funzione ammette una derivata che risulti nulla per  $x = 1$ .
- c) Studiare la funzione  $f(x)$  corrispondente al valore di  $m$  così trovato e disegnarne il grafico  $\gamma$  in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di  $\gamma$  ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
- d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalla retta di equazione  $x = 1$ .

Soluzione

### Questionario

1. Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , due a due distinte, se  $x$  ed  $y$  sono sghembe e, così pure, se sono sghembe  $y$  e  $z$  allora anche  $x$  e  $z$  sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

Soluzione

3. Dal punto  $A$ , al quale è possibile accedere, è visibile il punto  $B$ , al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza  $AB$ . Dal punto  $A$  si può però accedere al punto  $P$ , dal quale, oltre ad  $A$ , è visibile  $B$  in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza  $PB$ , è tuttavia possibile misurare la distanza  $AP$ . Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che  $P$  non è allineato con  $A$  e  $B$ , spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza  $AB$ .

Soluzione

4. Il dominio della funzione  $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$  è l'insieme degli  $x$  reali tali che:

A)  $-1 < x \leq 3$ ; B)  $-1 \leq x < 3$ ; C)  $0 < x \leq 3$ ; D)  $0 \leq x < 3$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Soluzione

5. La funzione  $2x^3 - 3x^2 + 2$  ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

Soluzione

6. La derivata della funzione  $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$  è la funzione  $f'(x) = 2xe^{-x^4}$ . Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

Soluzione

7. Considerati i primi  $n$  numeri naturali a partire da 1:

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n,$$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A)  $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ ; B)  $\frac{1}{3}n(n^2-1)$ ;  
 C)  $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$ ; D)  $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Soluzione

8.  $x$  ed  $y$  sono due numeri naturali dispari tali che  $x - y = 2$ . Il numero  $x^3 - y^3$ :
- A) è divisibile per 2 e per 3;
  - B) è divisibile per 2 ma non per 3;
  - C) è divisibile per 3 ma non per 2;
  - D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Soluzione

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

Soluzione

10. Il valore dell'espressione  $\log_2 3 \cdot \log_3 2$  è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

Le quattro facce di un tetraedro regolare sono costituite da quattro triangoli equilateri. Sia  $s$  la lunghezza degli spigoli o dei lati dei triangoli equilateri. Si ha subito che l'apotema  $\overline{DK}$  è pari a

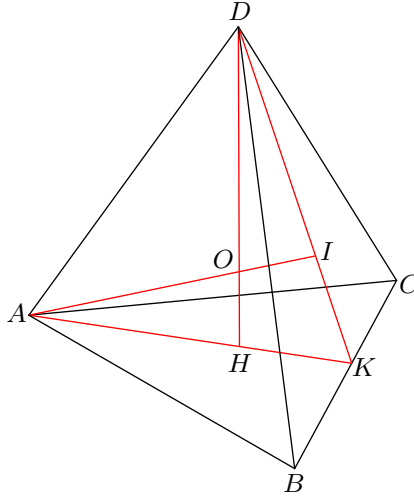
$$\overline{DK} = \overline{BC} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = s \frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{AK}.$$

La sfera di centro  $O$ , inscritta nel tetraedro è tangente in  $H$  alla faccia  $ABC$  e in  $I$  alla faccia  $BCD$ . Questi due punti sono pure i piedi delle altezze condotte rispettivamente, dal vertice  $D$  alla faccia  $ABC$  e da  $A$  alla faccia  $BCD$ .  $H$  e  $I$  sono inoltre i baricentri di queste due facce e pertanto, essendo queste dei triangoli equilateri, suddividono le altezze (e mediane)  $AK$  e  $DK$  in due parti con rapporti

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{HK}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{IK}} = 3.$$

Ne segue che

$$\overline{HK} = \frac{1}{3} \overline{AK} = \frac{s\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{s}{2\sqrt{3}}.$$

Fig. 1. Tetraedro  $ABCD$ .

L'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo rettangolo  $\triangle DHK$  implica

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{DK}^2 - \overline{HK}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{12}s^2} = s\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Infine, notata la similitudine tra  $\triangle DOI \sim \triangle DHK$  in quanto  $\angle DOI = \angle DHK = \pi/2$  mentre  $\angle HDK$  è in comune, si può impostare la proporzione

$$\frac{\overline{DO}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{HK}}$$

e detto  $\overline{OI} = r$  il raggio della sfera inscritta, si ha  $\overline{DO} = \overline{DH} - r$  per cui

$$\frac{\overline{DH} - r}{r} = \left[ \frac{s\sqrt{3}/2}{s/(2\sqrt{3})} \right].$$

Sostituito il valore di  $\overline{DH}$  determinato precedentemente, l'ultima relazione fornisce

$$\frac{s}{r}\sqrt{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{s}{r}\sqrt{\frac{2}{3}} = 4 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{s}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (1)$$

Trovato il legame tra spigolo e raggio della sfera inscritta, il volume  $\mathcal{V}$  e l'area totale  $\mathcal{S}$  del tetraedro assumono la forma

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\triangle ABC) \cdot \overline{DH} = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}s \cdot \frac{s}{2} \right) \cdot \left( s\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}$$

$$\mathcal{S} = 4\mathcal{A}(\triangle ABC) = 4 \left( \frac{s^2}{4}\sqrt{3} \right) = s^2\sqrt{3}$$

cosicché il loro rapporto risulta

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{S}} = \frac{s^3}{12} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{s^2 \sqrt{3}} = \frac{s}{12} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

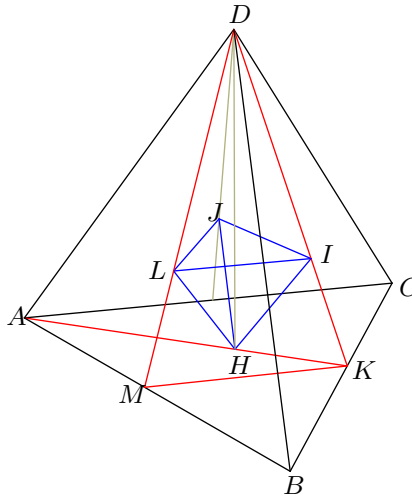
da cui, utilizzando la (1), discende

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{S}} = \frac{r}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V} = \frac{r}{3} \mathcal{S}$$

che lega, come richiesto,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{S}$  e  $r$ .

b) Il tetraedro  $T'$  ha vertici in  $H, I, J, L$ , e ciascuno di questi punti è il baricentro della faccia cui appartiene fig. 2. Al fine di ottenere il rapporto tra gli spigoli notiamo la similitudine tra  $\triangle DMK$  e  $\triangle DLI$  ( $LI$  è parallelo a  $MK$ ) per cui

$$\frac{\overline{MK}}{\overline{LI}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DI}}.$$



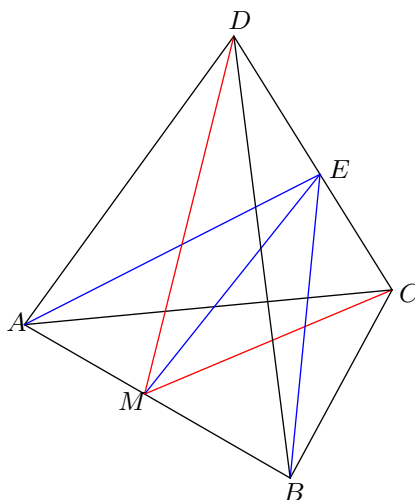
**Fig. 2.** Tetraedri  $ABCD$  e  $HIJL$ .

Essendo

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{DI}} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{MK}}{\overline{LI}} = \frac{3}{2};$$

ma  $\overline{MK} = \overline{MB} = \overline{BK} = s/2$  e quindi

$$\overline{LI} = \frac{2}{3} \overline{MK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2} = \frac{s}{3}.$$



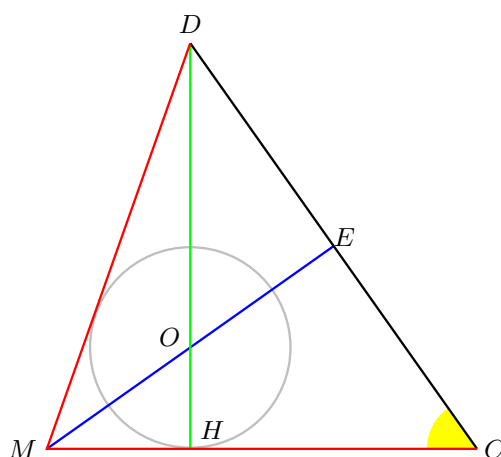
**Fig. 3.** Tetraedro  $ABCD$ , piano  $\alpha \equiv ABE$  e piano  $DMC$ .

Il rapporto tra i volumi è perciò (utilizziamo l'espressione già trovata)

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'} = \frac{1}{12}s^3\sqrt{2} / \left( \frac{1}{12}LI^3\sqrt{2} \right) = \frac{s^3}{(s/3)^3} = 27,$$

rapporto che si poteva comunque ottenere osservando che i volumi dei due tetraedri stanno tra loro come il cubo del rapporto dei rispettivi spigoli.

c) Consideriamo la sezione piana  $DMC$  di  $T$  (fig. 3) riportata per comodità pure nella figura 4 assieme alla sezione della sfera inscritta.



**Fig. 4.** Sezione  $DMC$  di  $T$ .

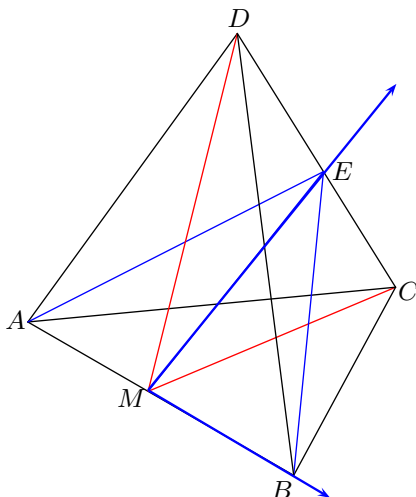
Poiché  $\overline{DM} = \overline{MC} = s\sqrt{3}/2$ , il triangolo  $\triangle DMC$  è isoscele e la sua base  $DC$  possiede lunghezza  $s$  essendo uno spigolo di  $T$ . Allora  $\overline{EC} = s/2$  e

$$\cos(\angle MCE) = \frac{\overline{EC}}{\overline{MC}} = \frac{s/2}{s\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

per cui

$$\begin{aligned} \overline{ME} &= \overline{MC} \operatorname{sen}(\angle MCE) = \frac{\sqrt{3}}{2} s \sqrt{1 - \cos^2(\angle MCE)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} s \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} s \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{s}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

d) La parabola  $p$  richiesta passa per  $E$ ,  $A$  e  $B$  e il suo asse coincide con  $ME$ . È quindi conveniente porre l'origine coincidente con  $M$ , l'asse  $x$  coincidente con la retta  $AB$  e l'asse  $y$  coincidente con la retta  $ME$  e orientato da  $M$  verso  $E$  (fig. 5).



**Fig. 5.** Tetraedro  $ABCD$  e piano  $ABE$ .

L'equazione di  $p$ , essendo  $A$  e  $B$  simmetrici rispetto all'origine  $M$  e di coordinate,

$$A\left(-\frac{s}{2}, 0\right), B\left(\frac{s}{2}, 0\right), \quad \text{dovrà essere del tipo} \quad y = a\left(x - \frac{s}{2}\right)\left(x + \frac{s}{2}\right).$$

Imponendo il passaggio per  $E(0, s/\sqrt{2})$  (ricordiamo che  $\overline{ME} = s/\sqrt{2}$ ) si ha

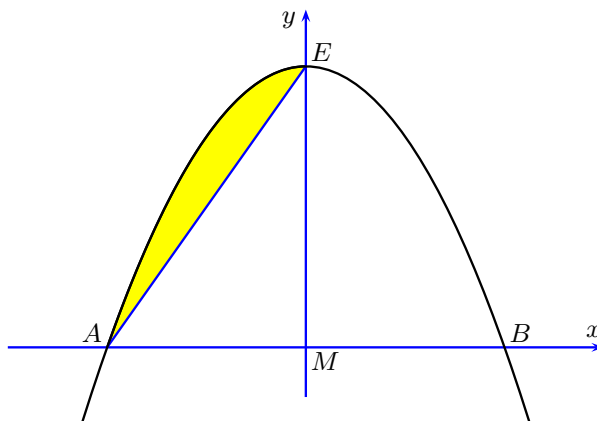
$$\frac{s}{\sqrt{2}} = a\left(-\frac{s^2}{4}\right) \quad \implies \quad a = -\frac{4}{s\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{s}$$

e, in definitiva,

$$p : y = -\frac{2\sqrt{2}}{s} \left( x^2 - \frac{s^2}{4} \right) = -\frac{2\sqrt{2}}{s} x^2 + \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

e) Come ultimo punto, viene chiesta l'area della regione colorata in giallo nella fig. 6. Questa regione è limitata da una parabola e da una retta e consiste quindi di un segmento parabolico. L'area di tali figure si determina immediatamente con la formula di Archimede generalizzata  $\mathcal{A} = \frac{1}{6}|a| \cdot |x_2 - x_1|^3$  essendo  $a$  il coefficiente del termine di secondo grado nell'equazione canonica della parabola e  $x_1, x_2$  le ascisse degli estremi del segmento parabolico, nel nostro caso i punti  $A$  ed  $E$ . Pertanto

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6}|a| \cdot |x_2 - x_1|^3 = \frac{1}{6} \left| -\frac{2\sqrt{2}}{s} \right| \cdot \left( \frac{s}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{24} s^2$$



**Fig. 6.** Piano cartesiano  $EMB$  e assi coordinati.

per cui, uguagliata l'area al valore dato dal testo, discende

$$\frac{\sqrt{2}}{24} s^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \Longrightarrow \quad s^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad s = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

a) Assegnata la funzione

$$y = f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + m + |m|},$$

$f(x)$  assume, al variare del parametro  $m$ , la forma

$$\begin{cases} m > 0 \\ f_1(x) = \frac{2x+1}{x^2+2m} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m \leq 0 \\ f_2(x) = \frac{2x+1}{x^2}. \end{cases}$$

Nel primo caso il dominio coincide con  $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$ , nel secondo con  $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}_0$ . Le rispettive derivate prime sono

$$\begin{cases} m > 0 \\ f'_1(x) = \frac{2(x^2+2m) - 2x(2x+1)}{(x^2+2m)^2} = \frac{2(-x^2-x+2m)}{(x^2+2m)^2} \end{cases}$$

e tale derivata esiste per  $\forall x \in \mathbb{R}$  cioè  $\forall x \in \mathcal{D}_1$ ; nel secondo caso

$$\begin{cases} m \leq 0 \\ f'_2(x) = \frac{2x^2 - (2x+1)2x}{x^4} = \frac{-2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{2(-x-1)}{x^3} \end{cases}$$

e tale derivata possiede dominio  $\mathbb{R}_0$ , coincidente con il dominio della funzione  $\mathcal{D}_2$ .

b) Calcolando le derivate nel punto di ascissa unitaria e posto

$$f'_1(1) = \frac{2(2m-1-1)}{(1+2m)^2} = 0$$

si trova  $2m-2=0$  e quindi  $m=1$ . Nel secondo invece risulta  $f'_2(1) = 2(-1-1)/1^3 \neq 0$ . Ne segue che l'unico valore che soddisfa alla condizione del quesito è  $m=1$ .

c) Si tratta di studiare la funzione di equazione rappresentativa

$$y = \frac{2x+1}{x^2+2}$$

e di dominio noto  $\mathbb{R}$ .

• *Simmetrie.* risultando

$$f(-x) = \frac{2(-x)+1}{(-x)^2+2} = \frac{-2x+1}{x^2+2} \neq \pm f(x),$$

la funzione non né simmetrica pari, né dispari.

• *Segno.*  $y \geq 0$  implica lo studio di  $2x+1 \geq 0$  risolta da  $x \geq -\frac{1}{2}$ . Poiché il denominatore risulta  $x^2+2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  si ha che  $y \geq 0$  se  $x \geq -\frac{1}{2}$ .

• *Limiti.* Risulta  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(2+1/x)}{x^2(1+2/x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2+1/x}{x(1+2/x^2)} = 0$$

essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2} = 0.$$

La funzione possiede quindi l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale.

• *Derivata prima.* Riprendendo quanto **già svolto**

$$y' = \frac{2(2 - x - x^2)}{(x^2 + 2)^2}$$

lo studio del suo segno  $y' \geq 0$  conduce alla  $-x^2 - x - 2 \geq 0$  che, avendo l'equazione associata le radici  $-2$  e  $1$ , è risolta dall'intervallo  $-2 \leq x \leq 1$ . Riassunto graficamente il segno di  $y'$

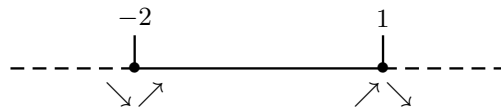


Fig. 1.

emerge che per  $x = -2$  la funzione possiede un minimo relativo locale mentre per  $x = 1$  presenta un massimo locale.

• *Derivata seconda.*

$$\begin{aligned} y'' &= 2 \left[ \frac{(-1 - 2x)(x^2 + 2)^2 - (2 - x - x^2) \cdot 2(x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^4} \right] \\ &= \frac{2(x^2 + 2)[(x^2 + 2)(-1 - 2x) - 4x(2 - x - x^2)]}{(x^2 + 2)^4} \\ &= \frac{2}{(x^2 + 2)^3} (-x^2 - 2x^3 - 2 - 4x - 8x + 4x^2 + 4x^3) \\ &= \frac{2}{(x^2 + 2)^3} (2x^3 + 3x^2 - 12x - 2) \end{aligned}$$

La condizione  $y'' \geq 0$  comporta lo studio del solo numeratore  $2x^3 + 3x^2 - 12x - 2 \geq 0$  essendo tutti gli altri termini positivi. Poiché il polinomio  $t = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2$  non è scomponibile in fattori per mezzo della regola di Ruffini in quanto

$$\begin{aligned} t(1) &= 2 + 3 - 12 - 2 \neq 0 & t(-1) &= -2 + 3 + 12 - 2 \neq 0 \\ t(2) &= 16 + 12 - 24 - 2 \neq 0 & t(-2) &= -16 + 12 + 24 - 2 \neq 0, \end{aligned}$$

studiamo la funzione cubica  $t$  cercando di individuare, almeno approssimativamente, il segno nel suo dominio. Si ha che:

▪ Limiti di  $t$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} t = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( 2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \pm\infty$$

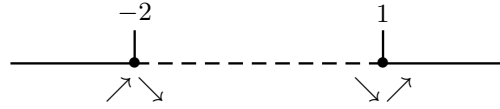


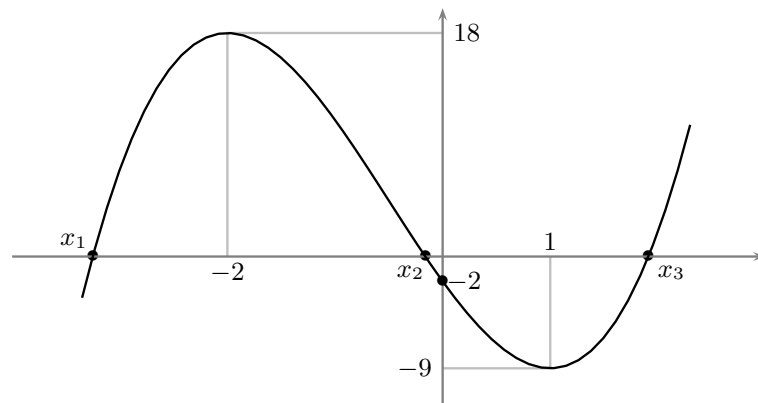
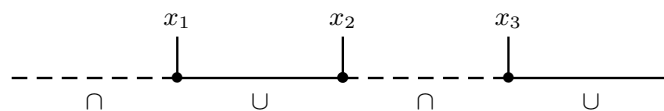
Fig. 2.

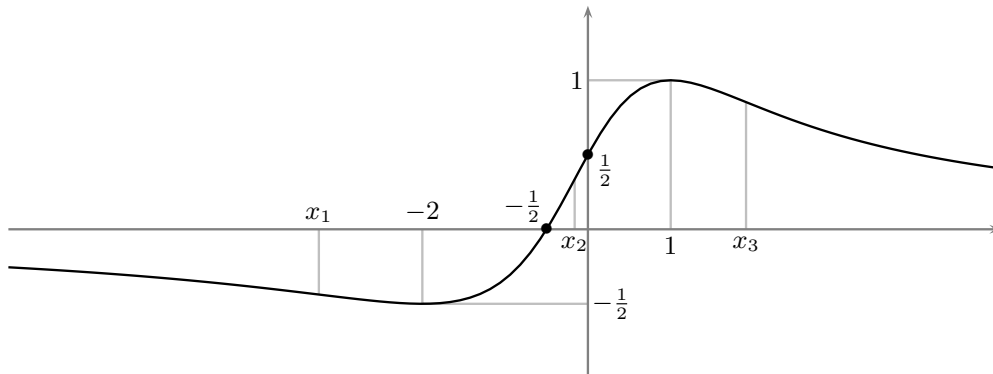
▪ Derivata prima:  $t' = 6x^2 + 6x - 12$  e  $t' \geq 0$  fornisce la disequazione  $x^2 + x - 2 \geq 0$ . L'equazione associata possiede radici pari ad 1 e  $-2$  cosicchè le soluzioni sono  $t' \geq 0$  se  $x \leq -2 \vee x \geq 1$ : l'andamento è riassunto in figura 2. Essendo interessati ai possibili zeri di  $t$  calcoliamo le ordinate dei punti di estremo relativo cioè

$$t(-2) = -16 + 12 + 24 - 2 = 18 > 0 \quad t(1) = 2 + 3 - 12 - 2 = -9 < 0.$$

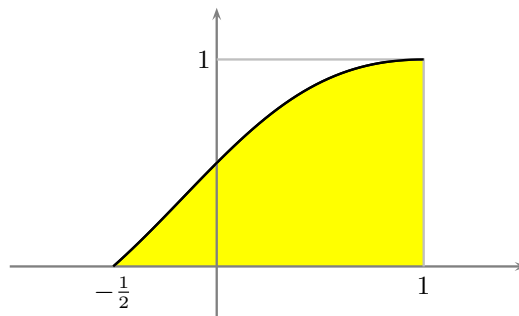
Poiché inoltre  $t$  interseca l'asse delle ordinate in  $(0, -2)$ , il suo grafico dovrà essere del tipo di quello riportato in fig. 3.

Pertanto, per il teorema degli zeri delle funzioni continue,  $t$  si deve annullare in  $x_1$  con  $x_1 < -2$ , in  $x_2$  con  $-2 < x_2 < 0$  e infine, in  $x_3$  con  $x_3 > 1$ . La disequazione  $y'' \geq 0$  sarà pertanto risolta se  $x_1 \leq x \leq x_2 \vee x \geq x_3$  mentre il segno complessivo di  $y''$  è riassunto dalla figura 4.

Fig. 3. Grafico della cubica  $t$ .Fig. 4. Segno della  $y''$ .



**Fig. 5.** Grafico della funzione  $f$  (non isometrico).



**Fig. 6.** Grafico di  $f$  per  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  e regione sottesa.

I punti di flesso di  $f$  sono quindi tre e il grafico  $\gamma$  richiesto è rappresentato dalla figura 5 dove si sono calcolati pure i valori  $f(-2) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(0) = \frac{1}{2}$  e  $f(1) = 1$ .

d) Si tratta di determinare l'area  $\mathcal{A}$  evidenziata nella figura 6. Quest'area è espressa dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx.$$

Procediamo quindi alla ricerca di una primitiva di

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{dx}{x^2+2}.$$

Posto  $t = x^2$  e quindi  $dt = 2x dx$ , il primo integrale della somma a secondo membro diviene

$$\int \frac{2x}{x^2+2} dx = \int \frac{dt}{2+t} = \ln|2+t| + c = \ln|x^2+2| + c.$$

Per il secondo, posto  $x^2 = 2t^2$  cioè  $x = \sqrt{2}t$  e quindi  $dx = \sqrt{2} dt$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2} &= \int \frac{\sqrt{2} dt}{2t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + c. \end{aligned}$$

Ne segue che

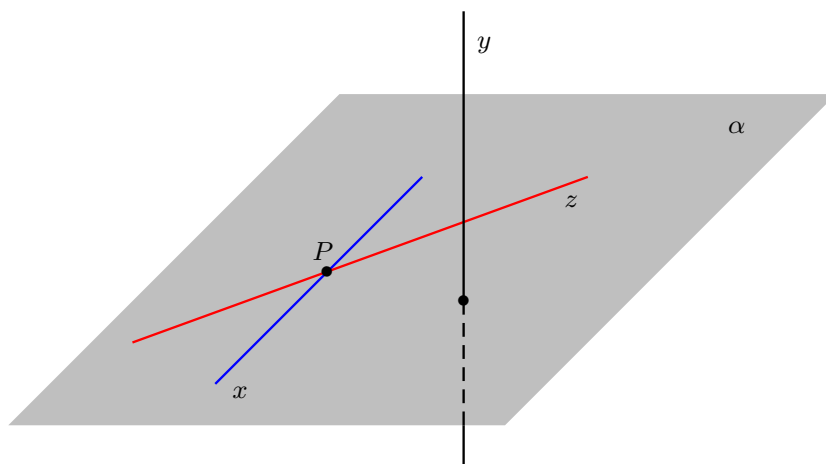
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \left[ \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]_{-1/2}^1 \\ &= \ln 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \ln \left( \frac{1}{4} + 2 \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Per la proprietà di simmetria dispari dell'arcotangente,  $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ , risulta infine

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \ln 3 - \ln \left( \frac{9}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \\ &= \ln \left( 3 \cdot \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \\ &= \ln \left( \frac{4}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \approx 0,9632 \end{aligned}$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

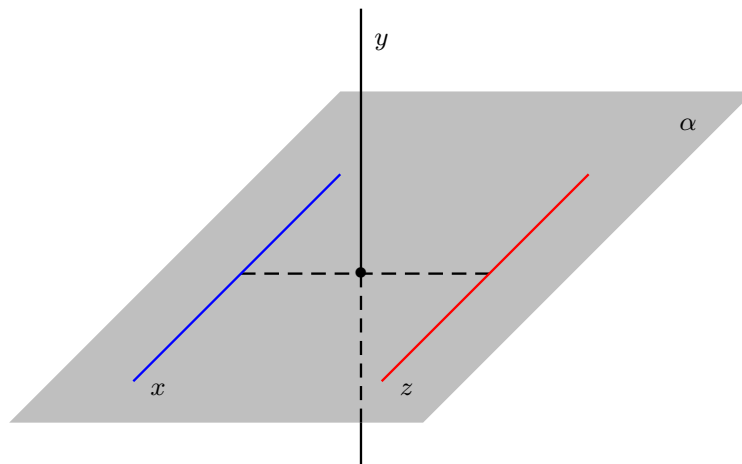
Due rette nello spazio tridimensionale non appartenenti ad uno stesso piano si dicono sghembe. Due rette sghembe hanno la particolarità di non avere punti in comune ma ciò nonostante, esse non sono parallele.



**Fig. 1.**  $y$  è sghemba con  $z$  e con  $x$ .

Consideriamo due rette sghembe, per esempio la retta  $x$  giacente in un piano  $\alpha$  e la seconda  $y$  che incide ortogonalmente il piano  $\alpha$  in un punto non appartenente ad  $x$  (fig. 1):  $x$  e  $y$  sono per costruzione sghembe. Sia  $z$  un'ulteriore retta di  $\alpha$  che non interseca  $y$  nel punto di contatto di questa con  $\alpha$ : ne discende che pure  $y$  e  $z$  sono sghembe.

Poiché la retta  $z$  di fig. 1 incide su  $x$  in un punto  $P$ ,  $x$  e  $z$  non sono però sghembe. Pertanto l'affermazione del quesito è falsa.



**Fig. 2.** Rette sghembe.

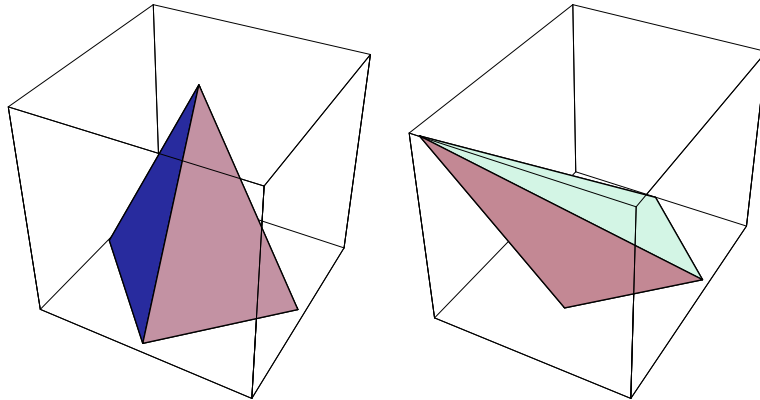
Alla medesima conclusione si giunge se si considera  $z$  appartenente ad  $\alpha$  ma parallela ad  $x$  (fig. 2). In tal caso  $x$  è sghemba con  $y$  e  $y$  con  $z$ , ma  $z$  e  $x$ , essendo parallele, non sono sghembe.

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

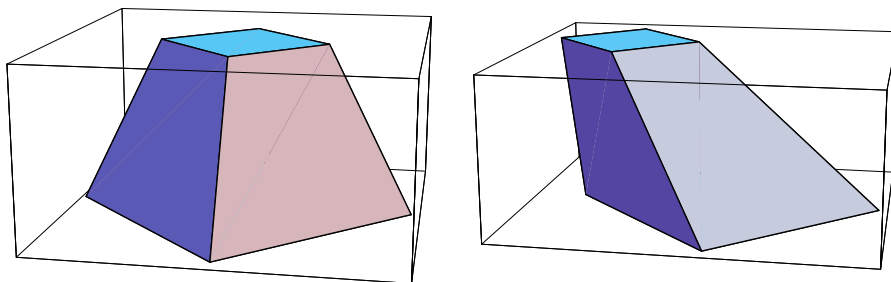
Dato che il testo non specifica se la piramide sia retta o no, considereremo nel seguito entrambe le situazioni. Abbiamo quindi due piramidi aventi come base un quadrato: la prima è pure retta cioè la sua altezza cade sul centro della base, la seconda invece non possiede tale proprietà (fig. 1). Possono presentarsi i casi seguenti\*:

- a) il piano seziona le piramidi, parallelamente al piano delle loro basi. Il quadrilatero sezione è per entrambe un quadrato (fig. 2).
- b) Il piano contiene un lato di base (o è parallelo a questo e forma con l'altezza un angolo diverso da quello retto). La sezione per la piramide retta risulta un trapezio isoscele mentre un trapezio qualsiasi per la piramide non retta (fig. 3).

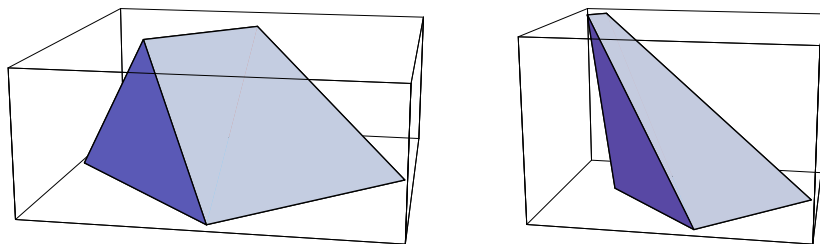
\* si veda <http://www.lorenzoroi.net/prob/sezpiramide/SezioniPiramidi.html> per una pagina interattiva su tale quesito.



**Fig. 1.** Piramidi a base quadrangolare retta e non.

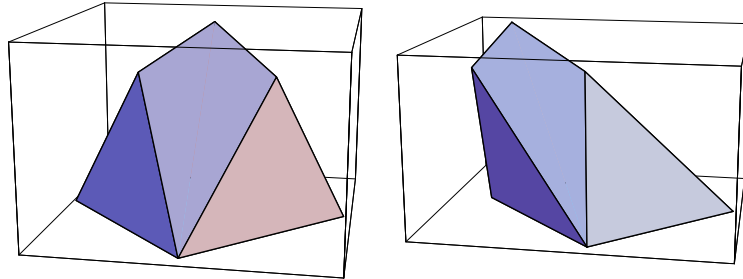


**Fig. 2.** Piano parallelo alla base.

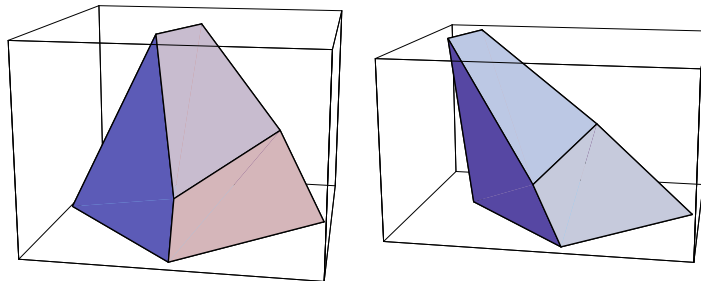


**Fig. 3.** Piano per un lato di base.

- c) Se il piano è parallelo (o la contiene) ad una diagonale della base (in figura 4 passa per un vertice della base e interseca due spigoli in punti aventi la medesima distanza dalla base) si ottiene, per la piramide retta, un quadrilatero avente le diagonali perpendicolari (detto anche 'romboide') e lati a due a due congruenti. Se la piramide non è retta appare un quadrilatero convesso qualsiasi.
- d) Infine, se il piano ha una qualsiasi altra disposizione, la figura sezione è un quadrilatero qualsiasi comunque convesso (fig. 5).



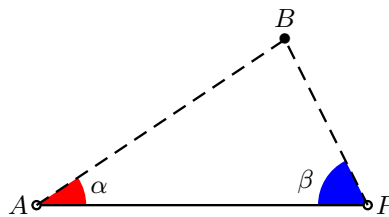
**Fig. 4.** Piano parallelo ad una diagonale di base.



**Fig. 5.** Piano qualsiasi.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Nella seguente figura 1 rappresentiamo schematicamente la situazione descritta dal testo del quesito: le distanze  $\overline{AB}$  e  $\overline{PB}$  sono incognite mentre è possibile risalire alla misura  $\overline{AP}$  del lato  $AP$  di  $\triangle APB$ .



**Fig. 1.** Schema della situazione.

Disponendo quindi di un goniometro e posizionatolo in  $A$ , si misura l'angolo  $\alpha = \angle BAP$ . Spostatolo in  $P$ , si misura successivamente l'angolo  $\beta = \angle APB$ . Applicando il teorema dei seni a  $\triangle APB$  dove  $\angle ABP = \pi - \angle BAP - \angle APB$

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\angle APB)} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen}(\pi - \angle BAP - \angle APB)}$$

da cui

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha - \beta)} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} = \frac{\overline{AP} \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

essendo  $\operatorname{sen}(\pi - \alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ . Nota quindi la distanza  $\overline{AP}$  e gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , si risale facilmente al lato  $\overline{AB}$ .

Tale era il metodo utilizzato dai cartografi per ottenere le distanze di un punto irraggiungibile sul terreno, nota la distanza e gli angoli di vista tra altri due punti.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Per determinare il dominio della funzione  $y = \ln[\sqrt{x+1} - (x-1)]$  va impostato e risolto il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \end{cases}$$

dove la prima condizione deriva dall'esistenza della radice quadrata mentre la seconda assicura l'esistenza del logaritmo. Le soluzioni della prima disequazione sono immediate,  $x \geq -1$ , mentre la seconda comporta  $\sqrt{x+1} > x-1$  che suddivide il sistema originario nei due sistemi

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x-1 \geq 0 \\ x+1 > (x-1)^2 \end{cases}$$

Il primo è risolto dall'intervallo  $-1 \leq x < 1$  e dal secondo discende (omettiamo la prima disequazione in quanto già compresa nella terza)

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$$

Quest'ultimo è soddisfatto per  $1 \leq x < 3$  che, unito all'intervallo precedente  $[-1, 1[$ , permette di determinare il dominio  $\mathcal{D}$  complessivo:

$$\mathcal{D} = [-1, 1[ \cup [1, 3[ = [-1, 3[.$$

La risposta corretta è pertanto la B).

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione proposta dal quesito,  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ , rientra nella classe delle funzioni cubiche. Essa, come tutte le parabole cubiche, ha per dominio  $\mathbb{R}$  e i limiti all'infinito sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( 2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = \pm\infty.$$

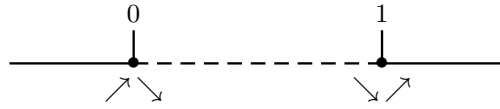
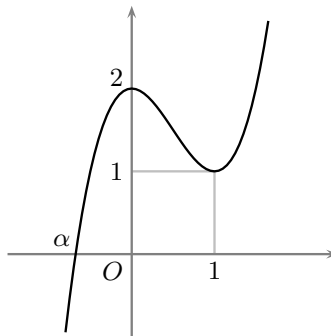


Fig. 1.

La sua derivata prima,  $f'(x)$  e il segno di questa risultano

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \geq 0 \quad 6x(x-1) \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad x \leq 0 \vee x \geq 1.$$

Rappresentando il segno di  $f'(x)$  graficamente (fig. 1) appare evidente che, in  $x = 0$ ,  $f$  possiede un massimo relativo o locale mentre in corrispondenza di  $x = 1$  sussiste un minimo locale. Calcolando le ordinate corrispondenti a questi valori risulta  $f(0) = 2$  e  $f(1) = 1$  cosicché il grafico di  $f$  dev'essere del tipo mostrato in figura 2.

Fig. 2. Bozza del grafico di  $f$ .

Questo mette in evidenza l'esistenza di un solo punto di intersezione con l'asse delle ascisse, in corrispondenza del quale si ha  $f(\alpha) = 0$  e quindi dove è soddisfatta l'equazione  $2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2 = 0$ . Risulta inoltre che  $\alpha < 0$ .

#### Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

La funzione di  $x$

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$$

può essere considerata come una funzione composta di due funzioni dove si ponga  $z = x^2$  come funzione "più interna". Con tale posizione l'integrale si riscrive come

$$f(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

L'applicazione del teorema sulla derivata della funzione composta comporta ora

$$D[f(x)] = f'(z) \cdot D[z]$$

e dato che, per il teorema di Torricelli–Barrow, la derivata della funzione integrale  $f'(z)$  è la funzione integranda calcolata nell'estremo superiore di integrazione, si ha  $f'(z) = e^{-z^2}$ . Sostituendo alla  $z$  la sua espressione in termini di  $x$ , segue che

$$D[f(x)] = e^{-z^2} \cdot D[x^2] = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2x e^{-x^4}$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Rappresentiamo la somma  $S$  di tutti i possibili prodotti  $i \cdot j$  con  $i, j = 1, 2, \dots, (n-1), n$  in forma tabellare

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot (n-1) + 1 \cdot n + \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n + \\ \vdots \\ \vdots \\ n \cdot 1 + n \cdot 2 + n \cdot 3 + \dots + n \cdot (n-1) + n \cdot n = S. \end{array}$$

La somma di questi  $n \cdot n = n^2$  addendi contiene due tipi di prodotti. Al primo tipo appartengono termini come  $1 \cdot 2$  e  $2 \cdot 1$  cioè in generale,  $i \cdot j$  e  $j \cdot i$  (con  $i \neq j$ ) dove i singoli fattori appaiono solo commutati (sono i termini disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale). La somma  $S$  presenta inoltre  $n$  addendi pari al quadrato di ciascun numero  $i$ , ossia del tipo  $i^2$  dove  $i = j$ : questi termini costituiscono la diagonale principale della tabella proposta.

Il quesito chiede comunque la somma di tutte le combinazioni ossia di un numero di addendi (o raggruppamenti) pari a

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (1)$$

e ciascuno di questi deve differire dagli altri per almeno un elemento. Pertanto dalla somma precedente  $S$  vanno sottratti tutti i quadrati rappresentati dal numero

$$q = \sum_{i=1}^n i^2,$$

in quanto nel conteggio delle combinazioni di  $n$  oggetti a gruppi di due non entrano i gruppi che presentano lo stesso elemento più di una volta. Per lo stesso motivo, i termini  $i \cdot j$  e  $j \cdot i$  rappresentano la medesima combinazione di due numeri interi

(nelle combinazioni l'ordine non ha importanza) e pertanto il valore  $S - q$  va a sua volta diviso per 2. Ne segue che si deve calcolare il valore

$$a = \frac{1}{2}(S - q) = \frac{1}{2} \left( S - \sum_{i=1}^n i^2 \right), \quad (2)$$

valore che dovrà essere rappresentato da un numero di addendi pari a quello fornito da (1). Difatti la somma  $S$  ne contiene  $n^2$  mentre  $n$  sono i termini al quadrato per cui si ottiene un numero di addendi pari effettivamente a

$$\frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Si tratta ora di calcolare il valore di  $S$  e di  $q$ . Riscritta  $S$  come

$$S = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n i \cdot j \right)$$

nella somma più interna si può fattorizzare il termine comune  $i$  per cui

$$S = \sum_{i=1}^n \left( i \sum_{j=1}^n j \right).$$

Poiché i termini  $1, 2, 3, \dots, (n-1), n$  compresi nella somma tra parentesi appaiono come gli elementi di una progressione aritmetica di ragione 1 con primo termine 1 ed  $n$ -esimo,  $n$ , la loro somma si ottiene applicando la formula che dà la somma dei primi  $n$  termini di tali progressioni ossia

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$$

Nel nostro caso questa si particolarizza

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

per cui

$$S = \sum_{i=1}^n i \left( \frac{1+n}{2} \cdot n \right) = \frac{1+n}{2} \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n i$$

avendo estratto dalla sommatoria i termini non dipendenti dall'indice e quindi costanti. Per lo stesso motivo la somma rimasta a secondo membro fornisce ancora il medesimo valore

$$S = \frac{1+n}{2} \cdot n \cdot \left( \frac{1+n}{2} \cdot n \right) = \left( \frac{1+n}{2} \right)^2 \cdot n^2 \quad (3)$$

Passiamo al calcolo di  $q$  nella (2) e dimostriamo che

$$q = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(1+n)(1+2n). \quad (4)$$

A tale scopo utilizzeremo il principio (o metodo) di induzione matematica. Questo importante principio afferma che un'asserzione  $P_n$  dipendente da un numero naturale  $n$  è valida per ogni  $n \in \mathbb{N}$  se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

- a) l'asserzione si dimostra vera per  $n = 1$  e
- b) supposta vera l'asserzione corrispondente ad un arbitrario numero naturale  $n = k$ , si può dimostrare la verità dell'asserzione relativa al valore successivo  $n' = k+1$ . In altri termini si tratta di dimostrare l'implicazione  $P_k \implies P_{k+1}$ .

Nel nostro caso la (4) si riduce per  $n = 1$  alla

$$1^1 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(1+2) \implies 1 = 1$$

manifestamente soddisfatta. Per verificare il punto b), assumiamo valida la (4) per un arbitrario valore  $n = k$ , ossia

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(1+k)(1+2k) \quad \text{sia vera.} \quad (5)$$

Ne segue che la somma dei primi  $k+1$  quadrati si può riscrivere come

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \left( \sum_{i=1}^k i^2 \right) + (k+1)^2.$$

Sfruttando il valore della somma dei primi  $k$  quadrati fornito dalla (5) si ha

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}k(1+k)(1+2k) + (k+1)^2$$

e questa diviene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \frac{1}{6}(k+1)[k(1+2k) + 6k + 6] \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + 7k + 6].\end{aligned}$$

Poiché il termine tra parentesi quadrate si può riscrivere identicamente come

$$2k^2 + 7k + 6 = [1 + (k+1)] \cdot [1 + 2(k+1)],$$

giungiamo alla

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1) \cdot [1 + (k+1)] \cdot [1 + 2(k+1)]$$

e ciò completa la dimostrazione del punto b) in quanto l'espressione ottenuta non è nient'altro che la (4) calcolata per  $n' = k + 1$ .

Riprendendo la (2) e inserendo i risultati parziali (3) e (4) abbiamo dopo qualche passaggio

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2} \left( S - \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1+n}{2} \right)^2 \cdot n^2 - \frac{1}{6}n(1+n)(1+2n) \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \left[ \frac{(1+n)n}{2} - \frac{1}{3}(1+2n) \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (3n^2 + 3n - 2 - 4n) \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (3n^2 - n - 2),\end{aligned}$$

risultato che coincide con la risposta D del quesito

$$a = \frac{n(n+1)}{24} \cdot (n-1)(3n+2)$$

non appena si osservi che  $(n-1)(3n+2) = 3n^2 - n - 2$ .

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Per ipotesi, i due numeri naturali dispari  $x$  e  $y$  soddisfano alla  $x - y = 2$  per cui la differenza dei rispettivi cubi si scompone in

$$\begin{aligned}x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= 2(x^2 + xy + y^2).\end{aligned}$$

Quest'ultima mette in evidenza come  $x^3 - y^3$  sia divisibile per 2. D'altra parte il fattore  $x^2 + xy + y^2$  si può riscrivere come

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= (x - y)^2 + 2xy + xy \\ &= (x - y)^2 + 3xy \\ &= 2^2 + 3xy = 4 + 3xy,\end{aligned}$$

e quest'ultima forma mostra come il termine  $x^2 + xy + y^2 = 4 + 3xy$  non possa essere divisibile per 3 in quanto 4 non lo è a sua volta. In definitiva,  $x^3 - y^3$  è divisibile per 2 ma non per 3 e quindi la risposta corretta è la b).

Un metodo alternativo per dimostrare questa affermazione sfrutta l'ipotesi che  $x$  e  $y$  sono interi dispari. Si può quindi scriverli come

$$x = 2m + 1 \quad y = 2n + 1 \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$x - y = (2m + 1) - (2n + 1) = 2m - 2n = 2(m - n) = 2$$

e pertanto  $m - n = 1$  cioè  $m = 1 + n$ . Sostituendo questo risultato in  $x = 2m + 1$  si ha che  $x = 2(1 + n) + 1 = 3 + 2n$ . Il fattore  $x^2 + xy + y^2$  diviene quindi

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= (3 + 2n)^2 + (3 + 2n)(2n + 1) + (2n + 1)^2 \\ &= 12n^2 + 24n + 13\end{aligned}$$

che mostra come tale fattore della scomposizione di  $x^3 - y^3$  non possa essere divisibile per 3. Difatti per poterlo essere il termine noto 13 dovrebbe essere divisibile per 3 come lo sono gli altri due addendi ma ciò è evidentemente assurdo essendo 13 un numero primo.

#### Quesito n. 9: soluzione. (testo del quesito)

Supposti estratti i numeri 1 e 90 rimangono nell'urna 88 numeri. Il numero delle terne che si possono formare con questi 88 numeri e da associare ai due numeri già estratti, è pari al numero delle cinque richieste. Pertanto, essendo ininfluente l'ordine di estrazione si tratta di calcolare il numero delle combinazioni semplici di 88 elementi a gruppi di 3 ossia

$$\begin{aligned}C_{88,3} &= \binom{88}{3} = \frac{88!}{3!(88-3)!} = \frac{(88 \cdot 87 \cdot 86) \cdot 85!}{3! \cdot 85!} \\ &= \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{6} = 109.736.\end{aligned}$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Poniamo

$$x = \lg_2 3 \cdot \lg_3 2$$

e cerchiamo di riportare entrambi i logaritmi alla stessa base, per esempio 2. Ricordando la formula che permette di passare da un logaritmo nella base  $b$  a quelli nella base  $a$  cioè

$$\lg_b t = \frac{\lg_a t}{\lg_a b}$$

si ha subito

$$x = \lg_2 3 \cdot \left( \frac{\lg_2 2}{\lg_2 3} \right)$$

ma, essendo  $\lg_2 2 = 1$  discende

$$x = \lg_2 3 \cdot \left( \frac{1}{\lg_2 3} \right) = 1.$$

L'affermazione del quesito è pertanto vera.

# ESAME 2003 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Nel piano sono dati: il cerchio  $\gamma$  di diametro  $OA = a$ , la retta  $t$  tangente a  $\gamma$  in  $A$ , una retta  $r$  passante per  $O$ , il punto  $B$ , ulteriore intersezione di  $r$  con  $\gamma$ , il punto  $C$  intersezione di  $r$  con  $t$ .

La parallela per  $B$  a  $t$  e la perpendicolare per  $C$  a  $t$  s'intersecano in  $P$ . Al variare di  $r$ ,  $P$  descrive il luogo geometrico  $\Gamma$  noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove  $D$  è la proiezione ortogonale di  $B$  su  $OA$ ;

2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche  $Oxy$ , l'equazione cartesiana di  $\Gamma$  è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2};$$

3. Si tracci il grafico di  $\Gamma$  e si provi che l'area compresa fra  $\Gamma$  e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio  $\gamma$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

Sia  $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$  con  $a, b, c$  numeri reali. Si determinino  $a, b, c$  in modo che:

1. la funzione  $f$  sia pari;
2.  $f(0) = 2$ ;

$$3. \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \log 2}.$$

Si studi la funzione  $g$  ottenuta sostituendo ad  $a, b, c$  i valori così determinati e se ne disegni il grafico  $G$ .

Si consideri la retta  $r$  di equazione  $y = 4$  e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca  $G$ , mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra  $r$  e  $G$ .

Si calcoli  $\int \frac{1}{g(x)} dx$ .

Si determini la funzione  $g'$  il cui grafico è simmetrico di  $G$  rispetto alla retta  $r$ .

Soluzione

### Questionario

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

Soluzione

2. Tre scatole  $A, B$  e  $C$  contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.  $A$  contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose,  $B$  ne contiene 500 con il 20% difettose e  $C$  ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

Soluzione

3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

Soluzione

4. Dare un esempio di polinomio  $P(x)$  il cui grafico tagli la retta  $y = 2$  quattro volte.

Soluzione

5. Dimostrare, usando il **teorema di Rolle** [da *Michel Rolle*, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0.$$

Soluzione

6. Si vuole che l'equazione  $x^3 + bx - 7 = 0$  abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di  $b$ ?

Soluzione

7. Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di  $\pi$ , applicando un metodo di integrazione numerica.

Soluzione

8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da  $\int_0^1 \pi x^3 dx$ .

Soluzione

9. Di una funzione  $f(x)$  si sa che ha derivata seconda uguale a  $\sin x$  e che  $f'(0) = 1$ . Quanto vale  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$ ?

Soluzione

10. Verificare che l'equazione  $x^3 - 3x + 1 = 0$  ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Soluzione

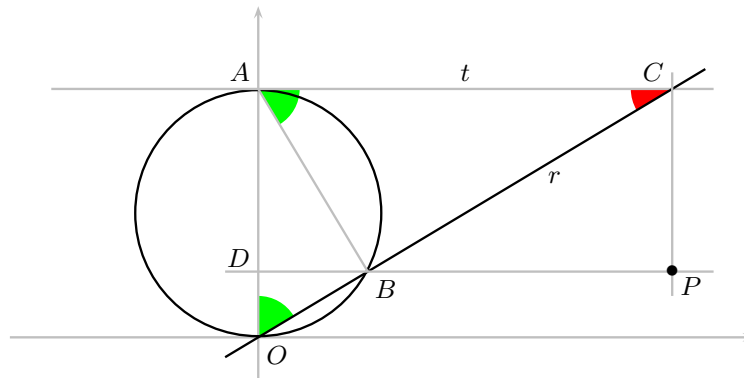
**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1) Costruito il punto  $P$  di figura 1, osserviamo la similitudine esistente tra i triangoli rettangoli  $\triangle OBD \sim \triangle OCA$  per cui discende

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}.$$

Essendo  $\overline{AC} = \overline{DP}$  segue che

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{DP}}.$$



**Fig. 1.** Elementi per la costruzione del punto  $P$ .

Per la dimostrazione della seconda proposizione va notata la similitudine tra  $\triangle OCA$  e  $\triangle ABC$  essendo questi entrambi rettangoli rispettivamente in  $\angle A$  e  $\angle B$  e con  $\angle BCA$  in comune. Ne segue

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad \text{ma} \quad \overline{AC} = \overline{DP} \quad \implies \quad \frac{\overline{OC}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BC}}.$$

2) Come evidenziato già dalla figura 1 la scelta fatta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche consiste nel far coincidere l'origine  $O$  del sistema con l'estremo  $O$  del diametro mentre l'altro estremo  $A$  viene posto sull'asse delle ordinate del medesimo sistema. In tal modo i punti  $O$  e  $A$  avranno coordinate  $O(0,0)$ ,  $A(0,a)$ , la retta  $t$  sarà descritta dall'equazione  $t : y = a$  e la retta  $r$  da  $r : y = mx$ . Si deduce quindi che l'ascissa di  $\{C\} = t \cap r$  è

$$\begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases} \quad mx = a \quad x_C = \frac{a}{m} \quad (m \neq 0) \quad C \left( \frac{a}{m}, a \right).$$

L'equazione della circonferenza di diametro  $\overline{OA} = a$  si ottiene facilmente considerando che il centro è individuato dalla coppia di coordinate  $(0, \frac{a}{2})$  e dal raggio pari a  $\frac{a}{2}$ .

$$\gamma : (x - 0)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{cioè} \quad x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Poiché di  $P$  conosciamo già l'ascissa ( $x_P = x_C = \frac{a}{m}$ ), determiniamo l'ordinata di  $B$  che è la medesima di  $P$ .

$$r \cap \gamma \implies \begin{cases} y = mx \\ x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases} \implies \left(\frac{y}{m}\right)^2 + y^2 - ay = 0.$$

Quest'ultima equazione si riscrive

$$\frac{y^2}{m^2} + y^2 - ay = 0 \quad \text{che, accanto al valore aspettato } y = 0,$$

fornisce

$$y \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = a \quad y_B = \frac{am^2}{1 + m^2} = y_P.$$

Quindi

$$P \left( \frac{a}{m}, \frac{am^2}{1 + m^2} \right):$$

le coordinate del punto  $P$  sono in tal modo espresse in termini del parametro comune  $m$  e il luogo  $\Gamma$  dei punti  $P$  si ottiene al variare di  $m \in \mathbb{R}$ . Abbiamo pertanto la tipica rappresentazione parametrica di un luogo: poiché il testo fornisce la rappresentazione esplicita di  $\Gamma$  per verificare la coerenza di quanto fatto dobbiamo ridurre la rappresentazione parametrica a quella esplicita. A tale scopo è sufficiente eliminare il parametro dalla forma parametrica e quindi risolvere l'equazione ottenuta nella variabile  $y$ . Allora ricavato  $m = a/x$  dalla prima equazione del sistema ( $x \neq 0$ )

$$\begin{cases} x = a/m \\ y = \frac{am^2}{1 + m^2} \end{cases}$$

e sostituito nella seconda si ha

$$y = \frac{a(a/x)^2}{1 + \frac{a^2}{x^2}} = \frac{a^3}{x^2 \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

che coincide con quella proposta dal testo. Il caso particolare di  $P \equiv A$  non viene descritto dalla forma parametrica scelta (in quanto non esiste il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse  $y$ ) mentre è compreso in quella esplicita. Forme

parametriche coinvolgenti altri parametri (come per esempio, l'angolo  $\angle AOC$ ), possono comunque rappresentare anche tale punto\*.

3) Dobbiamo studiare il grafico della funzione di variabile reale espressa dall'equazione

$$\Gamma : y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

e di dominio  $\mathbb{R}$ . Circa le sue proprietà di simmetria discende facilmente che vale l'identità  $f(-x) = f(x)$  per  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Il grafico della versiera è pertanto simmetrico rispetto all'asse delle  $y$  e la funzione è pari. È inoltre  $y > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  ( $a > 0$ ).

• Lo studio dei limiti comporta l'analisi di  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$  che risulta

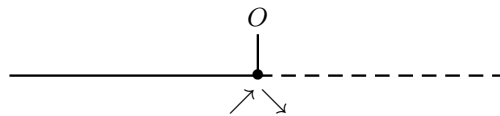
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$$

in quanto funzione razionale fratta con il grado del denominatore (secondo) maggiore del grado del numeratore (zero).

• *Derivata prima.* Il calcolo di  $y'$  fornisce

$$y' = a^3 \left[ -\frac{2x}{(x^2 + a^2)^2} \right] = \frac{-2a^3x}{(x^2 + a^2)^2},$$

e  $y \geq 0$  implica  $-2a^3x \geq 0$  e quindi  $x \leq 0$  in quanto  $a > 0$ . In corrispondenza dell'origine la funzione presenta un punto di massimo relativo proprio.



**Fig. 2.**

• *Derivata seconda.* Il calcolo di  $y''$  risulta

$$\begin{aligned} y'' &= -2a^3 \left[ \frac{(x^2 + a^2)^2 - 2(x^2 + a^2) \cdot 2x \cdot x}{(x^2 + a^2)^4} \right] \\ &= -2a^3 \left[ \frac{x^2 + a^2 - 4x^2}{(x^2 + a^2)^3} \right] = 2a^3 \cdot \frac{3x^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^3}. \end{aligned}$$

Lo studio del segno di  $y''$  cioè  $y'' \geq 0$  si riduce all'analisi del numeratore essendo i restanti termini positivi. Discende quindi  $3x^2 - a^2 \geq 0$ ,  $3x^2 \geq a^2$ , risulta

\* per altre informazioni si veda la pagina web

<http://www.lorenzoroi.net/curvecelebri/versiera.html>

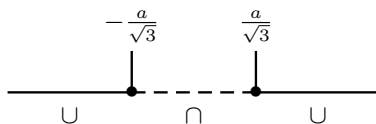


Fig. 3.

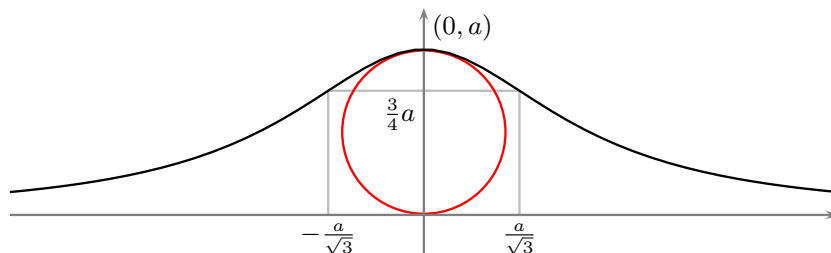
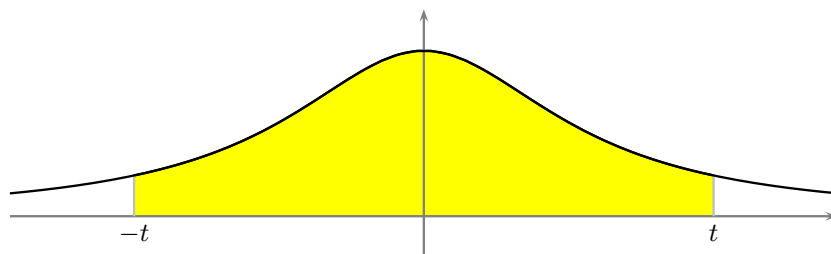


Fig. 4. Grafico della versiera di Gaetana Agnesi.

per  $x \leq -a/\sqrt{3} \vee x \geq a/\sqrt{3}$ . Il grafico corrispondente di  $y''$  è dato dalla figura 3 e mostra come vi siano due punti di flesso in corrispondenza delle ascisse  $x = \pm a/\sqrt{3}$ . Calcolata l'ordinata del massimo  $y(0) = a$  il grafico della versiera è infine rappresentato dalla figura 4 (dove si è riportata la circonferenza servita per costruirla).

Il calcolo dell'area compresa tra la versiera e l'asse delle ascisse (fig. 5) si può eseguire introducendo un integrale generalizzato.

Fig. 5. Area della regione compresa tra la versiera e l'asse  $x$ .

Sia quindi  $t$  l'estremo superiore dell'intervallo finito di integrazione  $[-t, t]$ : l'area della regione evidenziata in fig. 5 è espressa dall'integrale definito

$$\int_{-t}^t \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx$$

mentre l'area della regione richiesta dal testo viene rappresentata dal limite

$$\mathcal{A} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx.$$

Sfruttando la simmetria di  $\Gamma$  possiamo riscrivere tale integrale generalizzato come

$$\mathcal{A} = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx \quad (1)$$

e tale limite si potrà eseguire non appena si sia risolto l'integrale indefinito

$$\int \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx.$$

Quest'ultimo si può trasformare in

$$\int \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{a^3}{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)} dx = \int \frac{a dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Posto quindi  $x/a = z$  cioè  $x = az$  che implica  $dx = a dz$ , abbiamo

$$\int \frac{a dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \int \frac{a^2 dz}{1 + z^2} = a^2 \int \frac{dz}{1 + z^2} = a^2 \operatorname{arctg} z + c = a^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a}\right) + c$$

dove si è fatto uso della conoscenza dell'integrale elementare

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

Ripreso l'integrale generalizzato (1), questo si riscrive come

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ a^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \right]_0^t \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} a^2 \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{a} \right) - a^2 \operatorname{arctg} 0 \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} a^2 \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{a} \right) = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2 : \end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio si è utilizzato il noto limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(t/a) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2}.$$

L'area del cerchio  $\gamma$  è pari a  $\mathcal{A}(\gamma) = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2/4$  per cui risulta, come richiesto,  $\mathcal{A} = 4\mathcal{A}(\gamma)$ .

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

a) Si ha  $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Perché  $f$  sia l'equazione rappresentativa di una funzione pari, dev'essere identicamente per  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = a2^{-x} + b2^{-(-x)} + c = f(x).$$

Ne segue

$$a2^{-x} + b2^x + c = a2^x + b2^{-x} + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui

$$2^{-x}(a - b) + 2^x(b - a) = 0.$$

Affinché quest'ultima valga per  $\forall x \in \mathbb{R}$  cioè, lo ripetiamo, sia un'identità, dev'essere  $a - b = 0$  cioè  $a = b$ .

La condizione  $f(0) = 2$  implica invece  $f(0) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 2$  e, per quanto appena trovato,  $a + b + c = 2$ ,  $a + a + c = 2$ ,  $c = 2 - 2a$ .

L'ultima condizione si traduce nell'integrale (usiamo la notazione  $\ln x$  in luogo della  $\log x$ )

$$\int_0^1 (a2^x + a2^{-x} + c) dx = \frac{3}{2 \ln 2}$$

che verrà risolto non appena siano conosciuti i due integrali

$$\int 2^x dx \quad \int 2^{-x} dx$$

che appaiono nella scomposizione del primo membro.

Anche se il primo rientra tra gli integrali elementari, trattiamoli allo stesso modo riportandoli alla base naturale e quindi introduciamo la nuova variabile  $t = x \ln 2$  (e  $dt = dx \ln 2$ )

$$\int 2^x dx = \int e^{x \ln 2} dx = \int \frac{e^t dt}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \int e^t dt = \frac{e^t}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{\ln 2} + c.$$

Analogamente ( $t = -x \ln 2$ )

$$\int 2^{-x} dx = \int e^{-x \ln 2} dx = \int -\frac{e^t dt}{\ln 2} = -\frac{1}{\ln 2} \int e^t dt = -\frac{e^t}{\ln 2} + c = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + c.$$

L'integrale **originario** diviene ora

$$\begin{aligned} \int_0^1 (a2^x + a2^{-x} + c) dx &= a \int_0^1 2^x dx + a \int_0^1 2^{-x} dx + c \int_0^1 dx \\ &= \left[ a \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - a \frac{2^{-x}}{\ln 2} + cx \right]_0^1 = \frac{3}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$\frac{2a}{\ln 2} - \frac{a}{2 \ln 2} + c - \frac{a}{\ln 2} + \frac{a}{\ln 2} = \frac{3}{2 \ln 2}$$

che si semplifica in  $3a + 2c \ln 2 = 3$ . Sostituendo  $c = 2 - 2a$  abbiamo

$$3a + 4 \ln 2 - 4a \ln 2 = 3, \quad a(3 - 4 \ln 2) = 3 - 4 \ln 2 \quad a = 1$$

da cui

$$a = b = 1 \quad e \quad c = 0.$$

La funzione  $g(x)$  è pertanto:  $g(x) = 2^x + 2^{-x}$ .

b) *Studio della funzione g.* Come imposto inizialmente la  $g$  è una funzione pari  $g(-x) = 2^x + 2^{-x} = g(x)$  e positiva per  $x \in \mathbb{R}$  in quanto somma di esponenziali. Continua nel proprio dominio, non possiede punti singolari di discontinuità. I limiti all'infinito valgono (per  $x \rightarrow -\infty$  lo si ottiene per simmetria)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0.$$

Questo risultato lascia aperta la possibilità che  $g$  possieda degli asintoti obliqui. Lo studio di

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x}$$

conduce ad un caso di indeterminazione per cui conviene analizzare il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x \ln 2 - \ln 2 \cdot 2^{-x}}{1} = \pm\infty.$$

Poiché questo esiste possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital e concludere che

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x} = \pm\infty :$$

non essendo questo finito, la  $g$  non può presentare alcun asintoto obliquo.

• *Derivata prima.* Il calcolo della  $g'(x)$  comporta

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - \ln 2 \cdot 2^{-x} = \ln 2(2^x - 2^{-x})$$

e lo studio del suo segno implica

$$g'(x) \geq 0, \quad 2^x - 2^{-x} \geq 0, \quad 2^x \geq 2^{-x}, \quad x \geq -x, \quad 2x \geq 0, \quad x \geq 0.$$

La funzione presenta in  $x = 0$  un minimo come evidenziato dal grafico riassuntivo del segno di  $g'$ .

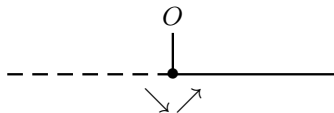
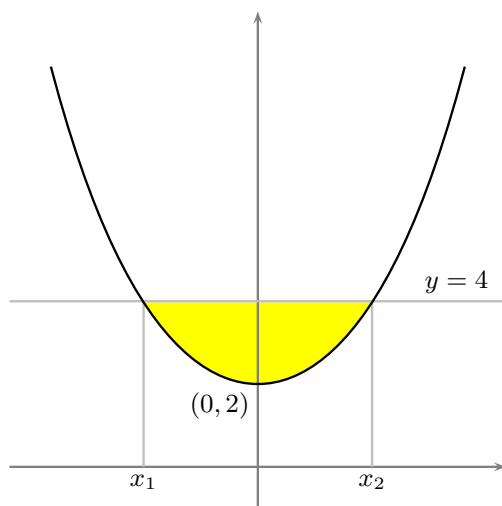


Fig. 1.

- *Derivata seconda.* Il calcolo della  $g''(x)$  conduce all'espressione

$$g''(x) = \ln 2(\ln 2 \cdot 2^x + \ln 2 \cdot 2^{-x}) = \ln^2 2(2^x + 2^{-x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione risulta in ogni punto convessa. Notato che  $g(0) = 2^0 + 2^{-0} = 2$  possiamo infine proporre il grafico di  $g$  (fig. 2)



**Fig. 2.** Grafico della funzione  $g(x)$  e area richiesta.

- c) Tracciata la retta di equazione  $y = 4$  si richiedono ora le ascisse  $x_1$  e  $x_2$  dei suoi punti di intersezione con  $g$  (fig. 2). Questo problema equivale a determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{che si riduce a} \quad 2^x + 2^{-x} = 4.$$

Riscritta questa equazione come

$$2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \quad \text{e moltiplicata per } 2^x \text{ si ha} \quad (2^x)^2 + 1 = 4 \cdot 2^x.$$

Posto  $2^x = t$  diviene  $t^2 - 4t + 1 = 0$  che è risolta dai valori

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{e quindi} \quad 2^x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Prendendo il logaritmo in base 2 dell'ultima abbiamo che  $x_{1,2} = \lg_2(2 \pm \sqrt{3})$ : i punti di intersezione possiedono le ascisse  $x_1 = \lg_2(2 - \sqrt{3})$  e  $x_2 = \lg_2(2 + \sqrt{3})$ . Di questi valori, il testo chiede una stima ottenuta applicando un qualsiasi procedimento iterativo. Ricordando la monotonia crescente dell'esponenziale  $2^x$  e che

$2 + \sqrt{3} = 2^{x_2}$ , applichiamo il metodo di bisezione che, a partire dall'osservazione  $2 + \sqrt{3} \approx 3,732$ , permette le deduzioni

$$2 < 2 + \sqrt{3} < 2^2 \quad 2^1 < 2^{x_2} < 2^2 \quad \implies \quad 1 < x_2 < 2.$$

Scelto ora il valore medio dell'ultimo intervallo e calcolato  $2^{1,5} \approx 2,8284$  è ancora

$$2^{1,5} < 2 + \sqrt{3} < 2^2 \quad \implies \quad 1,5 < x_2 < 2.$$

Ora  $2^{1,75} \approx 3,24$

$$2^{1,75} < 2 + \sqrt{3} < 2^2 \quad \implies \quad 1,75 < x_2 < 2;$$

ancora  $2^{1,875} \approx 3,66$  cosicché

$$2^{1,875} < 2 + \sqrt{3} < 2^2 \quad \implies \quad 1,875 < x_2 < 2;$$

infine  $2^{1,9375} \approx 3,83$

$$2^{1,875} < 2 + \sqrt{3} < 2^{1,9375} \quad \implies \quad 1,875 < x_2 < 1,9375.$$

Nello stesso modo, con il metodo di bisezione, si può procedere direttamente dalla  $2^x + 2^{-x} = 4$  dato che il grafico del primo membro (e in particolare, la sua monotonia) è conosciuto.

d) *Calcolo dell'area.* L'area della regione finita delimitata dal grafico di  $g$  e dalla retta di equazione  $y = 4$  ed evidenziata in giallo in fig. 2 viene data dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_{\lg_2(2-\sqrt{3})}^{\lg_2(2+\sqrt{3})} 4 - (2^x + 2^{-x}) \, dx$$

che per la già notata simmetria diviene

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^{\lg_2(2+\sqrt{3})} (4 - 2^x - 2^{-x}) \, dx.$$

Riprendendo gli integrali indefiniti delle funzioni  $2^x$  e  $2^{-x}$  precedentemente calcolati, l'area diviene

$$\mathcal{A} = 2 \left[ 4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^{\lg_2(2+\sqrt{3})}$$

e dopo qualche calcolo numerico si riduce a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{2 + \sqrt{3}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2(2 + \sqrt{3})} - 0 \right] \\
 &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{\ln 2} \left( 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) \right] \\
 &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{\ln 2} \left( \frac{4 + 3 + 4\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right) \right] \\
 &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{\ln 2} \left( \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right) \right] \\
 &= 2 \left[ 4 \lg_2(2 + \sqrt{3}) - \frac{2\sqrt{3}}{\ln 2} \right] \approx 5,2045
 \end{aligned}$$

e) Il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}}$$

si può riportare ad un integrale più semplice con la sostituzione  $t = 2^x$ . Questa implica  $x = \lg_2 t$  e il differenziale  $dx = \frac{1}{t \ln 2} dt$ , per cui

$$\int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}} = \int \frac{dx}{2^x + (1/2^x)} = \int \frac{1}{t + (1/t)} \cdot \frac{1}{t \ln 2} dt.$$

Estratti i termini costanti si ha infine

$$\int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\ln 2} \operatorname{arctg} t + c = \frac{\operatorname{arctg}(2^x)}{\ln 2} + c.$$

f) Per determinare infine la funzione  $g'(x)$ , simmetrica di  $g(x)$  rispetto alla retta  $y = 4$  (non va confusa con la derivata  $g'$ ), va considerata la trasformazione di simmetria assiale di equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ \frac{y + y'}{2} = 4 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = x' \\ y = 8 - y'. \end{cases}$$

Sostituendo in  $y = 2^x + 2^{-x}$  si ha

$$8 - y' = 2^{x'} + 2^{-x'} \quad \text{da cui} \quad y' = 8 - 2^{x'} - 2^{-x'}$$

ossia, ritornando alle variabili canoniche  $x$  e  $y$ , anche

$$g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}.$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Considerando solo l'andata si tratta di determinare il numero delle combinazioni semplici di 18 elementi a gruppi di 2 ossia

$$C_{18,2} = \binom{18}{2} = 153.$$

Con il ritorno quindi il numero complessivo di partite è  $2 \cdot C_{18,2} = 306$ .

In modo analogo, considerando entrambi i gironi di andata e ritorno e perciò contando come diverse partite dove appaiono le medesime squadre si ottiene

$$D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306,$$

dove  $D_{18,2}$  è il numero delle disposizioni semplici a gruppi di 2 di 18 elementi. Infine in termini intuitivi, in ogni giornata vengono giocate 9 partite ("una volta", alla domenica), per 17 giornate che costituiscono il girone di andata e 17 giornate per il ritorno. Quindi  $9 \text{ partite} \times 17 \text{ giornate} \times 2 \text{ gironi} = 18 \cdot 17 = 306$ .

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Definiti gli eventi

$$\begin{aligned} F &= \{\text{la lampada è difettosa}\} \\ E_A &= \{\text{lampada estratta dalla scatola } A\} \\ E_B &= \{\text{lampada estratta dalla scatola } B\} \\ E_C &= \{\text{lampada estratta dalla scatola } C\} \end{aligned}$$

notiamo che gli eventi  $F \cap E_A$ ,  $F \cap E_B$ ,  $F \cap E_C$  sono incompatibili e che l'evento complesso  $F$  si può decomporre nell'unione dei tre precedenti ossia

$$F = (F \cap E_A) \cup (F \cap E_B) \cup (F \cap E_C).$$

In tali ipotesi possiamo applicare il teorema delle probabilità totali e quindi esprimere la probabilità dell'evento  $F$ ,  $p(F)$  come

$$p(F) = p(F \cap E_A) + p(F \cap E_B) + p(F \cap E_C).$$

Il calcolo delle probabilità che appaiono a secondo membro procede invece con il teorema della probabilità composta che fornisce

$$p(F \cap E_A) = p(F/E_A) \cdot p(E_A)$$

$$p(F \cap E_B) = p(F/E_B) \cdot p(E_B)$$

$$p(F \cap E_C) = p(F/E_C) \cdot p(E_C).$$

Poiché si sceglie una scatola a caso risulta  $p(E_A) = p(E_B) = p(E_C) = \frac{1}{3}$  mentre, una volta scelta la scatola, risulta (il numero di lampadine contenuto in ogni scatola è quindi superfluo)

$$p(F/E_A) = 5\% = \frac{5}{100} \quad p(F/E_B) = 20\% = \frac{20}{100} \quad p(F/E_C) = 10\% = \frac{10}{100} :$$

sostituendo queste probabilità nella

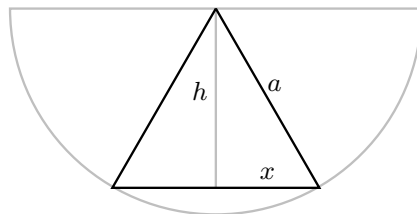
$$p(F) = p(F/E_A)p(E_A) + p(F/E_B)p(E_B) + p(F/E_C)p(E_C)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} p(F) &= \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{5 + 20 + 10}{100} \right) \\ &= \frac{35}{300} = \frac{7}{60} \approx 0,1167. \end{aligned}$$

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Rappresentiamo il problema considerando una sezione piana del cono di apotema  $a = 2$  dm e poniamo pari ad  $x$  il suo raggio di base (fig. 1).



**Fig. 1.**

È pertanto  $0 \leq x \leq a$  e, detta  $h$  l'altezza del cono, il suo volume si esprime come  $\mathcal{V} = \frac{1}{3}(\pi x^2) \cdot h$ . Per il teorema di Pitagora è anche

$$h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

per cui si dovrà individuare il valore massimo della funzione

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{a^2 - x^2} & \text{entro le limitazioni} \\ 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Derivando  $\mathcal{V}$  abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{1}{3}\pi \left[ 2x\sqrt{a^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} [2x(a^2 - x^2) - x^3] \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} (2xa^2 - 3x^3). \end{aligned}$$

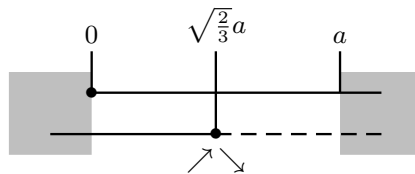


Fig. 2.

Il segno di  $\mathcal{V}'$  comporta lo studio del prodotto  $x(2a^2 - 3x^2) \geq 0$ . Poiché  $x \geq 0$  mentre

$$2a^2 - 3x^2 \geq 0 \quad \text{implica} \quad -\sqrt{\frac{2}{3}}a \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}a,$$

il segno di  $\mathcal{V}'$  è riassunto in fig. 2. In corrispondenza di  $x_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$  il volume  $\mathcal{V}$  assume il valore massimo

$$\mathcal{V} \left( \sqrt{\frac{2}{3}}a \right) = \frac{\pi}{3} \left( \frac{2}{3}a^2 \right) \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}.$$

Poiché si chiede il valore in centilitri va ricordato che  $1 \text{ dm}^3 = 10^2 \text{ cl}$ . Sostituendo

$$\mathcal{V}_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}(2 \text{ dm})^3 \approx 3,2245 \text{ dm}^3 = 3,2245 \times 10^2 \text{ cl} = 322,45 \text{ cl}.$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Un polinomio che intersechi l'asse delle  $x$  in quattro punti può essere per esempio

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

per cui, il polinomio che si ottiene traslando  $p(x)$  di due unità nel verso positivo delle ordinate  $P(x) = p(x) + 2$  cioè

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2 \\ &= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 26 \end{aligned}$$

soddisfa alla richiesta del quesito intersecando la retta di equazione  $y = 2$  in  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$  e  $x = 4$ .

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Il polinomio di grado  $n$

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

rappresenta una funzione continua in  $\mathbb{R}$  e ivi derivabile. Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due sue radici cioè  $P(\alpha) = P(\beta) = 0$  è possibile applicare in  $[\alpha, \beta]$  il teorema di Rolle in quanto tutte le sue ipotesi sono soddisfatte. Di conseguenza esiste almeno un punto di ascissa  $x \in ]\alpha, \beta[$  dove la derivata prima di  $P$  si annulla cioè  $P'(x) = 0$ . Il calcolo di  $P'(x)$  fornisce

$$P'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$$

per cui  $\exists x \in ]\alpha, \beta[$  dove

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$$

che è quanto si voleva dimostrare.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $y = x^3 + bx - 7$ , affinché l'equazione  $y = 0$  presenti tre radici reali il grafico della cubica  $y$  dovrà avere a) un punto di massimo e uno di minimo relativi e b) i corrispondenti valori del massimo e del minimo dovranno essere di segno opposto. Difatti calcolata  $y' = 3x^2 + b$ , la condizione a) impone che la disequazione

$$y' \geq 0 \quad \text{cioè} \quad 3x^2 + b \geq 0 \quad x^2 \geq -\frac{b}{3}$$

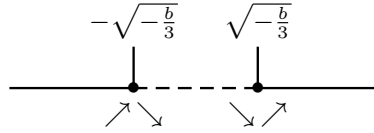


Fig. 1.

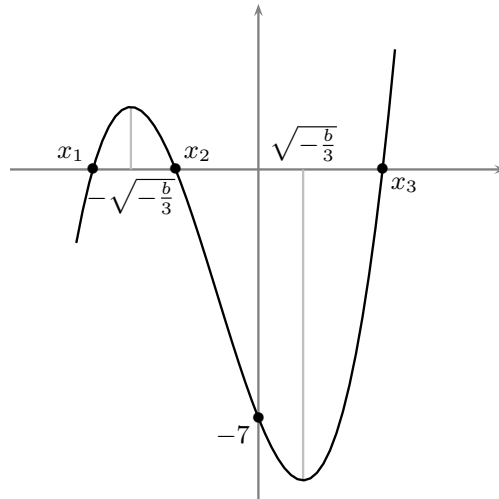


Fig. 2. Andamento qualitativo della cubica assegnata.

cambi segno due volte. Ora solo se  $b < 0$  le soluzioni di

$$x^2 \geq -\frac{b}{3} \quad \text{sono della forma} \quad x \leq -\sqrt{-\frac{b}{3}} \vee x \geq \sqrt{-\frac{b}{3}}$$

e implicano un segno per  $y'$  come quello riassunto in fig. 1.

Poiché per  $x = 0$  risulta  $y = -7 < 0$  l'ordinata del minimo non potrà che essere negativa (fig. 2) per cui la condizione b) si traduce imponendo che sia  $y(x_M) > 0$  con  $x_M = -\sqrt{-b/3}$ .

Sostituendo

$$y(x_M) = x_M^3 + bx_M - 7 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3 - b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7 > 0.$$

Quest'ultima si riscrive

$$-\sqrt{-\frac{b^3}{27}} - b\sqrt{-\frac{b}{3}} > 7 \quad -\frac{|b|}{3}\sqrt{-\frac{b}{3}} - b\sqrt{-\frac{b}{3}} > 7$$

ma essendo  $b < 0$  si ha

$$-\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3}} > 7.$$

Poiché entrambi i membri appaiono essere positivi, eleviamo al quadrato ed esplicitiamo  $b^3$

$$\frac{4}{9}b^2 \left(-\frac{b}{3}\right) > 49 \quad -\frac{4b^3}{27} > 49 \quad b^3 < -\frac{49 \cdot 27}{4}$$

da cui, estraendo la radice cubica

$$b < -3\sqrt[3]{\left(\frac{7}{2}\right)^2} \quad \text{che approssimativamente, significa} \quad b < (\approx -6,91).$$

Un possibile valore di  $b$  è pertanto  $b = -7$  (scelto intero solo per semplicità).

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La verifica dell'uguaglianza richiesta si ottiene ricordando l'integrale elementare

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

per cui si ha

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 4 [\operatorname{arctg} x]_0^1. \quad (1)$$

Sostituendo a secondo membro gli estremi di integrazione ed eseguendo la differenza

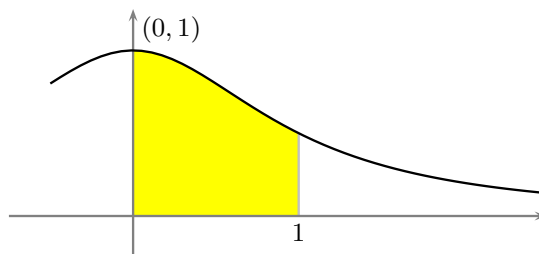
$$\pi = 4(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) \quad \pi = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \quad \pi = \pi$$

come si voleva.

Per una stima numerica di  $\pi$  applicheremo il metodo dei rettangoli alla funzione

$$f : y = \frac{1}{1+x^2}$$

il cui grafico è del tipo già studiato nel problema 1. La funzione  $f$  è in effetti rappresentativa della versiera di Gaetana Agnesi quando si ponga  $a = 1$ . Il grafico è quindi



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $y = 1/(1+x^2)$ .

Poiché l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \mathcal{A}$$

si interpreta geometricamente come l'area  $\mathcal{A}$  della regione (trapezoide) sottostante al grafico della funzione integranda (in giallo nella fig. 1), possiamo ottenere una stima di quest'area suddividendo l'intervallo  $[0, 1]$  in  $n$  intervalli di uguale ampiezza e ricoprendola di rettangoli. Scegliamo  $n = 5$  per cui l'ampiezza di ciascuno sarà  $h = (1 - 0)/5 = 0,2$  e identifichiamo l'altezza dei rettangoli con il valore di  $f$  calcolato nel punto medio di ciascuno dei 5 intervalli (fig. 2).

Una stima dell'area è quindi data dall'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{i=0}^4 h \cdot f\left[0 + \frac{h}{2}(2i + 1)\right] \\ &= 0,2[f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9)] \\ &= 0,2[0,9901 + 0,9174 + 0,8 + 0,6711 + 0,5529] \approx 0,7862. \end{aligned}$$

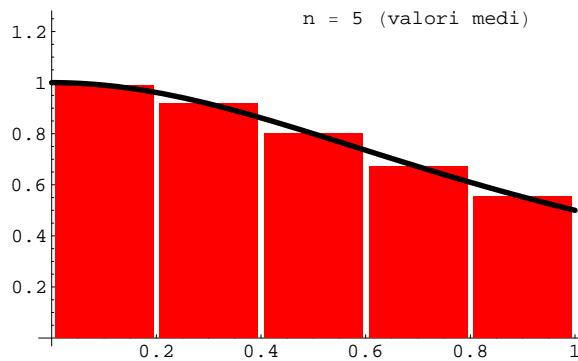


Fig. 2.

Ripresa l'uguaglianza (1), segue che una stima di  $\pi$  risulta

$$\pi = 4 \cdot \mathcal{A} \approx 4 \cdot 0,7862 = 3,1449.$$

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

L'integrale definito proposto dal quesito si può ricondurre al volume di un solido di rotazione attorno all'asse delle  $x$  non appena si tenga presente la formula

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

che rappresenta il volume generato da una rotazione attorno all'asse  $x$  di  $2\pi$  della regione compresa tra  $f(x)$ , l'asse  $x$  e le rette di equazione  $x = a$  e  $x = b$ . Pertanto riscrivendo l'integrale dato come

$$\int_0^1 \pi x^3 dx = \pi \int_0^1 x^3 dx$$

possiamo identificare  $[f(x)]^2 = x^3$  cioè  $f(x) = \sqrt{x^3}$  con  $x \in [0, 1]$  e quindi il volume rappresentato risulta essere quello generato dalla rotazione attorno all'asse delle ascisse della regione in colore della fig. 1. Il grafico rappresentato si ottiene facilmente osservando che risulta  $f(x) \geq 0$  quando  $0 \leq x \leq 1$  e che pure  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \geq 0$  nel medesimo intervallo.

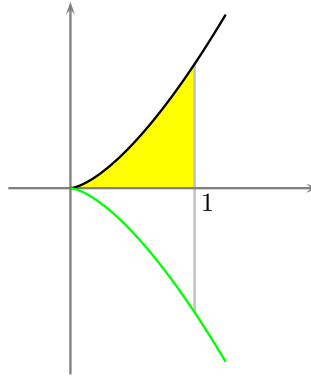


Fig. 1. Grafico approssimativo della funzione  $y = \sqrt{x^3}$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Della funzione  $f(x)$  sappiamo che  $f''(x) = \sin x$  e che  $f'(0) = 1$ . La prima si può pure scrivere come

$$\frac{df'}{dx} = \sin x \quad \text{o esplicitando } df', \quad df' = \sin x dx.$$

È quindi noto il differenziale di  $f'$  per cui integrando si ha

$$f'(x) = \int df' = \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

La costante di integrazione si determina con la seconda condizione  $f'(0) = 1$  che implica  $c - \cos 0 = 1$  per cui  $c = 2$ . Quindi  $f'(x) = 2 - \cos x$ . Procedendo nello stesso modo

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2 - \cos x \quad \implies \quad df = (2 - \cos x) dx$$

e integrando tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} df = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos x) dx = [2x - \operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 1.$$

Ricordando che per il teorema di Torricelli–Barrow

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} df = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$$

abbiamo in definitiva che

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \pi - 1.$$

In alternativa, ottenuto l'integrale indefinito

$$f(x) = \int df = \int (2 - \cos x) dx = 2x - \operatorname{sen} x + c$$

si calcolano i due valori

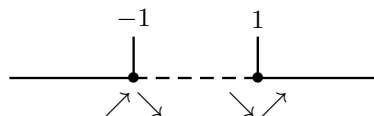
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 + c = \pi - 1 + c \quad f(0) = c$$

e quindi eseguendo la loro differenza si ottiene il medesimo risultato.

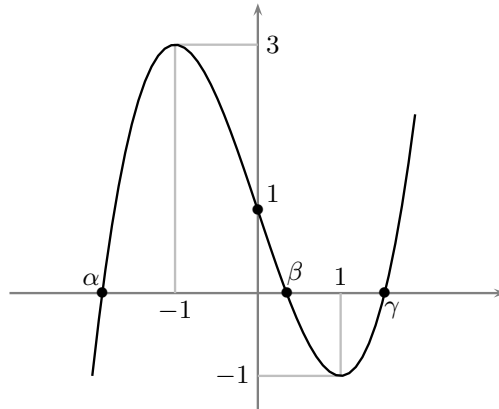
**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La risoluzione dell'equazione data si può ricondurre alla ricerca delle intersezioni della cubica  $y = x^3 - 3x + 1$  con l'asse delle  $x$ . Studiamo perciò il grafico di questa cubica tramite la sua derivata prima

$$y' = 3x^2 - 3 \geq 0 \quad \implies \quad x^2 - 1 \geq 0 \quad x \leq -1 \vee x \geq 1.$$



**Fig. 1.**



**Fig. 2.** Grafico approssimativo di  $y = x^3 - 3x + 1$ .

La cubica possiede un massimo relativo in corrispondenza di  $x = -1$  mentre  $x = 1$  è un punto di minimo. Poiché  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ ,  $f(-1) = 3 > 0$  e  $f(1) = -1 < 0$  la cubica deve intersecare, per il teorema degli zeri, in tre punti distinti l'asse delle  $x$  e tali da soddisfare alle disuguaglianze  $\alpha < -1$ ,  $-1 < \beta < 1$ ,  $\gamma > 1$  (fig. 1).

In particolare, avendo il punto di intersezione con l'asse  $y$  ordinata positiva  $y(0) = 1 > 0$ , la radice  $\beta$  deve appartenere, ancora per il teorema degli zeri, all'intervallo  $]0, 1[$ . Per calcolarne un'approssimazione applichiamo il metodo di bisezione. Considerando i punti medi degli intervalli via via individuati per la radice  $\beta$  abbiamo, in prima approssimazione,

$$\beta_1 = 0,5 \quad f(0,5) \approx -0,37 < 0 \quad \text{da cui} \quad 0 < \beta < 0,5.$$

Procedendo nello stesso modo

$$\begin{aligned} \beta_2 = 0,25 \quad f(0,25) &\approx 0,2656 > 0 &\implies & 0,25 < \beta < 0,5; \\ \beta_3 = 0,375 \quad f(0,375) &\approx -0,0723 < 0 &\implies & 0,25 < \beta < 0,375; \\ \beta_4 = 0,3125 \quad f(0,3125) &\approx 0,0930 > 0 &\implies & 0,3125 < \beta < 0,375. \end{aligned}$$

Alla prima cifra decimale corretta abbiamo in conclusione  $\beta \approx 0,3$ .

# ESAME 2004

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Sia  $f$  la funzione definita da:  $f(x) = 2x - 3x^3$ .

1. Disegnate il grafico  $G$  di  $f$ .
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta  $y = c$  che interseca  $G$  in due punti distinti e le regioni finite di piano  $R$  e  $S$  che essa delimita con  $G$ . Precisamente:  $R$  delimitata dall'asse  $y$ , da  $G$  e dalla retta  $y = c$  e  $S$  delimitata da  $G$  e dalla retta  $y = c$ .
3. Determinate  $c$  in modo che  $R$  e  $S$  siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di  $G$  con la retta  $y = c$ ;
4. determinare la funzione  $g$  il cui grafico è simmetrico di  $G$  rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

$ABC$  è un triangolo rettangolo di ipotenusa  $BC$ .

1. Dimostrate che la mediana relativa a  $BC$  è congruente alla metà di  $BC$ .
2. Esprimete le misure dei cateti di  $ABC$  in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con  $BC = \sqrt{3}$  metri, determinate il cono  $K$  di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di  $K$ .
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono  $K$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Trovate due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.

Soluzione

2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

Soluzione

3. Date un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1, 3)$  e un minimo relativo in  $(-1, 2)$ .

Soluzione

4. Dimostrate che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione reale.

Soluzione

5. Di una funzione  $g(x)$ , non costante, si sa che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

Trovate una espressione di  $g(x)$ .

Soluzione

6. Verificate che le due funzioni  $f(x) = 3 \log x$  e  $g(x) = \log(2x)^3$  hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

Soluzione

7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente  $a$ ,  $b$  e  $\delta$ . Quale è il valore di  $\delta$  che massimizza l'area del triangolo?

Soluzione

8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

Soluzione

9. Calcolate:  $\int_0^1 \arcsen x \, dx$ .

Soluzione

10. Considerate gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ; quante sono le applicazioni (le funzioni) di  $A$  in  $B$ ?

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

La funzione  $f$  assegnata è una cubica di dominio  $\mathbb{R}$  che si può riscrivere nella forma

$$f(x) = 2x - 3x^3 = x(2 - 3x^2).$$

Da questa discende che

$$f(-x) = (-x)[2 - 3(-x)^2] = -x(2 - 3x^2) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

per cui appare una funzione dispari con il grafico  $G$  simmetrico rispetto all'origine  $O$  di un normale sistema cartesiano.

- Il segno,  $f(x) \geq 0$  dipende dai due fattori

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad 2 - 3x^2 \geq 0 \quad \implies \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

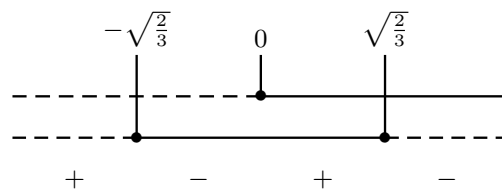


Fig. 1.

per cui si ha  $f(x) \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

- Lo studio dei limiti comporta l'analisi di  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  che si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( -3 + \frac{2}{x^2} \right) = \mp\infty$$

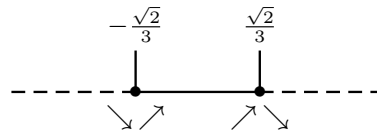
in quanto valgono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -3 + \frac{2}{x^2} = -3 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty.$$

Inoltre le cubiche non posseggono asintoti obliqui come conferma la ricerca di un eventuale coefficiente angolare basata sul limite

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 - 3x^2 = -\infty.$$

- Il calcolo della derivata prima fornisce  $f'(x) = 2 - 9x^2$  mentre lo studio del suo segno  $f'(x) \geq 0$  implica  $2 - 9x^2 \geq 0$  risolta da  $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

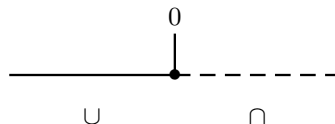


**Fig. 2.**

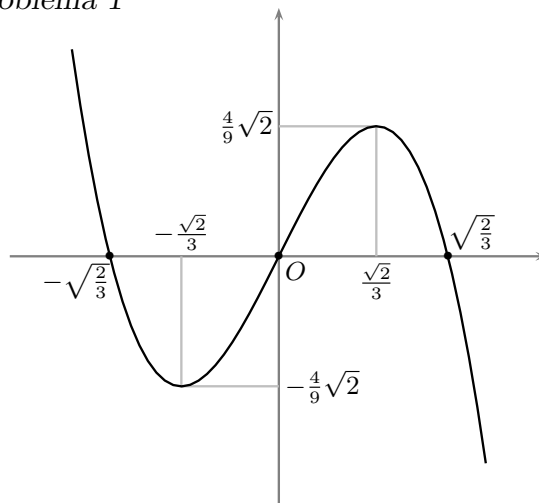
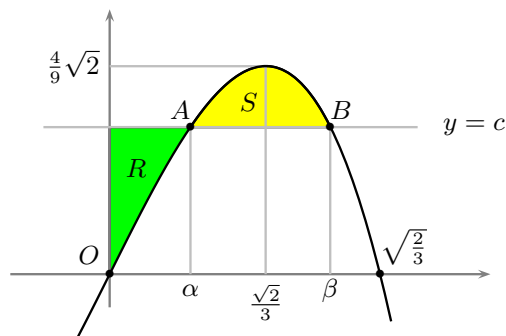
La funzione presenta quindi un massimo ed un minimo relativi propri. Il valore di  $f$  in corrispondenza del punto di massimo è

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{27} = \frac{4}{9}\sqrt{2}.$$

- La derivata seconda  $f''(x) = -18x \geq 0$  mostra che la concavità è rivolta verso l'alto quando  $x \leq 0$  cosicché il grafico  $G$  è rappresentato in fig. 4



**Fig. 3.**

Fig. 4. Grafico  $G$  della funzione  $f$ .Fig. 5. Regioni  $R$  e  $S$ .

2) La richiesta del secondo punto consiste nel riconoscere le due regioni  $R$  e  $S$ . La prima,  $R$ , delimitata dall'asse  $y$ , da  $G$  e dalla retta orizzontale  $y = c$  ed evidenziata in verde in fig. 5, la seconda  $S$ , delimitata da  $G$  e dalla retta  $y = c$  appare in giallo.

Al fine di determinare il parametro  $c$  (domanda 3 del testo) indichiamo con  $A$  e  $B$  i punti di intersezione della retta orizzontale con il grafico  $G$  e con  $\alpha$  e  $\beta$  le rispettive ascisse. Abbiamo pertanto

$$0 \leq c \leq \frac{4}{9}\sqrt{2} \quad A(\alpha, c), \quad B(\beta, c).$$

Le ascisse  $\alpha$  e  $\beta$  sono evidentemente le soluzioni dell'equazione  $2x - 3x^3 = c$  ottenuta dal sistema

$$\begin{cases} y = c \\ y = 2x - 3x^3 \end{cases} \quad (1)$$

quando  $0 \leq c \leq \frac{4}{9}\sqrt{2}$  con l'eliminazione di  $y$  ma, poiché la medesima retta incontra  $G$  pure in un ulteriore terzo punto di ascissa negativa, le incognite  $\alpha$  e  $\beta$  non rappresentano tutte le soluzioni dell'equazione. Comunque di certo risulta

$$2\alpha - 3\alpha^3 = c \quad 2\beta - 3\beta^3 = c.$$

Non potendo risolvere direttamente l'equazione  $3x^3 - 2x + c = 0$  in quanto di terzo grado e parametrica, non resta che porre la condizione dell'equivalenza delle aree delle regioni  $R$  e  $S$ .

3) Poiché l'area della regione  $S$  è espressa da

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_{\alpha}^{\beta} (2x - 3x^3 - c) dx = \left[ 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^4}{4} - cx \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4 - c\beta - \alpha^2 + \frac{3}{4}\alpha^4 + c\alpha \end{aligned}$$

mentre per  $R$  risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \int_0^{\alpha} [c - (2x - 3x^3)] dx = \int_0^{\alpha} (c - 2x + 3x^3) dx \\ &= \left[ cx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^{\alpha} = c\alpha - \alpha^2 + \frac{3}{4}\alpha^4 \end{aligned}$$

la condizione  $\mathcal{S} = \mathcal{R}$  si esplicita nell'equazione

$$\beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4 - c\beta - \alpha^2 + \frac{3}{4}\alpha^4 + c\alpha = c\alpha - \alpha^2 + \frac{3}{4}\alpha^4$$

da cui

$$-c\beta + \beta^2 - \frac{3}{4}\beta^4 = 0 \quad \text{per cui, se } \beta \neq 0,$$

abbiamo

$$c = \beta - \frac{3}{4}\beta^3.$$

Quest'ultima costituisce una seconda equazione nelle incognite  $c$  e  $\beta$  mentre la prima si era dedotta dal fatto che  $\beta$  doveva essere una soluzione del sistema (1). Possiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} c = 2\beta - 3\beta^3 \\ c = \beta - \frac{3}{4}\beta^3 \end{cases} \implies 2\beta - 3\beta^3 = \beta - \frac{3}{4}\beta^3$$

Ne discende  $\beta - \frac{9}{4}\beta^3 = 0$  da cui  $\beta = 0$  che è un valore privo di significato e

$$1 - \frac{9}{4}\beta^2 = 0 \implies \beta^2 = \frac{4}{9} \quad \beta = \pm \frac{2}{3}.$$

Di questi va accettato solo il valore positivo  $\beta = \frac{2}{3}$  in quanto la discussione ha luogo, come dice il testo, nel I quadrante. In corrispondenza il valore di  $c$  risulta

$$c = 2 \left( \frac{2}{3} \right) - 3 \left( \frac{2}{3} \right)^3 = \frac{4}{9}. \quad (2)$$

Rimane infine da determinare  $\alpha$  che, come **detto**, è soluzione di  $2x - 3x^3 = \frac{4}{9}$ . Poiché di questa equazione conosciamo ora la soluzione  $\beta = \frac{2}{3}$  possiamo con il metodo di Ruffini evidenziare un fattore di primo grado: pertanto da  $3x^3 - 2x + \frac{4}{9} = 0$  discende

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 0 & -2 & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{9} \\ \hline & 3 & 2 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}$$

per cui

$$3x^3 - 2x + \frac{4}{9} = \left( x - \frac{2}{3} \right) \cdot \left( 3x^2 + 2x - \frac{2}{3} \right) = 0.$$

Ne segue l'equazione

$$3x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0 \quad \text{risolta da} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3} :$$

scartata ancora la soluzione negativa, otteniamo infine  $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}}{3}$ .

4) Per determinare la funzione  $g$  simmetrica di  $f$  rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$ , valore trovato nel punto **precedente**, è sufficiente particularizzare le equazioni di una generica simmetria di asse  $y = c$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2c \end{cases}$$

oppure dedurle dalla condizione che il punto medio  $M$  del segmento  $PP'$  (fig. 6) appartenga all'asse di simmetria cioè

$$\begin{cases} x' = x \\ \frac{y + y'}{2} = c. \end{cases}$$

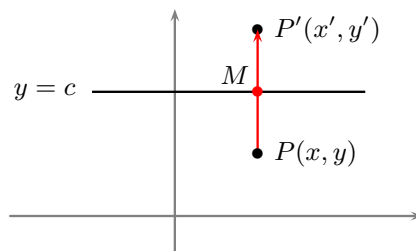


Fig. 6.

Si giunge quindi alla

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' + \frac{8}{9} \end{cases}$$

Sostituendo in  $y = 2x - 3x^3$  si ottiene

$$-y' + \frac{8}{9} = 2x' - 3(x')^3 \quad \implies \quad y' = 3(x')^3 - 2x' + \frac{8}{9}$$

ossia lasciando cadere gli indici,  $y = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$ . Nella figura 7 si rappresentano i grafici di  $f$  e  $g$  e la retta asse della simmetria.

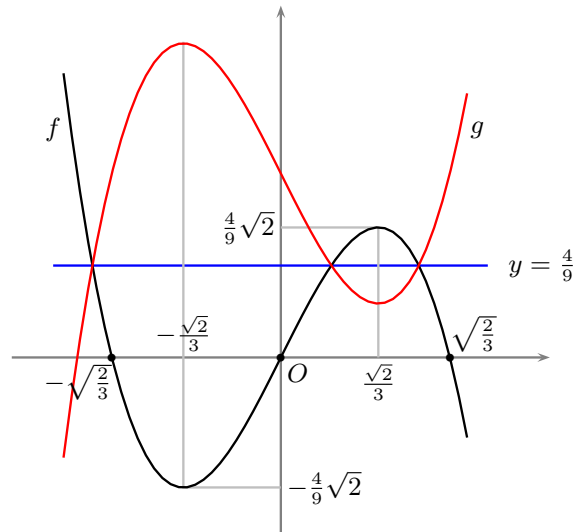


Fig. 7. Grafici delle funzioni  $f$  e  $g$ .

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1) Ci sono diversi modi per dimostrare la tesi che la mediana  $AM$  relativa all'ipotenusa  $BC$  di un triangolo rettangolo  $\triangle ABC$ , è congruente alla metà di  $BC$  cioè che  $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MC}$ , essendo  $M$  il punto medio di  $BC$ .

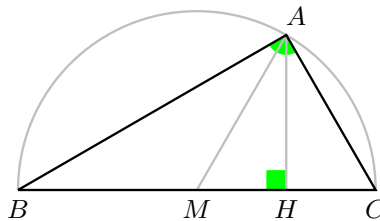


Fig. 1.

Si può partire dal fatto che  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$  per cui, con riferimento alla fig. 1, segue che  $\triangle ABC$  è inscritto in una semicirconferenza per cui  $\overline{BM} = \overline{MC}$  e quindi pure  $\overline{AM} = \overline{MC}$  in quanto raggi della medesima circonferenza.

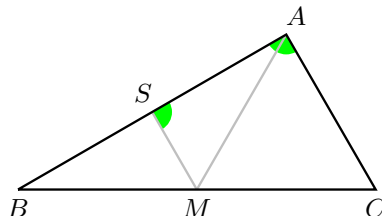


Fig. 2.

In alternativa (fig. 2), tracciata la parallela a  $AC$  per  $M$  e detta  $S$  la sua intersezione con  $AB$ , il teorema di Talete sulle rette parallele tagliate da due trasversali assicura che da  $\overline{BM} = \overline{MC}$  discende pure  $\overline{BS} = \overline{SA}$ . Ma  $\angle ASM = \frac{\pi}{2}$  per cui  $MS$  è mediana ed altezza di  $\triangle ABM$ . Quindi  $\triangle ABM$  è isoscele con  $\overline{BM} = \overline{AM}$ .

2) Posto per comodità la misura di  $\overline{BC} = 2a$  e  $\overline{AH} = h$  (fig. 1) con  $a$  e  $h$  parametri assegnati, per esprimere i cateti di  $\triangle ABC$  determiniamo in base al teorema di Pitagora  $\overline{MH}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AH}^2$  cioè

$$\overline{MH} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{a^2 - h^2}.$$

Ne segue che  $\overline{HC} = \overline{MC} - \overline{MH} = a - \sqrt{a^2 - h^2}$  per cui, per il secondo teorema di Euclide  $\overline{AC}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{BC}$  e quindi

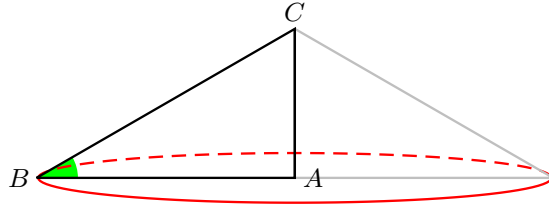
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{HC} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{2a \left( a - \sqrt{a^2 - h^2} \right)}.$$

Il teorema di Pitagora (o anche il secondo di Euclide) ora permette di ottenere

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4a^2 - \left( 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - h^2} \right)} \\ &= \sqrt{2a \left( a + \sqrt{a^2 - h^2} \right)} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}}. \end{aligned}$$

3) Posto  $\overline{BC} = 2a = \sqrt{3}$  m da cui  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$  m, continuiamo per comodità ad utilizzare il parametro  $a$  ed esprimiamo il volume del cono  $K$  di altezza  $AC$  e raggio di base  $AB$ . Con riferimento alla fig. 3, introduciamo una variabile angolare  $x = \angle ABC$ , con  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

Allora  $\overline{AB} = 2a \cos x$ ,  $\overline{AC} = 2a \sin x$  per le relazioni trigonometriche in un triangolo rettangolo e  $\overline{AH} = \overline{AB} \sin x = 2a \sin x \cos x$ . Il volume  $\mathcal{V}$  diviene ora



**Fig. 3.** Solido di rotazione (cono) di  $\triangle ABC$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \left( \pi \overline{AB}^2 \right) \overline{AC} \\ &= \frac{1}{3} \pi (2a \cos x)^2 \cdot 2a \sin x = \frac{8}{3} a^3 \pi \sin x \cos^2 x \end{aligned}$$

Con le condizioni geometriche abbiamo quindi

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \frac{8}{3} a^3 \pi \sin x \cos^2 x \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Passando al calcolo della derivata prima si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{8}{3} a^3 \pi [\cos x \cos^2 x + \sin x \cdot 2 \cos x (-\sin x)] \\ &= \frac{8}{3} a^3 \pi \cos x (\cos^2 x - 2 \sin^2 x) = \frac{8}{3} a^3 \pi \cos x (\cos^2 x - 2 + 2 \cos^2 x) \\ &= \frac{8}{3} a^3 \pi \cos x (3 \cos^2 x - 2) \end{aligned}$$

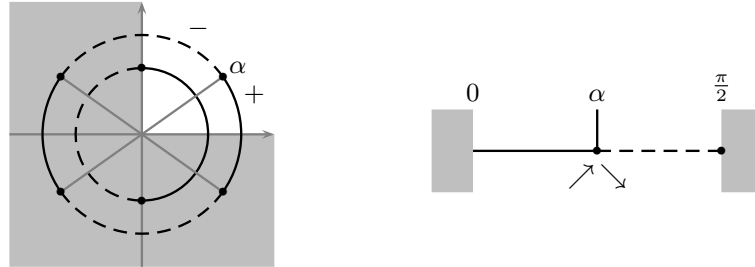
per cui il suo segno dipende dai fattori,

$$\begin{aligned} \cos x \geq 0 &\implies -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 3 \cos^2 x - 2 \geq 0 &\implies \cos^2 x \geq \frac{2}{3} \implies \cos x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \vee \quad \cos x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Posto  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$  ossia  $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35,26^\circ$ , le due ultime disequazioni elementari sono risolte per

$$-\alpha + k\pi \leq x \leq \alpha + k\pi.$$

Combinando i segni dei due termini (fig. 4) e considerando le limitazioni geometriche, ne deriva che  $\mathcal{V}' \geq 0$  se  $0 < x \leq \alpha$ .



**Fig. 4.** Segno di  $\mathcal{V}'$  in  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Il massimo del volume si ottiene quindi quando  $x = \alpha$  dove

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ne segue che la capacità del cono  $K$  risulta ( $a = \sqrt{3}/2$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{max} &= \frac{8}{3} a^3 \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9\sqrt{3}} \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \text{ metri}^3 \\ &= \frac{2\pi}{3} \text{ m}^3 = \frac{2\pi}{3} \times 10^3 \text{ litri} \approx 2094,39 \text{ litri.} \end{aligned}$$

Volendo invece sfruttare in parte quanto svolto nel punto precedente si può seguire un metodo risolutivo che sfrutta una variabile lineare anziché una angolare. Osservati quindi i risultati del punto precedente, converrà porre come incognita la misura (con segno) del segmento orientato  $MH$  ossia  $x = MH$  con  $-a \leq x \leq a$  e questo per evitare che, ponendo l'altezza  $h$  come incognita le relazioni si complichino eccessivamente data la presenza di radicali entro radicali. Ne segue immediatamente che

$$\overline{AB} = \sqrt{2a(a+x)} \quad \overline{AC} = \sqrt{2a(a-x)},$$

e il volume risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\pi}{3} \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC} = \frac{\pi}{3} [2a(a+x)] \cdot \sqrt{2a(a-x)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} (a+x) \sqrt{a-x}. \end{aligned}$$

Il calcolo di  $\mathcal{V}'$  conduce all'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} \left( \sqrt{a-x} - \frac{a+x}{2\sqrt{a-x}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} \left[ \frac{2(a-x) - a - x}{2\sqrt{a-x}} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} \left( \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}} \right). \end{aligned}$$

L'unico termine non positivo nell'ultima espressione è il numeratore del termine entro parentesi per cui sarà  $\mathcal{V}' \geq 0$  se  $a - 3x \geq 0$  cioè  $x \leq \frac{a}{3}$ .

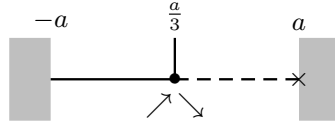


Fig. 5. Segno di  $\mathcal{V}'$ .

Il segno della derivata (fig. 5) mette quindi in evidenza come il volume  $\mathcal{V}$  sia crescente nell'intervallo  $[-a, \frac{a}{3}[$  e decrescente in  $] \frac{a}{3}, a[$ . Il volume massimo si ottiene in corrispondenza di  $x = \frac{a}{3}$  che comporta un valore per il volume

$$\mathcal{V}_{max} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a \sqrt{a} \cdot \frac{4}{3} a^2 \sqrt{\frac{2}{3} a} = \frac{16}{9\sqrt{3}} \pi a^3 = \frac{2\pi}{3} \text{ m}^3$$

coincidente con quanto già trovato.

4) Lo sviluppo piano della superficie laterale di un cono assume la forma di un settore circolare di raggio pari all'apotema del cono (fig. 6): nel nostro caso l'apotema risulta l'ipotenusa  $BC$  del triangolo originario rappresentato in fig. 3.

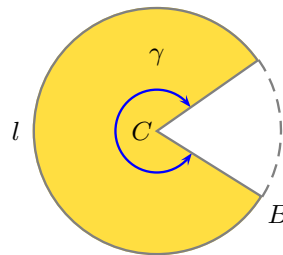


Fig. 6. Sviluppo piano della superficie laterale del cono  $K$ .

L'arco che definisce l'angolo al centro possiede lunghezza  $l$  pari alla circonferenza di base del cono  $K$  che, nel caso della discussione condotta con la variabile goniometrica è data da

$$l = 2\pi \cdot \overline{AB} = 2\pi(2a \cos \alpha) = 4\pi a \cos \alpha$$

dove  $\overline{AB}$  rappresenta il raggio di base del cono. Tenendo presente che la misura di un angolo in radianti è definita come il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio della circonferenza cui l'arco appartiene, l'angolo  $\gamma$  (in radianti) è espresso dal rapporto (fig. 6)

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{l}{BC} = \frac{2\pi \overline{AB}}{BC} = \frac{4\pi a \cos \alpha}{2a} \\ &= 2\pi \cos \alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 5,1302 \text{ radianti} \end{aligned}$$

per cui riportando tale valore in gradi decimali e sessagesimali abbiamo

$$\gamma \approx 5,1302 \text{ rad} = 293,9388^\circ = 293^\circ 56' 20''.$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Si tratta di risolvere l'equazione  $a+b = a \cdot b$  con la condizione  $a \neq b$  cioè il sistema

$$\begin{cases} a + b = a \cdot b \\ a \neq b. \end{cases}$$

Essendo questo costituito da un'unica equazione in due incognite, la sua soluzione generale sarà espressa da un insieme infinito di coppie  $(a, b)$  interpretabile come il grafico di una funzione nel piano cartesiano  $Oab$ .

Comunque procedendo algebricamente, esplicitiamo l'incognita  $b$ ,  $ab - b = a$  da cui  $b(a - 1) = a$  che per  $a = 1$  comporta l'assurdo  $0 = 1$ . Pertanto possiamo dividere per  $a \neq 1$  sapendo pure che  $a = 1$  non potrà essere soluzione dell'equazione. Si giunge alla

$$b = \frac{a}{a-1}.$$

La condizione  $a \neq b$  implica ora

$$a \neq b \implies a \neq \frac{a}{a-1} \implies a(a-1) \neq a,$$

ossia

$$a^2 - a \neq a, \quad a^2 - 2a \neq 0 \implies a \neq 0 \wedge a \neq 2.$$

Pertanto qualsiasi coppia  $(a, b)$  che soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} b = \frac{a}{a-1} \\ a \neq 0 \wedge a \neq 2 \end{cases}$$

è accettabile e risponde alle condizioni del testo.

Pur non richiesto, possiamo interpretare il risultato sopra nel piano cartesiano  $Oab$ : l'equazione ottenuta rappresenta una funzione omografica di asintoto verticale  $a = 1$  e asintoto orizzontale  $b = 1$ . Il suo grafico è quello di un'iperbole equilatera traslata che passa per l'origine  $O$  del sistema e dal quale sono esclusi i punti di ascissa nulla e pari a 2 (fig. 1). Nella figura sono inoltre evidenziate alcune coppie di punti  $(-2, \frac{2}{3})$ ,  $(3, \frac{3}{2})$ ,  $(5, \frac{5}{4})$  soluzioni del quesito.

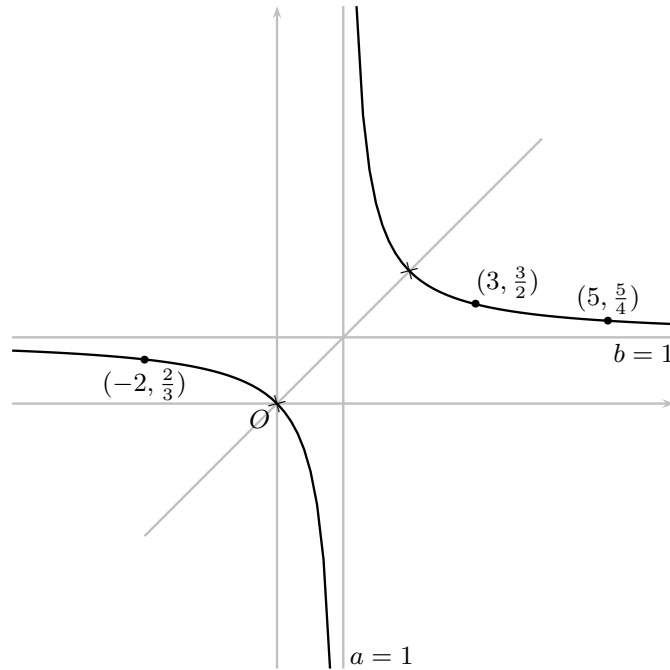


Fig. 1. Grafico dell'insieme risolutivo il quesito nel sistema  $Oab$ .

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Un cilindro equilatero è definito come un cilindro che possiede l'altezza  $h$  pari al diametro  $2r$  delle sue basi. Posto allora (fig. 1)  $\overline{HN} = r$ , è  $\overline{MN} = 2r = \overline{PN}$  per cui l'area totale sarà data da

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{cil} &= 2(\pi \cdot \overline{HN}^2) + (2\pi \cdot \overline{HN}) \cdot \overline{MN} \\ &= 2\pi r^2 + (2\pi r) \cdot (2r) = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 \\ &= 6\pi r^2. \end{aligned}$$

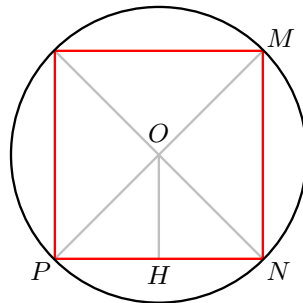


Fig. 1. Sezione piana del cilindro equilatero e della sfera.

Il raggio  $R$  della sfera circoscritta è invece  $R = \overline{OM} = \overline{ON} = r\sqrt{2}$  dato che la sezione del cilindro, ottenuta con un piano passante per il suo asse, forma un quadrato (fig. 1). L'area della superficie della sfera è pertanto

$$\mathcal{A}_{sf} = 4\pi R^2 = 4\pi(r\sqrt{2})^2 = 8\pi r^2$$

e il rapporto richiesto diviene

$$\frac{\mathcal{A}_{cil}}{\mathcal{A}_{sf}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

come volevasi dimostrare.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Tra le infinite possibilità di scelta che il quesito presenta, ci rivolgiamo all'ampia classe delle funzioni derivabili tra le quali le cubiche possono soddisfare le caratteristiche richieste potendo presentare sia un minimo che un massimo.

Identifichiamo quindi la funzione  $f(x)$  con una cubica, la cui equazione generale è  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . L'appartenenza dei punti  $A(1, 3)$  e  $B(-1, 2)$  a tale funzione comporta le due condizioni

$$\begin{cases} 3 = a + b + c + d \\ 2 = -a + b - c + d \end{cases}$$

mentre, calcolata la derivata prima  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$  e, dovendo questa essere nulla nei punti di estremo cioè  $f'(\pm 1) = 0$ , ne derivano altre due equazioni

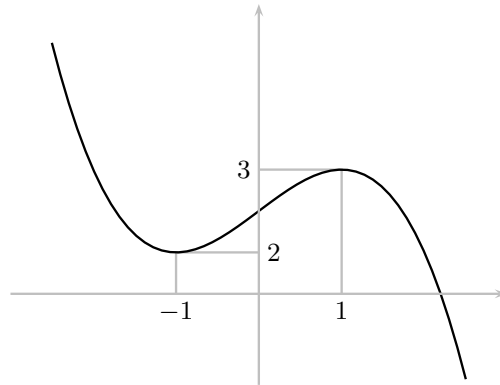
$$\begin{cases} 0 = 3a + 2b + c \\ 0 = 3a - 2b + c. \end{cases}$$

Dobbiamo pertanto risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3 = a + b + c + d \\ 2 = -a + b - c + d \\ 0 = 3a + 2b + c \\ 0 = 3a - 2b + c. \end{cases}$$

Sommando le prime due si ha  $5 = 2b + 2d$ , da cui  $d = \frac{5}{2} - b$ . Sommando la terza e quarta si ha  $6a + 2c = 0$  per cui  $c = -3a$  che, sostituita nella seconda equazione assieme all'espressione trovata per  $d$ , fornisce

$$2 = -a + b + 3a + \frac{5}{2} - b \implies 2a = 2 - \frac{5}{2} \quad a = -\frac{1}{4}$$



**Fig. 1.** Grafico di una funzione cubica con estremi in  $x = \pm 1$ .

e quindi

$$c = \frac{3}{4}, \quad 0 = 3 \left( -\frac{1}{4} \right) + 2b + \frac{3}{4} \implies b = 0$$

e infine,

$$2 = \frac{1}{4} + 0 - \frac{3}{4} + d \implies d = \frac{5}{2}.$$

Pertanto tra le parabole cubiche, la funzione  $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$  soddisfa alle condizioni del quesito:  $f(x)$  possiede inoltre il grafico riportato in figura 1.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

L'equazione  $e^x + 3x = 0$  si può riscrivere anche come  $e^x = -3x$ , per cui posto  $y = e^x$  e, per transitività pure  $y = -3x$  assume la forma definitiva

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -3x. \end{cases}$$

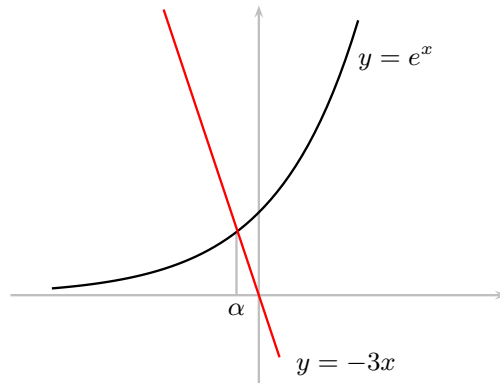
Ciò permette di interpretare le soluzioni dell'equazione originaria come le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle due funzioni note  $y = e^x$  e  $y = -3x$ . La prima è la funzione esponenziale di base naturale mentre la seconda esprime una retta passante per l'origine di coefficiente angolare  $-3$ . La figura 1 rappresenta i grafici di entrambe le funzioni e mette in evidenza come questi non possano che intersecarsi in un solo punto di ascissa  $\alpha$  negativa.

Alternativamente, posto  $f : y = e^x + 3x$  con  $x \in \mathbb{R}$ , osserviamo che i limiti agli estremi del dominio di tale funzione valgono

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty,$$

in quanto risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x = \pm\infty.$$



**Fig. 1.** Grafici delle funzioni  $y = e^x$  e  $y = -3x$ .

Poiché  $y' = e^x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , la funzione  $f$  risulta crescente e continua in tutto il suo dominio. Calcolata in  $x = 0$  vale  $f(0) = 1 > 0$  mentre in  $x = -1$  assume il valore  $f(-1) = e^{-1} - 3 < 0$ . Pertanto nell'intervallo chiuso  $[e^{-1} - 3, 0]$  è applicabile il teorema degli zeri delle funzioni continue che assicura l'esistenza di almeno un valore  $\alpha$  interno ad esso dove  $f(\alpha) = 0$ . Dato che  $f$  è pure monotona crescente nel medesimo intervallo, il valore  $\alpha$  è anche unico come assicura il teorema dell'esistenza della funzione inversa nell'ipotesi di funzioni continue e strettamente monotone in un intervallo. Difatti se esiste la funzione  $f^{-1}$  allora l'immagine di 0 secondo  $f^{-1}$  ossia  $\alpha = f^{-1}(0)$  dev'essere un unico valore. Con metodi numerici (si veda il quesito 9 dell'esame 2004 PNI) si può fornire una stima approssimata di  $\alpha$  ossia  $\alpha \approx -0,257628$ .

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Le condizioni espresse dal testo

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \\ g(2) = 4 \end{cases} \quad (1)$$

delineano una funzione  $g$  dotata di una discontinuità di terza specie o eliminabile in  $x = 2$  dato che i limiti destro e sinistro in 2 sono uguali e finiti mentre la funzione in tale punto assume un valore diverso. Tra le infinite possibili scelte potremmo rivolgerci ad una funzione definita in due insiemi: nel primo,  $\mathbb{R} - \{2\}$ ,  $g$  può pensarsi costituita da una qualsiasi funzione polinomiale di grado maggiore o eguale al primo, data la condizione che  $g$  non sia costante. Poiché un qualsiasi polinomio rappresenta una funzione continua in  $\mathbb{R}$  l'unica condizione da imporre è che il punto  $(2, 4)$  appartenga al grafico del polinomio scelto in  $\mathbb{R}$ .

Per  $x \neq 2$  scegliamo quindi un'espressione polinomiale di secondo grado,  $y = 3 + (x - 2)^2$  che manifestamente soddisfa a tali condizioni (ma avremmo potuto

scegliere anche  $y = 3 + (x - 2)^3$  e così via). In  $x = 2$  siamo invece obbligati a porre  $g(2) = 4$ . In definitiva, una scelta per  $g$  potrebbe essere

$$g : \begin{cases} y = 3 + (x - 2)^2 & \text{se } x \neq 2 \\ y = 4 & \text{se } x = 2: \end{cases}$$

in tal modo entrambe le condizioni di (1) appaiono soddisfatte: il grafico di  $g$  è riportato in figura 1.

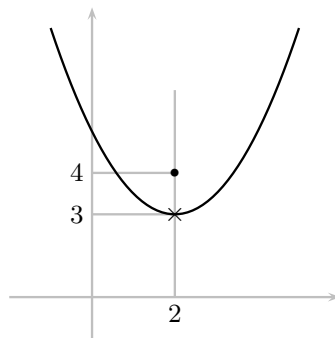


Fig. 1. Grafico di  $g$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il calcolo della derivata prima della funzione  $f(x) = 3 \ln x$  di dominio  $x > 0$  (intendiamo  $\log x = \ln x$ ) è immediato:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

Posta, per la  $g$ , la condizione  $(2x)^3 > 0$  soddisfatta ancora da  $x > 0$  risulta

$$g'(x) = \frac{1}{2x^3} \cdot D(2x^3) = \frac{1}{2x^3} \cdot 2 \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$$

che conferma l'uguaglianza  $f'(x) = g'(x)$ . La giustificazione sta nel fatto che, per un teorema sulle funzioni derivabili, le due funzioni differiscono per una costante. Difatti, in base alle proprietà dei logaritmi e nel dominio già individuato,  $g$  si può riscrivere come

$$g(x) = \ln(2x)^3 = 3 \ln(2x) = 3(\ln 2 + \ln x) = 3 \ln 2 + 3 \ln x$$

per cui si ha  $g(x) = 3 \ln 2 + f(x)$  ossia  $g(x) - f(x) = 3 \ln 2$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $a = \overline{AC}$ ,  $b = \overline{AB}$  e  $\delta = \angle BAC$  (fig. 1) l'area di  $\triangle ABC$  risulta espressa da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin \delta = \frac{1}{2} ab \sin \delta.$$

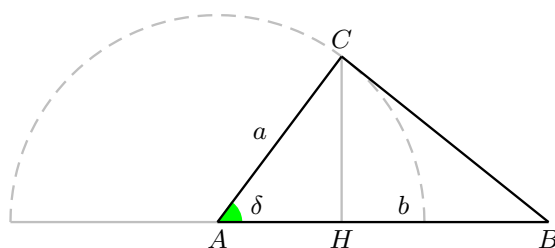


Fig. 1.

Poiché il vertice  $C$  potrà variare su una semicirconferenza di centro  $A$  e raggio  $a$ , l'angolo  $\delta$  assume solo i valori dell'intervallo  $0 \leq \delta \leq \pi$ . Evidentemente l'area è massima quando l'unico elemento variabile,  $\sin \delta$ , è massimo e ciò accade quando  $\sin \delta = 1$ . Pertanto l'unico valore accettabile è  $\delta = \frac{\pi}{2}$  e, in corrispondenza, il triangolo risulta rettangolo.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il grado *sessagesimale* si definisce come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro. I suoi sottomultipli sono il *primo*, sessantesima parte del grado e il *secondo*, sessantesima parte del primo.

Il *radiante* viene invece identificato come la misura dell'angolo al centro che sottende un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio.

Infine, il grado *centesimale* risulta la quattrocentesima parte dell'angolo giro.

Tra radianti e gradi sessagesimali si utilizza la proporzione

$$\frac{\alpha(\text{rad})}{\alpha^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \quad \text{che implica} \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha(\text{rad}).$$

Posto  $\alpha(\text{rad}) = 1$  discende che

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,2958^\circ \approx 57^\circ 17' 44,8063''.$$

Tra gradi sessagesimali (indicati nei calcolatori tascabili con *deg*) e gradi centesimali (*grad*) sussiste invece la relazione

$$\frac{\alpha(\text{grad})}{\alpha^\circ} = \frac{400}{360} \quad \text{che implica} \quad 1 \text{ grad} = 0,9^\circ = 0^\circ 54''.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

L'integrale definito

$$\int_0^1 \arcsen x \, dx$$

si può calcolare dopo aver determinato il corrispondente integrale indefinito. Questo si risolve procedendo per parti: di seguito presentiamo i due metodi principali.

a) Posto  $t = \arcsen x$  è pure  $x = \sen t$  e il differenziale risulta  $dx = \cos t \, dt$ . L'integrale iniziale si riscrive quindi come

$$\int \arcsen x \, dx = \int t \cos t \, dt$$

Identificato  $\cos t \, dt$  come il fattore differenziale avente per integrale  $\sen t$ , l'applicazione della regola per parti comporta

$$\int t \cos t \, dt = t \sen t - \int \sen t \, dt = t \sen t + \cos t + c.$$

Ritornando alla variabile originaria  $x$  e ricordato che  $\cos t = \sqrt{1 - \sen^2 t}$  ( $x \in [0, 1]$  e  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) giungiamo infine all'insieme di primitive

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2} + c.$$

b) Il medesimo risultato viene fornito procedendo per parti dopo aver identificato il fattore differenziale con  $dx$ . Abbiamo in tal caso

$$\begin{aligned} \int \arcsen x \, dx &= x \arcsen x - \int D(\arcsen x) \, dx \\ &= x \arcsen x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \\ &= x \arcsen x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Posto ora  $x^2 = t$  per cui  $dt = 2x \, dx$ , risulta

$$\begin{aligned} \int \arcsen x \, dx &= x \arcsen x - \int \frac{\frac{1}{2} \, dt}{\sqrt{1 - t}} \\ &= x \arcsen x - \frac{1}{2} \int (1 - t)^{-\frac{1}{2}} \, dt \\ &= x \arcsen x + \frac{1}{2} \int (1 - t)^{-\frac{1}{2}} (-dt) \end{aligned}$$

e dato che  $d(1 - t) = -dt$ , si ha

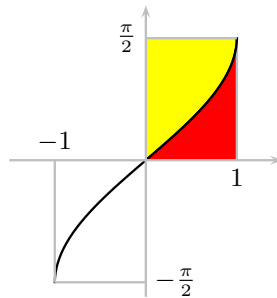
$$\begin{aligned}
 &= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c \\
 &= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c.
 \end{aligned}$$

Il valore dell'integrale definito discende ora immediatamente:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx &= \left[ x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 \\
 &= 1 \operatorname{arcsen} 1 + \sqrt{1-1} - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

In alternativa, tenendo presente che l'integrale definito esprime anche l'area (con segno) del trapezoide compreso tra la funzione  $\operatorname{arcsen} x$  e l'asse delle ascisse (in rosso in fig. 1), il valore richiesto si può ottenere sottraendo dal rettangolo con i lati di lunghezza 1 e  $\frac{\pi}{2}$ , l'area  $\mathcal{A}$  della regione rappresentata in giallo in fig. 1 e fornita dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx.$$



**Fig. 1.** Area richiesta.

In tal caso i calcoli si riducono a

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -0 + 1 = 1$$

e quindi

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx = \left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \mathcal{A} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Indicata con  $f$  una generica funzione di  $A$  in  $B$  con  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ , la definizione di funzione

$$f : A \rightarrow B \iff \forall x \in A, \exists! y \in B \text{ tale che } y = f(x)$$

chiarisce come debbano essere coinvolti tutti gli elementi di  $A$  mentre quelli di  $B$  non lo sono necessariamente. Si tratta quindi di mettere in corrispondenza gli stessi 4 elementi di  $A$  con quelli di  $B$  anche ripetendo lo stesso elemento. Per esempio, ciascuno dei blocchi presentati di seguito è rappresentativo di una diversa funzione.

$a$	$a$	$a$	$b$
1	2	3	4

$a$	$a$	$b$	$a$
1	2	3	4

$a$	$b$	$a$	$a$
1	2	3	4

$b$	$a$	$a$	$a$
1	2	3	4

...

Il numero totale di questi gruppi è pertanto il numero delle disposizioni di 3 oggetti in gruppi di 4, potendo gli oggetti (3 nel nostro caso) essere ripetuti. Dalla teoria del calcolo combinatorio questi gruppi formano le disposizioni con ripetizione e il loro numero è dato da

$$D'_{n,k} = n^k$$

essendo  $n$  il numero degli oggetti a disposizione distinti e  $k$  il numero degli elementi compresi in ogni gruppo.

Nel nostro caso abbiamo quindi  $D'_{3,4} = 3^4 = 81$ .

# ESAME 2004 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Sia  $\gamma$  la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove  $k$  e  $\lambda$  sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni  $\gamma$ ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse  $x$  e i vertici del lato opposto su  $\gamma$ ;
3. sapendo che  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  e assumendo  $\lambda = \frac{1}{2}$ , si trovi il valore da attribuire a  $k$  affinché l'area compresa tra  $\gamma$  e l'asse  $x$  sia 1;
4. per i valori di  $k$  e  $\lambda$  sopra attribuiti,  $\gamma$  è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da Karl Friedrich Gauss, 1777–1855). Una *media*  $\mu \neq 0$  e uno *scarto quadratico medio*  $\sigma \neq 1$  come modificano l'equazione e il grafico?

Soluzione

## • Problema n. 2

Sia  $f$  la funzione così definita:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{2b} x + x$$

con  $a$  e  $b$  numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti  $a$  e  $b$ , esiste sempre un valore di  $x$  tale che  $f(x) = \frac{a+b}{2}$ .
2. Si consideri la funzione  $g$  ottenuta dalla  $f$  ponendo  $a = 2b = 2$ . Si studi  $g$  e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per  $x > 0$  il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca

una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

Soluzione

### Questionario

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

Soluzione

2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

Soluzione

3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?

Soluzione

4. Dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$  quante sono le applicazioni (le funzioni) di  $A$  in  $B$ ?

Soluzione

5. Dare un esempio di funzione  $g$ , non costante, tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

Soluzione

6. Dare un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1, 3)$  e un minimo relativo in  $(-1, 2)$ .

Soluzione

7. Tra i triangoli di base assegnata e di ugual area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

Soluzione

8. Si trovino due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.

Soluzione

9. Si dimostri che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimativo utilizzando un metodo iterativo a scelta.

Soluzione

10. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x\sqrt{3} - y \\ y &\rightarrow x + y\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Di quale trasformazione si tratta?

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1) Come detto più avanti nel testo del problema, la curva  $\gamma$  di equazione

$$\gamma : y = ke^{-\lambda x^2} \quad \text{con } k > 0 \text{ e } \lambda > 0$$

è rappresentativa di un insieme di curve ben conosciute tra le quali rientra la gaussiana standard. Studiamone le proprietà.

• Il dominio di  $\gamma$  coincide con  $\mathbb{R}$  e, in questo dominio, la funzione che la rappresenta è simmetrica pari in quanto

$$f(-x) = ke^{-\lambda(-x)^2} = ke^{-\lambda x^2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suo grafico sarà quindi simmetrico rispetto all'asse delle  $y$ .

• Segno:  $f(x) > 0$  implica  $ke^{-\lambda x^2} > 0$  che, essendo  $k > 0$  così come per le proprietà dell'esponenziale  $e^{-\lambda x^2} > 0$ , è soddisfatta  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- La funzione è continua in tutto il dominio essendo composta di funzioni continue ( $e^z$  e  $z = -\lambda x^2$ ) e i suoi limiti agli estremi di  $\mathbb{R}$  sono:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k e^{-\lambda x^2} = 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\lambda x^2} = \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0$$

avendo posto  $z = -\lambda x^2$ . L'asse delle ascisse è pertanto un asintoto orizzontale per  $\gamma$ .

- Il calcolo della derivata prima fornisce

$$y' = k \left[ e^{-\lambda x^2} \cdot (-2\lambda x) \right] = -2x(\lambda k) \cdot e^{-\lambda x^2}$$

e la condizione di positività  $y' \geq 0$  implica  $-2x \leq 0$  cioè  $x \leq 0$ . Il segno di  $y'$  è riassunto in fig. 1 e questo mostra come il punto  $x = 0$  debba essere un punto di massimo assoluto per  $\gamma$ .

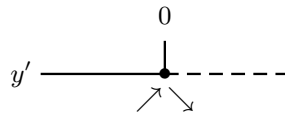


Fig. 1.

- La derivata seconda risulta

$$\begin{aligned} y'' &= D \left[ (-2k\lambda x) \cdot e^{-\lambda x^2} \right] \\ &= -2k\lambda \left[ e^{-\lambda x^2} + x \cdot (-2\lambda x) e^{-\lambda x^2} \right] \\ &= 2e^{-\lambda x^2} \cdot k\lambda(-1 + 2\lambda x^2) \end{aligned}$$

e  $y'' \geq 0$  comporta lo studio di  $-1 + 2\lambda x^2 \geq 0$  essendo tutti i rimanenti fattori positivi. Ne segue

$$2\lambda x^2 \geq 1, \quad x^2 \geq \frac{1}{2\lambda} \quad \Longrightarrow \quad x \leq -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

Il segno complessivo appare in fig. 2 assieme alla disposizione delle concavità. Queste sono rivolte verso la direzione negativa dell'asse  $y$  quando  $x$  è interno all'intervallo  $\left[-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right]$ .

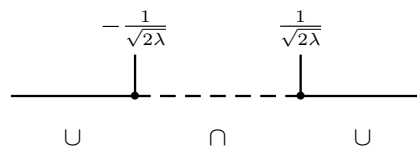
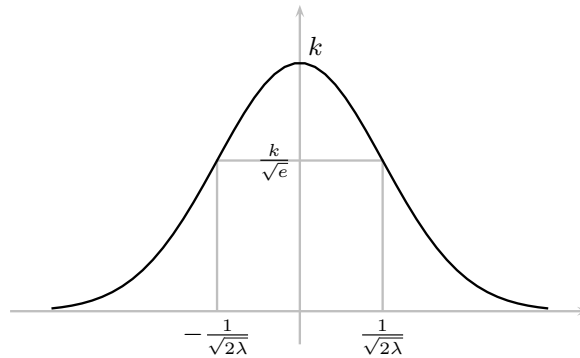


Fig. 2.

Le ascisse dei punti di flesso sono  $x = \pm 1/\sqrt{2\lambda}$  e le corrispondenti ordinate valgono

$$y\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) = k \cdot e^{-\frac{\lambda}{2\lambda}} = ke^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{e}}.$$

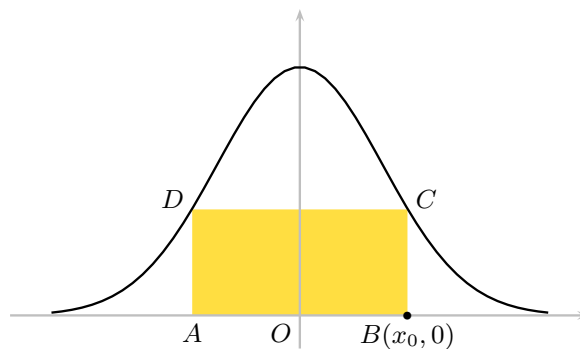
Notato che  $y(0) = k$ , proponiamo il grafico di  $\gamma$  nella figura 3.



**Fig. 3.** Grafico di  $\gamma$ .

2) Il rettangolo di cui si chiede l'area massima appare in fig. 4. Determiniamo l'area  $\mathcal{A}$  in funzione dell'ascissa  $x_0 \geq 0$  di  $B$ : per la simmetria già notata è quindi  $A(-x_0, 0)$  mentre l'ordinata di  $C$  risulta  $y_C = ke^{-\lambda x_0^2}$ . Poiché  $\mathcal{A} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2\overline{OB} \cdot \overline{BC}$  abbiamo

$$\mathcal{A}(x_0) = 2x_0 \cdot (ke^{-\lambda x_0^2}) = 2k(x_0 \cdot e^{-\lambda x_0^2}) \quad \wedge \quad x_0 \geq 0.$$



**Fig. 4.** Rettangolo compreso tra  $\gamma$  e l'asse  $x$ .

Uno studio di carattere geometrico agli estremi dell'insieme di variabilità  $[0, +\infty[$  di  $x_0$  suggerisce con evidenza che se  $x_0 = 0$  allora  $\mathcal{A} = 0$  così come,  $\mathcal{A}(x_0) \rightarrow 0$

se  $x_0 \rightarrow +\infty$  (seppur con minor evidenza). Passando comunque allo studio della derivata prima  $\mathcal{A}'$  abbiamo

$$\mathcal{A}'(x_0) = 2k \left[ e^{-\lambda x_0^2} + x_0(-2\lambda x_0)e^{-\lambda x_0^2} \right]$$

da cui

$$\mathcal{A}'(x_0) = 2ke^{-\lambda x_0^2} (1 - 2\lambda x_0^2)$$

la condizione  $\mathcal{A}' \geq 0$  implica lo studio del fattore  $1 - 2\lambda x_0^2 \geq 0$  in quanto il primo fattore è certamente positivo. Ne segue ( $\lambda > 0$ )

$$x_0^2 \leq \frac{1}{2\lambda} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

La **rappresentazione** grafica del segno di  $\mathcal{A}'$  mostra un andamento crescente dell'area per  $x_0 \in [0, \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}[$  e decrescente se  $x_0 > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ . Il massimo dell'area viene raggiunto in corrispondenza di  $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ .

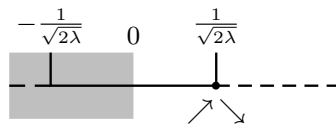


Fig. 5. Segno di  $\mathcal{A}'$ .

3) Assunto  $\lambda = \frac{1}{2}$  e sapendo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (1)$$

dovremo riportare la condizione (che viene detta “di normalizzazione”) sull’area compresa tra  $\gamma$  e l’asse  $x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-x^2/2} dx = 1$$

in una forma simile alla (1). A tal fine, riscritta per comodità la condizione precedente in termini della variabile muta  $t$  anziché di  $x$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-x^2/2} dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-t^2/2} dt = 1,$$

poniamo  $t^2/2 = x^2$  cioè  $x = t/\sqrt{2}$ ,  $t = x\sqrt{2}$ , sostituzione che implica il legame tra differenziali  $dt = \sqrt{2}dx$ . Poiché inoltre se  $t \rightarrow \infty$  è anche  $x \rightarrow \infty$  discende

$$k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \sqrt{2} dx = k\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Possiamo ora per l'integrazione sfruttare il valore fornito dalla (1) cosicché l'ultima espressione diviene

$$\sqrt{2} \cdot k \cdot \sqrt{\pi} = 1 \quad \text{da cui} \quad k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4) Con i valori  $\lambda = \frac{1}{2}$  e  $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  l'equazione di  $\gamma$  risulta

$$\gamma : y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

che costituisce l'equazione di una curva gaussiana standard corrispondente ad una media  $\mu = 0$  e scarto quadratico medio o deviazione standard  $\sigma = 1$ . Il valore del massimo è, per quanto visto,  $y_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  raggiunto in  $x = 0$ , mentre i punti di flesso possiedono ascisse

$$x = \pm \frac{1}{2\lambda} = \pm 1.$$

Se  $\mu \neq 0$  e  $\sigma \neq 1$ , l'equazione della gaussiana diviene

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Le coordinate del punto di massimo sono

$$M\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

mentre i punti di flesso sono in tal caso  $x = \mu \pm \sigma$ . Le corrispondenti ordinate risultano

$$y(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}.$$

Il grafico subisce le variazioni discusse nei punti seguenti:

- a)  $\mu \neq 0$  e  $\sigma = 1$ . Il grafico risulta traslato orizzontalmente di un tratto pari a  $\mu$  rispetto alla gaussiana standard. Pertanto risulta simmetrico rispetto alla retta  $x = \mu$  (fig. 6)
- b) Se invece  $\sigma > 1$ , la gaussiana risulta allargata orizzontalmente in quanto l'ampiezza dell'intervallo con estremi le ascisse dei suoi **punti di flesso** aumenta proporzionalmente dato che questa risulta pari a  $2\sigma$ . Per la condizione di normalizzazione (il valore dell'area sottostante alla curva dev'essere sempre unitario) l'ordinata del massimo deve diminuire. Difatti essa diminuisce in proporzione

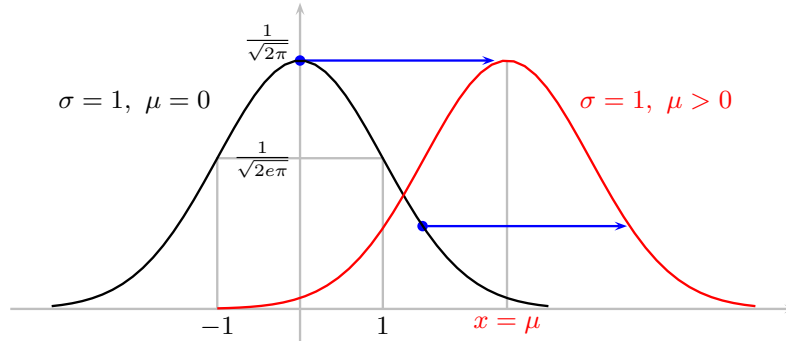


Fig. 6. Azione su  $\gamma$  quando  $\mu \neq 0$ .

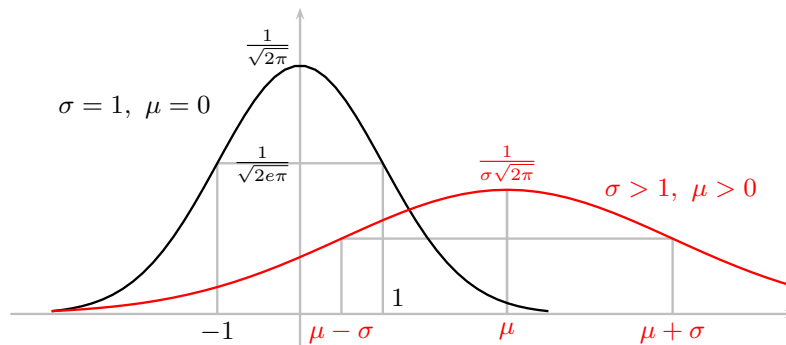


Fig. 7. Azione su  $\gamma$  quando  $\mu \neq 0$  e  $\sigma > 1$ .

inversa a  $\sigma$  in quanto, **come visto**, vale  $y_M = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ . Una esemplificazione di tali variazioni appare nei grafici di fig. 7.

c) Se, infine,  $0 < \sigma < 1$ , il grafico (fig. 8) appare sempre simmetrico rispetto alla retta  $x = \mu$  ma l'ampiezza dell'intervallo definito dai punti di flesso diminuisce e il valore del massimo aumenta. In sostanza la curva si restringe attorno al valor medio  $\mu$ .

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

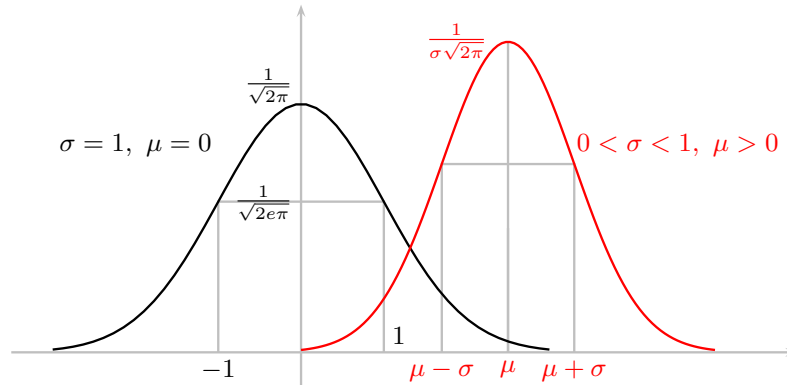
La funzione assegnata

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x \quad D = \mathbb{R} \quad \wedge \quad a, b \neq 0$$

possiede il dominio  $D = \mathbb{R}$  in quanto costituita dalla somma di un termine di primo grado con il prodotto delle funzioni seno e coseno, tutte e tre definite in  $\mathbb{R}$ .

Notiamo innanzitutto che il calcolo di  $f$  in  $a$  fornisce

$$f(a) = \operatorname{sen}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2b}a\right) + a = 0 + a = a$$



**Fig. 8.** Azione su  $\gamma$  quando  $\mu \neq 0$  e  $0 < \sigma < 1$ .

mentre in  $x = b$ ,

$$f(b) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{a} b \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + b = 0 + b = b,$$

per cui, agli estremi dell'intervallo  $[a, b]$  di  $x$  (abbiamo assunto che  $a < b$ ), la funzione assume gli stessi valori della variabile indipendente. In sostanza i punti  $(a, a)$  e  $(b, b)$  appartengono al grafico della funzione (così come alla bisettrice del I e III quadrante).

Poiché  $f(x)$  è somma di  $x$ , funzione come detto definita in  $\mathbb{R}$  e ivi continua, e di  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{\pi}{2b} x \right)$ , termine ottenuto dal prodotto di funzioni continue,  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{a} x \right)$  e  $\cos \left( \frac{\pi}{2b} x \right)$ , in quanto ciascun fattore risulta dalla composizione di funzioni continue, ne discende che  $f(x)$  è a sua volta continua in  $[a, b]$  (ma pure in tutto  $\mathbb{R}$ ).

Il teorema di *esistenza dei valori intermedi* nell'ipotesi che  $f$  sia una funzione continua in un intervallo chiuso  $[a, b]$ , assicura che  $f$  assuma tutti i valori compresi tra il suo minimo  $m$  e il suo massimo  $M$ . Ora poiché possiamo supporre valide in  $[a, b]$  le disequaglianze

$$m \leq f(a) \leq M \quad m \leq f(b) \leq M$$

assieme alla relazione

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b,$$

diretta conseguenza di  $a < b$ , per **quanto osservato** circa i valori agli estremi della funzione, quest'ultima si può riscrivere come

$$f(a) \leq \frac{a+b}{2} \leq f(b).$$

Ma per le precedenti è anche

$$m \leq f(a) \leq \frac{a+b}{2} \leq f(b) \leq M$$

per cui il valore  $(a+b)/2$  risulta certamente compreso tra il minimo e il massimo di  $f$  in  $[a, b]$ . Possiamo pertanto concludere in base al teorema enunciato che deve esistere almeno un valore  $c$  della variabile indipendente tale che

$$f(c) = \frac{a+b}{2} \quad \text{con } c \in [a, b].$$

2) Posto  $a = 2b = 2$  la funzione  $g$  da studiare risulta

$$g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x) + x \quad x \in \mathbb{R}$$

dove si è sfruttata l'identità goniometrica  $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ . L'ultima forma mostra come la  $g$  sia somma di due funzioni note,  $h(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x)$  e  $i(x) = x$ . La prima risulta una funzione sinusoidale di ampiezza  $\frac{1}{2}$  e periodicità  $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$  in quanto vale l'identità in  $\mathbb{R}$

$$h(x+2) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi(x+2) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x + 2\pi) = h(x).$$

Sommata alla funzione identità,  $i(x) = x$ , possiamo intuire il possibile grafico di  $g(x)$ : questo dovrebbe mostrare delle oscillazioni attorno alla bisettrice dei I e III quadrante intersecandola nei punti di ascissa  $x = k$  con  $k \in \mathbb{Z}$  dove  $h(k) = 0$ . Procediamo comunque con lo studio formale.

• Dato che

$$g(-x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}[\pi(-x)] + (-x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x) - x = -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la funzione risulta dispari ed è quindi simmetrica rispetto all'origine.

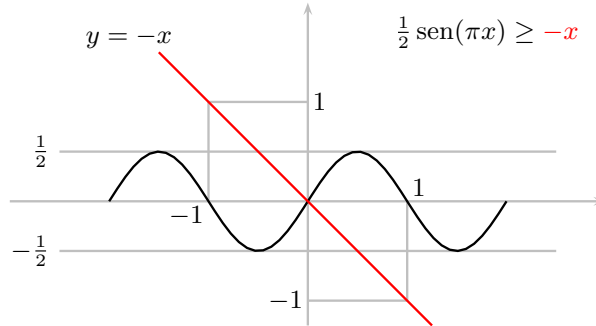
•  $g(x)$  non è periodica in quanto

$$g(x+2) = h(x+2) + (x+2) = h(x) + x + 2 \neq g(x).$$

• Lo studio del segno di  $g$  implica la risoluzione della disequazione  $g(x) \geq 0$  ossia di

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x) + x \geq 0 \quad \implies \quad \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x) \geq -x$$

che non può essere risolta con metodi analitici dato che presenta sia funzioni razionali che trascendenti. L'ultima disequazione si può comunque interpretare



**Fig. 1.** Interpretazione grafica della disequazione  $\frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) \geq -x$ .

graficamente come il confronto tra i grafici della funzione **già discussa**  $h(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x)$  con la retta  $y_2 = -x$ , entrambi noti (fig. 1)

Notato che i grafici si intersecano nell'origine e che per  $x = 1$  risulta  $y_2(1) = -1$  quando il minimo di  $h(x)$  vale  $-\frac{1}{2}$ , concludiamo che  $g(x) \geq 0$  per  $x \geq 0$ .

• Essendo  $g$  continua in tutto  $\mathbb{R}$  dobbiamo calcolare solo i limiti all'infinito

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x).$$

Dato che  $-1 \leq \text{sen}(\pi x) \leq 1$  la divisione per 2 comporta pure

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) \leq \frac{1}{2}$$

per cui, sommando  $x$  a tutti i membri, si ottiene che la funzione  $g$  soddisfa alle disuguaglianze

$$-\frac{1}{2} + x \leq \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) + x \leq \frac{1}{2} + x \quad -\frac{1}{2} + x \leq g(x) \leq \frac{1}{2} + x.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \mp \frac{1}{2} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \mp \frac{1}{2} = +\infty,$$

possiamo affermare in base al teorema del confronto che dev'essere pure

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty.$$

Questo risultato potrebbe suggerire la presenza per la  $g$  di asintoti obliqui: pertanto va studiato il limite

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{sen}(\pi x)}{2x} + 1.$$

Ancora per le limitazioni già viste, valgono le disuguaglianze (consideriamo  $x > 0$ )

$$-\frac{1}{2x} \leq \frac{\text{sen}(\pi x)}{2x} \leq \frac{1}{2x};$$

assieme al limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{1}{2x} = 0,$$

il teorema del confronto permette di concludere ancora che

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{sen}(\pi x)}{2x} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Il limite per  $q$  è invece

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) + x \right] - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} \text{sen}(\pi x) = \overline{\neq}$$

ma tale limite non esiste in quanto la funzione ad argomento è periodica. Non vi possono essere pertanto asintoti obliqui.

- Il calcolo della derivata prima fornisce

$$g'(x) = \frac{1}{2}\pi \cos(\pi x) + 1 = \frac{\pi}{2} \cos(\pi x) + 1$$

per cui  $g'(x) \geq 0$  se

$$\frac{\pi}{2} \cos(\pi x) + 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos(\pi x) \geq -\frac{2}{\pi};$$

posto

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) \approx 2,2609 = 129,54^\circ,$$

discende (fig. 2)

$$-\alpha + 2k\pi \leq \pi x \leq \alpha + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\alpha}{\pi} + 2k \leq x \leq \frac{\alpha}{\pi} + 2k.$$

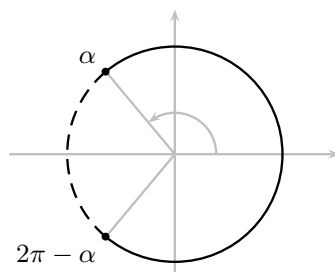


Fig. 2.

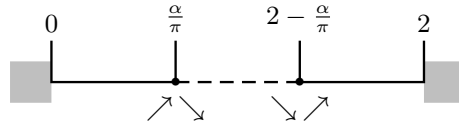


Fig. 3.

Per  $x \in [0, 2]$  il segno della  $g'$  è rappresentato in fig. 3 dove appaiono pure le indicazioni di crescita e decrescenza.

• La derivata seconda risulta

$$g''(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \pi \operatorname{sen}(\pi x) = -\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen}(\pi x)$$

e la condizione  $g''(x) \geq 0$  comporta  $-\operatorname{sen}(\pi x) \geq 0$  e quindi  $\operatorname{sen}(\pi x) \leq 0$ . Questa è risolta dagli intervalli

$$\pi + 2k\pi \leq \pi x \leq 2\pi + 2k\pi \implies 1 + 2k \leq x \leq 2 + 2k \quad k \in \mathbb{Z} :$$

in fig. 4 si riporta il segno di  $g''(x)$  e la disposizione delle concavità nell'intervallo  $[0, 2]$ . **Ricordando** che nei punti  $x = k$  la  $g(x)$  interseca la retta  $y = x$ , riportiamo in conclusione il suo grafico nella figura 5.

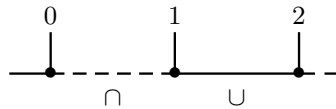


Fig. 4.

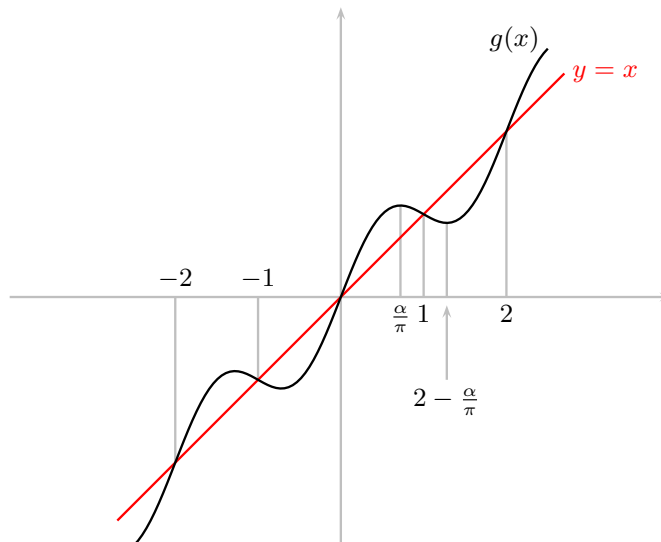


Fig. 5. Grafico di  $g(x)$ .

3) Il primo punto di massimo relativo che soddisfa alla  $x > 0$  possiede ascissa  $x_M = \frac{\alpha}{\pi}$  (fig. 3) e ivi la derivata prima si annulla ossia

$$g'(x_M) = \frac{\pi}{2} \cos(\pi x_M) + 1 = 0$$

o, in forma equivalente

$$\pi \cos(\pi x_M) + 2 = 0.$$

Il valore  $x_M$  soddisfa quindi all'equazione  $\pi \cos(\pi x) + 2 = 0$  e, per la stima **data** di  $\alpha$  e pure per lo studio fatto delle derivate di  $g$ , certamente risulta  $0 < x_M < 1$ . Per valutare  $x_M$  con una approssimazione migliore, scegliamo di applicare il metodo di bisezione alla funzione  $f(x) = \pi \cos(\pi x) + 2$  in quanto cerchiamo una sua soluzione in  $[0, 1]$ .

Notato che

$$f(0) = \pi + 2 > 0 \quad \wedge \quad f(1) = \pi \cos \pi + 2 = 2 - \pi < 0,$$

calcoliamo la  $f$  nel punto medio di questo intervallo: risulta

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \cos \frac{\pi}{2} + 2 = 2 > 0$$

per cui segue che

$$\frac{1}{2} < x_M < 1.$$

Procedendo allo stesso modo:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\frac{1}{2} + 1}{2}\right) &= f\left(\frac{3}{4}\right) = \pi \cos \frac{3}{4}\pi + 2 \approx -0,22 \implies \frac{1}{2} < x_M < \frac{3}{4} \\ f\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2}\right) &= f\left(\frac{5}{8}\right) \approx 0,79 \implies \frac{5}{8} < x_M < \frac{3}{4} \\ f\left(\frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{4}}{2}\right) &= f\left(\frac{11}{16}\right) \approx 0,25 \implies \frac{11}{16} < x_M < \frac{3}{4} \\ f\left(\frac{\frac{11}{16} + \frac{3}{4}}{2}\right) &= f\left(\frac{23}{32}\right) \approx 0,0069 \implies \frac{23}{32} < x_M < \frac{3}{4} \\ f\left(\frac{\frac{23}{32} + \frac{3}{4}}{2}\right) &= f\left(\frac{47}{64}\right) \approx -0,1098 \implies \frac{23}{32} < x_M < \frac{47}{64} \end{aligned}$$

Quest'ultima implica  $0,71875 < x_M < 0,7344$  e cioè  $x_M \approx 0,7$ . Procedendo ulteriormente si trova  $x_M \approx 0,719668$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 8.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 2.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Se il rapporto di similitudine tra lunghezze di segmenti è pari a 3, in generale  $s$ , allora le aree di figure simili stanno nel rapporto  $s^2$  e i volumi nel rapporto  $s^3$ . Risulta quindi

$$\frac{l'}{l} = s = 3 \implies \frac{A'}{A} = s^2 = 9 \implies \frac{V'}{V} = s^3 = 27.$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 10.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 5.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 3.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Supposte date le lunghezze della base  $AB$  e dell'altezza  $AH$  (fig. 1) in quanto l'area risulta costante  $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \text{cost.}$ , si tratta di dimostrare che

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2p$$

è minimo quando  $\triangle ABC$  è isoscele ossia  $\overline{AC} = \overline{BC}$ . Poiché la lunghezza di  $AB$ , come detto, è ritenuta assegnata, è sufficiente trovare il minimo della somma  $\overline{AC} + \overline{BC}$ .

Seguendo un approccio geometrico elementare, sia  $A'$  il punto simmetrico di  $A$  rispetto alla retta  $r$  parallela alla base  $AB$  e passante per  $C$ . Risulta

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A'C} + \overline{BC}.$$

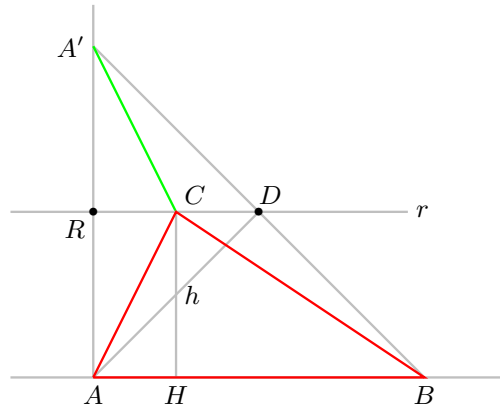


Fig. 1.

Evidentemente la somma  $\overline{AC} + \overline{BC}$  è minima quando  $C$  appartiene al segmento  $A'B$  ossia quando  $C \equiv D$ . In tal caso, dal fatto che  $\overline{A'R} = \overline{RA}$  e che la retta  $r$  è parallela ad  $AB$ , discende (teorema di Talete) che pure  $\overline{A'D} = \overline{DB}$ , per cui  $D$  è il punto medio di  $A'B$ , ipotenusa del triangolo rettangolo  $A'AB$ . Sempre nell'ipotesi  $C \equiv D$ ,  $AC$  appare la mediana di  $A'B$  e, per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, la sua lunghezza risulta  $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{DB}$  ossia  $\triangle ABC$  è isoscele.

In modo alternativo, dimostriamo la tesi appena esposta tramite un approccio analitico. Introdotta un sistema cartesiano di origine  $O$  nel punto medio di  $AB$ , disponiamo quest'ultimo sull'asse  $x$  e consideriamo la sua lunghezza pari a  $\overline{AB} = 2a$  ( $a > 0$ ). Sia inoltre  $\overline{CH} = h$  e sia  $x$  l'ascissa comune di  $H$  e  $C$  (fig. 2).

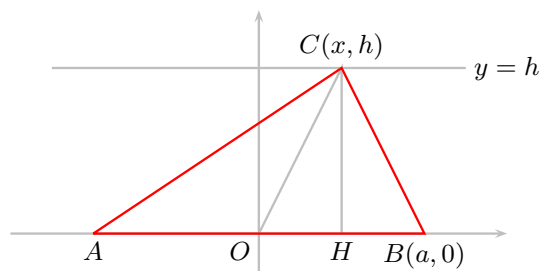


Fig. 2.

In base al teorema di Pitagora facilmente si trova

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{(a+x)^2 + h^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{(a-x)^2 + h^2}.$$

La funzione da minimizzare (il terzo lato, **come detto**, rimane costante) è quindi

$$\begin{cases} y = \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{(a+x)^2 + h^2} + \sqrt{(a-x)^2 + h^2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(a+x)}{2\sqrt{(a+x)^2 + h^2}} + \frac{-2(a-x)}{2\sqrt{(a-x)^2 + h^2}} \\ &= \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + h^2}} + \frac{-(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + h^2}}. \end{aligned}$$

Passando alla disequazione  $y' \geq 0$ , moltiplichiamo i suoi membri per il m. c. denominatore (che risulta positivo) e otteniamo

$$\begin{aligned} (a+x)\sqrt{(a-x)^2 + h^2} - (a-x)\sqrt{(a+x)^2 + h^2} &\geq 0 \\ (a+x)\sqrt{(a-x)^2 + h^2} &\geq (a-x)\sqrt{(a+x)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

In quest'ultima disequazione il primo membro è positivo mentre il secondo può pure essere negativo: distinguiamo quindi i due casi.

Se  $a-x < 0$  cioè quando  $x > a$ , certamente risulta  $y' > 0$ . Se invece  $a-x \geq 0$  possiamo elevare al quadrato entrambi i membri ottenendo

$$\begin{cases} x \leq a \\ (a+x)^2 [(a-x)^2 + h^2] \geq (a-x)^2 [(a+x)^2 + h^2] \end{cases}$$

che implica

$$(a^2 - x^2)^2 + h^2 a^2 + h^2 x^2 + 2h^2 ax \geq (a^2 - x^2)^2 + h^2 a^2 + h^2 x^2 - 2h^2 ax$$

da cui, ridotti i termini simili, si ottiene

$$4h^2 ax \geq 0 \quad \implies \quad x \geq 0.$$

Uniti i due risultati, la rappresentazione grafica del segno di  $y'$  (fig. 3) mostra che la funzione (perimetro) è decrescente per valori negativi di  $x$ , crescente per quelli positivi. In  $x = 0$  la somma  $\overline{AC} + \overline{BC}$  e il perimetro raggiungono il loro valore minimo.

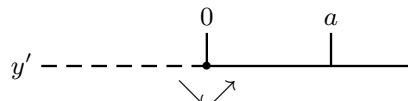


Fig. 3.

Ma in tal caso il punto  $C$  appartiene all'asse delle ordinate del sistema scelto per cui  $\triangle ABC$  risulta isoscele.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 1.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è, nella prima parte, del tutto simile al quesito 4 proposto nei corsi di ordinamento, al quale si rimanda.

Circa il calcolo di una stima della radice  $\alpha$  tramite un metodo iterativo scegliamo, per la sua immediatezza, quello di bisezione e lo applichiamo alla funzione  $f(x) = e^x + 3x$ . Quindi, notato che  $f(-1) = e^{-1} - 3 < 0$ , e  $f(0) = 1$ , la soluzione  $\alpha$  di  $f(\alpha) = 0$  dovrà essere interna all'intervallo  $[-1, 0]$ .

Procedendo con il metodo di bisezione:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1+0}{2}\right) &= f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2} - \frac{3}{2} \approx -0,89 \implies -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \\ f\left(\frac{-\frac{1}{2}+0}{2}\right) &= f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 0,028 \implies -\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2}\right) &= f\left(-\frac{3}{8}\right) \approx -0,4377 \implies -\frac{3}{8} < \alpha < -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}}{2}\right) &= f\left(-\frac{5}{16}\right) \approx -0,2059 \implies -\frac{5}{16} < \alpha < -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{-\frac{5}{16}-\frac{1}{4}}{2}\right) &= f\left(-\frac{9}{32}\right) \approx -0,0889 \implies -\frac{9}{32} < \alpha < -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Finora quindi abbiamo che  $-0,2813 < \alpha < -0,25$ : procedendo ulteriormente si può giungere a  $\alpha \approx -0,257628$ .

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La trasformazione assegnata

$$s : \begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$$

rientra nella forma generale delle affinità del piano in sé rappresentate analiticamente dalle equazioni

$$t : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f. \end{cases}$$

Poiché inoltre  $a = e = \sqrt{3}$  e  $b = -d = 1$ , la trasformazione  $s$  rientra nelle classe di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay, \end{cases}$$

forma che descrive le similitudini dirette (o concordi) di rapporto

$$k = \sqrt{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Difatti, nel caso assegnato, risulta

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4 > 0$$

che conferma come la similitudine sia diretta. Il rapporto di similitudine è quindi

$$k = \sqrt{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}} = 2.$$

# ESAME 2005

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## • Problema n. 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico, si consideri la regione  $R$ , finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola  $\lambda$  d'equazione:  $y = 6 - x^2$ .

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di  $R$  attorno all'asse  $y$ .
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di  $R$  attorno alla retta  $y = 6$ .
3. Si determini il valore di  $k$  per cui la retta  $y = k$  dimezza l'area di  $R$ .
4. Per  $0 < t < \sqrt{6}$  sia  $A(t)$  l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a  $\lambda$  nel suo punto di ascissa  $t$ . Si determini  $A(1)$ .
5. Si determini il valore di  $t$  per il quale  $A(t)$  è minima.

Soluzione

## • Problema n. 2

Si consideri la funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[0, +\infty[$  da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \log x) + 1, \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia  $C$  la sua curva rappresentativa nel riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se  $f$  è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione  $f(x) = 0$  ha, nell'intervallo  $[0, +\infty[$ , un'unica radice reale.
3. Si disegni  $C$  e si determini l'equazione della retta  $r$  tangente a  $C$  nel punto di ascissa  $x = 1$ .
4. Sia  $n$  un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di  $n$ , l'area  $A_n$

- del dominio piano delimitato dalla curva  $C$ , dalla retta tangente  $r$  e dalle due rette:  $x = \frac{1}{n}$  e  $x = 1$ .
5. Si calcoli il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  e si interpreti il risultato ottenuto.

Soluzione

### Questionario

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\sin 18^\circ$  e  $\sin 36^\circ$ .

Soluzione

2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

Soluzione

3. Si dimostri che la curva  $y = x \sin x$  è tangente alla retta  $y = x$  quando  $\sin x = 1$  ed è tangente alla retta  $y = -x$  quando  $\sin x = -1$ .

Soluzione

4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

Soluzione

5. Il numero  $e$  di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di  $e^x$  è  $e^x$ ?

Soluzione

6. Come si definisce  $n!$  ( $n$  fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

Soluzione

7. Se  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ , per quanti numeri reali  $k$  è  $f(k) = 2$ ? Si illustri il ragionamento seguito.

Soluzione

8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

Soluzione

9. Si calcoli senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di

$$\operatorname{sen}^2(35^\circ) + \operatorname{sen}^2(55^\circ)$$

ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

Soluzione

10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione  $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$  è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Soluzione

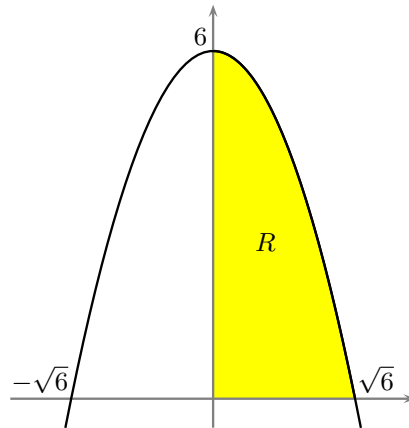
**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

La parabola  $\lambda : y = 6 - x^2$  possiede vertice in  $V(0, 6)$  ed interseca l'asse  $x$  nei punti di ascissa  $x = \pm\sqrt{6}$ . Assieme agli assi coordinati  $\lambda$  definisce la regione finita  $R$  rappresentata in colore, assieme a  $\lambda$ , in fig. 1.

1. Per determinare il volume del solido generato dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$  conviene applicare a  $\lambda$  la trasformazione di simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante,  $\sigma$ , così da riportarci alla situazione standard che considera di norma la rotazione attorno all'asse  $x$ . Pertanto, se  $\sigma$  è la trasformazione

$$\sigma : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

$\sigma(\lambda)$  è data dall'equazione  $\sigma(\lambda) : x' = 6 - (y')^2$  dalla quale, esplicitando la



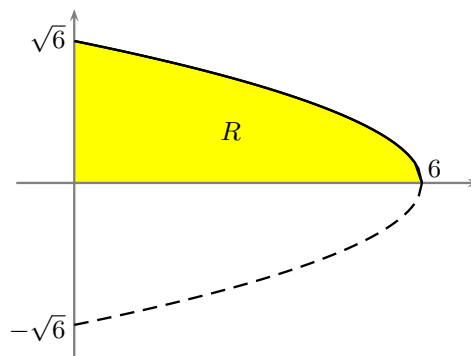
**Fig. 1.** La parabola  $\lambda$  e regione  $R$ .

variabile  $y'$  (che chiameremo per semplicità  $y$  come pure  $x'$ ,  $x$ ),

$$x = 6 - y^2, \quad \implies \quad y^2 = 6 - x$$

da cui

$$\sigma(\lambda) : \begin{cases} y = \sqrt{6 - x} \\ 0 \leq x \leq 6 \wedge y \geq 0. \end{cases}$$



**Fig. 2.** Regione  $R$  e rotazione attorno all'asse  $x$ .

La situazione geometrica, rappresentata dalla fig. 2, è in tal modo riportata a quella di un solido generato dalla rotazione di una regione piana sottostante ad una funzione  $y = f(x)$  attorno all'asse delle ascisse. Possiamo pertanto applicare l'espressione generale che fornisce il volume  $\mathcal{V}$  del solido di rotazione

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

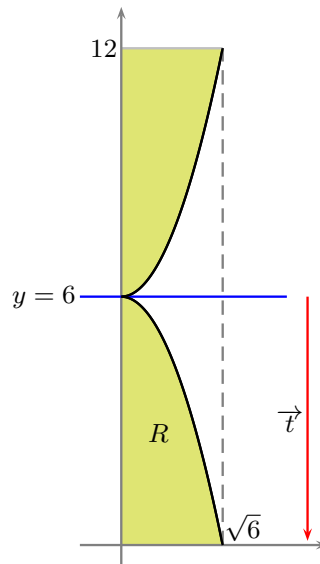
che, nel caso in esame, diviene

$$\mathcal{V}_1 = \pi \int_0^6 (\sqrt{6-x})^2 dx = \pi \int_0^6 (6-x) dx.$$

L'integrazione indefinita è immediata per cui

$$\mathcal{V}_1 = \pi \left[ 6x - \frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \pi \left( 36 - \frac{36}{2} \right) = 18\pi.$$

2. Il volume  $\mathcal{V}_2$  del solido che  $R$  genera con la sua rotazione attorno alla retta  $r : y = 6$  (figura 3) rimane evidentemente lo stesso se applichiamo, alla parabola  $\lambda$  e alla retta  $r$ , la traslazione che riporta quest'ultima a coincidere con l'asse  $x$ .



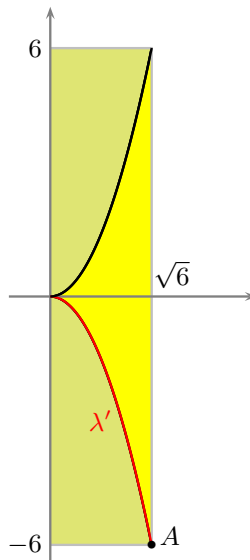
**Fig. 3.** Rotazione di  $R$  attorno alla retta  $y = 6$ .

Sia  $\tau$  questa traslazione e il vettore  $\vec{t}$  che la rappresenta (fig. 3) possiede evidentemente componenti  $\vec{t} = (0, -6)$ . Risulta quindi

$$\tau : \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 6 \end{cases} \quad \text{con inversa} \quad \tau^{-1} : \begin{cases} x = x' \\ y = y' + 6 \end{cases}$$

cosicché l'immagine  $\lambda'$  di  $\lambda$  è

$$\lambda' = \tau(\lambda) : y' + 6 = 6 - (x')^2 \quad \implies \quad y' = -(x')^2,$$



**Fig. 4.** Curve traslate e rotazione attorno alla retta  $y = 0$ .

equazione che riscriviamo ancora, per comodità, come  $\lambda' : y = -x^2$  (in rosso in fig. 4).

Detto  $A$  il punto  $A(\sqrt{6}, -6) \in \lambda'$ , il volume  $\mathcal{V}_2$  richiesto si ottiene sottraendo al cilindro con raggio di base  $r_b = -y_A = 6$  ed altezza  $h = x_A = \sqrt{6}$ , il volume che  $\lambda'$  genera con la sua rotazione attorno all'asse  $x$  e compreso tra le rette  $x = 0$  e  $x = \sqrt{6}$  (in fig. 4 compare in giallo la sua sezione).

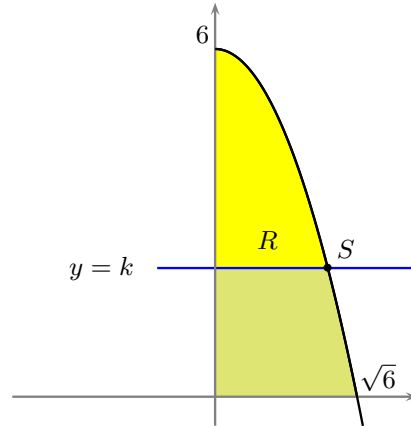
Pertanto il volume richiesto è

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \pi r_b^2 \cdot h - \pi \int_0^{\sqrt{6}} (-x^2)^2 dx = 36\pi\sqrt{6} - \pi \int_0^{\sqrt{6}} x^4 dx \\ &= 36\pi\sqrt{6} - \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{6}} = 36\pi\sqrt{6} - \frac{36\pi\sqrt{6}}{5} = 36\pi\sqrt{6} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{144\pi\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

3. Anche in questo caso, per determinare il valore di  $k$  in corrispondenza del quale la retta orizzontale  $y = k$  dimezza la regione  $R$  (fig. 5), applichiamo la medesima trasformazione di simmetria del **primo** punto.

Poiché l'area di  $R$ ,  $\mathcal{A}(R)$ , rimane la medesima in questa trasformazione, determiniamo innanzitutto il suo valore tramite l'integrale definito

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^{\sqrt{6}} (6 - x^2) dx = \left[ 6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{6}}$$

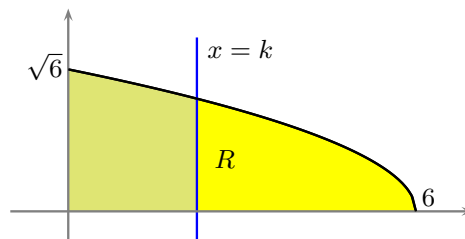


**Fig. 5.** Suddivisione di  $R$  da parte della retta  $y = k$ .

dal quale si ottiene

$$\mathcal{A}(R) = 6\sqrt{6} - \frac{6\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}.$$

L'applicazione della simmetria assiale rispetto alla bisettrice riporta alla configurazione geometrica descritta nella fig. 6 dove la funzione che definisce  $R$  è, come visto, data dall'equazione  $y = \sqrt{6-x}$  con  $x \in [0, 6]$ .



**Fig. 6.** Regioni di  $R$ .

Notato che la retta  $y = k$  diviene ora  $x = k$ , la condizione richiesta si traduce in

$$\int_0^k \sqrt{6-x} \, dx = \frac{\mathcal{A}(R)}{2}$$

cioè

$$\int_0^k \sqrt{6-x} \, dx = 2\sqrt{6}. \quad (1)$$

Risolto l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{6-x} \, dx$$

con la sostituzione  $6 - x = t$ , da cui  $x = 6 - t$  e  $dx = -dt$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{6-x} dx &= \int \sqrt{t} (-dt) = -\int t^{1/2} dt \\ &= -\frac{t^{3/2}}{(3/2)} + c = -\frac{2}{3} \sqrt{(6-x)^3} + c,\end{aligned}$$

la condizione (1) diviene

$$\left[ -\frac{2}{3} \sqrt{(6-x)^3} \right]_0^k = 2\sqrt{6}$$

che fornisce

$$-\frac{2}{3} \sqrt{(6-k)^3} + \frac{2}{3} \sqrt{6^3} = 2\sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3} \sqrt{(6-k)^3} = 2\sqrt{6}$$

quindi

$$\sqrt{(6-k)^3} = 3\sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad (6-k)^3 = 6 \cdot 3^2 \quad \Longrightarrow \quad (6-k)^3 = 2 \cdot 3^3$$

da cui, in definitiva,  $6 - k = 3\sqrt[3]{2}$  ossia  $k = 6 - 3\sqrt[3]{2} \approx 2,22$ .

Si può giungere allo stesso risultato in modo più sintetico se ricorriamo alla formula di Archimede per l'area di un segmento parabolico

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6} |a| \cdot |x_2 - x_1|^3$$

dove  $a$  rappresenta il coefficiente del termine di secondo grado nell'equazione della parabola e  $x_1, x_2$ , le ascisse dei punti di intersezione tra la retta "base" del segmento e la parabola.

Detto quindi  $S$  il punto di intersezione della retta  $y = k$  con l'arco di parabola  $\lambda$  nel I quadrante (fig. 5), risulta

$$\begin{cases} y = k \\ y = 6 - x^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad k = 6 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm \sqrt{6 - k}$$

con  $x_S = \sqrt{6 - k}$ : il secondo punto di intersezione tra  $r$  e  $\lambda$  è invece il simmetrico ad  $S$  e possiede ascissa  $x_1 = -\sqrt{6 - k}$ . Poiché l'area della regione richiesta (in giallo in fig. 5), è metà dell'area del segmento parabolico delimitato da  $\lambda$  e  $r$  e si ha  $a = -1$  e  $x_2 = x_S = \sqrt{6 - k} = -x_1$  avremo

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} |-1| \cdot \left| \sqrt{6 - k} - (-\sqrt{6 - k}) \right|^3 \right) = \frac{\mathcal{A}(R)}{2}$$

da cui

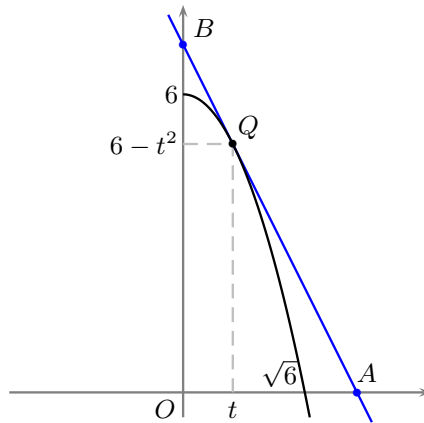
$$\frac{1}{12} \left| 2\sqrt{6-k} \right|^3 = 2\sqrt{6} \quad \text{ossia} \quad \frac{2}{3} \left( \sqrt{6-k} \right)^3 = 2\sqrt{6}.$$

Infine, con passaggi analoghi a quelli già **svolti** si riottiene il medesimo risultato.

4. La retta tangente nel punto  $Q(t, 6 - t^2) \in \lambda$  con  $0 < t < \sqrt{6}$  (fig. 7), si ottiene dopo aver calcolato il coefficiente angolare  $m_t$  fornito dalla derivata prima  $y' = -2x$  di  $\lambda$ . Risulta quindi  $y'(t) = m_t = -2t$  e l'equazione rappresentativa della retta tangente è

$$y - y_Q = y'(t)(x - x_Q) \quad y - (6 - t^2) = -2t(x - t)$$

dalla quale si ha  $y = -2tx + t^2 + 6$ .



**Fig. 7.** Retta tangente nel punto di ascissa  $t$  a  $\lambda$ .

I punti  $A$  e  $B$  di intersezione di tale retta con gli assi  $x$  e  $y$  sono ( $t \neq 0$ )

$$y = 0, \quad 0 = -2tx_A + t^2 + 6 \quad \implies \quad x_A = \frac{t^2 + 6}{2t}$$

e quindi

$$A\left(\frac{t^2 + 6}{2t}, 0\right), \quad B(0, t^2 + 6).$$

L'area di  $\triangle OAB$  è

$$\mathcal{A}(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \left( \frac{t^2 + 6}{2t} \right) \cdot (t^2 + 6)$$

ossia

$$\begin{cases} \mathcal{A}(t) = \frac{(t^2 + 6)^2}{4t} \\ 0 < t < \sqrt{6}. \end{cases} \quad (2)$$

È ora immediato calcolare

$$\mathcal{A}(1) = \frac{(1^2 + 6)^2}{4 \cdot 1} = \frac{49}{4}.$$

5. Per determinare il valore di  $t$  per il quale  $\mathcal{A}(t)$  risulta minima possiamo studiare il segno della sua derivata prima. Questa risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(t) &= \frac{1}{4} \left[ \frac{2(t^2 + 6) \cdot 2t \cdot t - (t^2 + 6)^2}{t^2} \right] \\ &= \frac{t^2 + 6}{4t^2} (4t^2 - t^2 - 6) \\ &= \frac{t^2 + 6}{4t^2} (3t^2 - 6) \end{aligned}$$

e la condizione  $\mathcal{A}'(t) \geq 0$  implica per l'unico termine non positivo della  $\mathcal{A}'$

$$3t^2 - 6 \geq 0, \quad t^2 \geq 2, \quad t \leq -\sqrt{2} \vee \geq \sqrt{2}.$$

Considerando che  $t \in ]0, \sqrt{6}[$ , la rappresentazione grafica del segno di  $\mathcal{A}'$  mostrata in fig. 8 conferma che il valore minimo di  $\mathcal{A}(t)$  viene raggiunto in corrispondenza del valore  $t_{min} = \sqrt{2}$ .

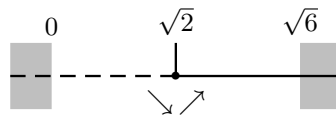


Fig. 8.

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

La funzione  $f$  è rappresentata da

$$f : \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e possiede per dominio l'insieme  $D = [0, +\infty[$  (scriviamo  $\ln x$  in luogo di  $\log x$  per intendere il logaritmo in base naturale). La richiesta se  $f$  sia continua e derivabile in  $x = 0$  va quindi intesa come continuità e derivabilità a destra in  $x = 0$ . Dato che  $f(0) = 1$  lo studio della continuità implica la risoluzione del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 \right]$$

e, in particolare, di  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$  dato che i limiti dei rimanenti addendi sono immediati. Quest'ultimo rappresenta un caso di indeterminazione del tipo  $0 \cdot \infty$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Riscritto però nella forma

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(1/x^2)}$$

possiamo pensare di applicare il teorema di De L'Hôpital *se* esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(\ln x)}{D(1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{(-2/x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{2} \right).$$

Poiché risulta  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{2} \right) = 0$  è possibile applicare il teorema suddetto cosicché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2}{2} \right) = 0$$

e quindi per il teorema della somma di limiti,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 \right) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

In definitiva, poiché  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  la funzione  $f$  è continua a destra in  $x = 0$ .

Per quanto riguarda la derivabilità, costruiamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \frac{3}{2}h^2 - h^2 \ln h + 1 - (1) \right] \\ &= \frac{3}{2}h - h \ln h \end{aligned}$$

e studiamone il limite per  $h \rightarrow 0^+$ . L'analisi del limite  $\lim_{h \rightarrow 0^+} (h \ln h)$  conduce ancora ad un caso di indeterminazione che si può affrontare con la stessa tecnica applicata appena sopra. Difatti, poiché il seguente limite esiste

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{D(\ln h)}{D(1/h)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1/h)}{(-1/h^2)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -h = 0,$$

è ancora possibile applicare il teorema di De L'Hôpital e affermare che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \ln h = 0$$

e concludere che

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2}h - h \ln h \right) = 0 - 0 = 0.$$

La funzione  $f$  possiede quindi anche la derivata destra in  $x = 0$  e questa risulta  $f'(0^+) = 0$ .

Va infine notato che, affrontando per primo il problema della derivabilità e, dimostrata l'esistenza di  $f'(0^+)$ , rimane pure dimostrata la continuità di  $f$  in  $x = 0$  in quanto una funzione derivabile in un punto è, nel medesimo punto, pure continua.

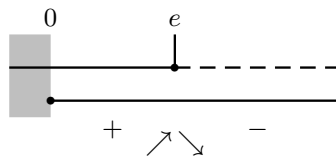
2. Per dimostrare l'esistenza di un'unica radice reale di  $f(x) = 0$  nel dominio  $[0, +\infty[$  calcoliamo la derivata di  $f$  anche per  $x > 0$  ossia

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x - \left( 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= 3x - 2x \ln x - x = 2x - 2x \ln x \\ &= 2x(1 - \ln x). \end{aligned}$$

Nel dominio è quindi

$$f' : \begin{cases} f'(0^+) = 0 \\ f'(x) = 2x(1 - \ln x), \quad \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Il segno di  $f'$  per  $x > 0$  dipende dal secondo fattore cioè da  $1 - \ln x \geq 0$  che implica  $1 \geq \ln x$ ,  $x \leq e$  per cui possiamo affermare che per  $0 < x \leq e$ ,  $f$  è crescente, mentre decresce strettamente se  $x > e$  (fig. 1).



**Fig. 1.**

Osserviamo che  $f(0) = 1$  e, a maggior ragione,  $f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1 > 0$ . Inoltre risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1 \right] = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2 \ln x = -\infty :$$

di conseguenza sarà possibile determinare un valore  $b$  in corrispondenza del quale  $f(b) < 0$ . Difatti procedendo per tentativi, già con  $b = 5$  risulta  $f(5) =$

$\frac{25}{2}(3 - 2 \ln 5) + 1 \approx -1,736 < 0$  cosicché nell'intervallo chiuso  $[e, 5]$  è possibile applicare il teorema degli zeri e quindi dedurre l'esistenza di almeno uno zero per  $f(x) = 0$ . D'altra parte, per la monotonia strettamente decrescente di  $f$  in tale intervallo deve sussistere un solo punto di intersezione di  $f$  con l'asse  $x$  e pertanto l'equazione  $f(x) = 0$  possiede un'unica soluzione,  $x_1$ . Quest'ultima dovrà certamente soddisfare alle disuguaglianze  $e < x_1 < 5$ .\*

3. Per poter disegnare la curva  $C$  rappresentativa di  $f$  manca solo lo studio della  $f''(x)$  che risulta

$$f''(x) = 2 \left[ 1 - \ln x + x \left( -\frac{1}{x} \right) \right] = -2 \ln x \quad x > 0.$$

Il suo segno discende immediato in quanto  $f''(x) \geq 0$  se  $\ln x \leq 0$  cioè  $x \leq 1$ . La funzione  $f$  è quindi convessa per  $0 < x < 1$ , concava per  $x > 1$  e in  $x = 1$  presenta un punto di flesso (fig. 2).

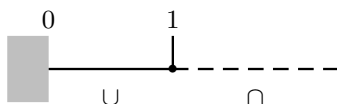


Fig. 2.

Calcolata l'ordinata del punto di flesso  $f(1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ , il grafico di  $C$  è rappresentato dalla (fig. 3). La retta  $r$ , tangente nel punto di ascissa  $x = 1$  a  $C$ , è quindi anche la tangente inflessionale ed è data da

$$r : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad y - \frac{5}{2} = 2(x - 1)$$

ossia  $r : y = 2x + \frac{1}{2}$ .

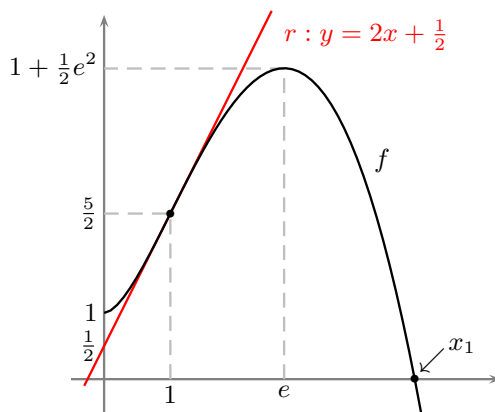
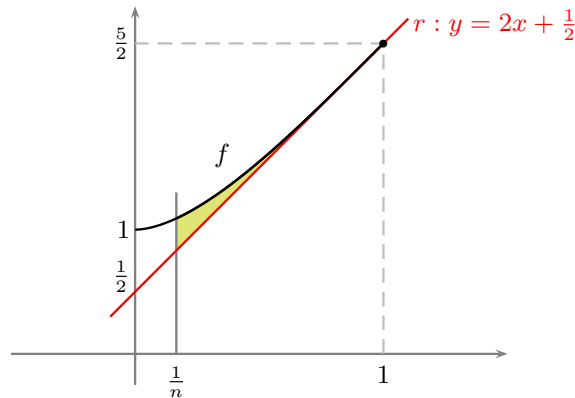


Fig. 3. Grafici di  $f$  e della tangente nel suo punto di flesso.

\* Per una stima approssimata di tale valore si veda la **seconda** domanda del problema n. 2 dell'Esame 2005 PNI.

4. Con  $n \in \mathbb{N}_0$  ( $n > 0$ ), il dominio piano del quale si chiede l'area  $A_n$  è evidenziato in figura 4 in quanto l'estremo  $\frac{1}{n}$  risulta minore di 1.



**Fig. 4.** Dominio piano  $A_n$  compreso tra  $f$  e  $r$  (sistema non isometrico).

L'area di questa regione è data dall'integrale definito della differenza tra le equazioni rappresentative di  $f$  e  $r$

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \left( \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 \right) - \left( 2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx$$

ossia da

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \frac{3}{2}x^2 - 2x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} \right) dx.$$

Poiché l'unico integrale non elementare è collegato all'addendo  $x^2 \ln x$ , risolviamo l'integrale indefinito

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

utilizzando il metodo per parti e identificando il fattore finito con  $\ln x$  e quello differenziale con  $x^2 dx$ . Ne segue

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \left( \frac{x^3}{3} \right) + c \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c \end{aligned}$$

per cui, ottenute le primitive dei rimanenti addendi

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad \int dx = x + c,$$

$A_n$  si calcola con la differenza

$$A_n = \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + \frac{1}{2}x \right]_{1/n}^1$$

Si ha

$$\begin{aligned} A_n &= \left[ \frac{11}{18}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} \ln x \right]_{1/n}^1 \\ &= \frac{11}{18} - 1 + \frac{1}{2} - \left( \frac{11}{18n^3} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^3} \ln \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\ln n}{3n^3}. \end{aligned}$$

5. Per calcolare il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  va osservato innanzitutto che, per tre addendi che formano  $A_n$ , il limite appare il medesimo e risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11}{18n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

in quanto se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \infty$  si dimostra anche  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/f(n) = 0$ . Per risolvere invece

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

ci riportiamo al limite, analogo, della funzione di variabile reale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}.$$

Poiché è manifestamente indeterminato ( $\infty/\infty$ ), studiamo il limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore onde, eventualmente, applicare il teorema di De L'Hôpital. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(\ln x)}{D(x^3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0$$

cosicché l'applicazione del teorema suddetto, comporta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0.$$

È quindi anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^3} = 0$$

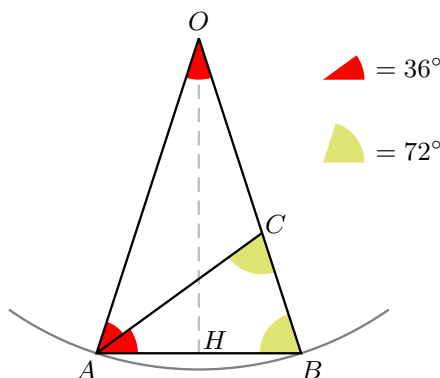
e, in conclusione,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\ln n}{3n^3} \right) \\ &= \frac{1}{9} - 0 + 0 - 0 - 0 = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

L'interpretazione di questo risultato è immediata se si considera che per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  per cui la retta  $x = \frac{1}{n}$  di fig. 4 si avvicina all'asse delle  $y$  cosicché il limite trovato esprime l'area compresa tra la curva  $C$  di  $f$ , la sua tangente inflessionale e l'asse  $y$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Consideriamo l'angolo al centro che insiste su un arco pari ad  $\frac{1}{10}$  della lunghezza della circonferenza ossia un angolo di ampiezza  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ .



**Fig. 1.**

La corda sottesa da tale arco è evidentemente il lato del decagono regolare e la base del triangolo isoscele avente per lati obliqui due raggi della medesima circonferenza. Nella figura 1 è rappresentato questo triangolo: poniamo  $x = \overline{AB}$ ,  $r = \overline{OA} = \overline{OB}$  mentre, dal fatto che  $\angle AOB = 36^\circ$  e che  $\triangle OAB$  risulta isoscele, discende che  $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$ . Tracciata la bisettrice di  $\angle OAB$ , questa incontra in  $C$  il lato  $OB$ . Poiché  $\angle OAC = 36^\circ$ ,  $\triangle OAC$  è isoscele sulla base  $OA$ . Ne segue che  $\overline{AC} = \overline{OC}$ .

Il triangolo  $ABC$  possiede l'angolo in  $B$  che misura  $72^\circ$  e un altro in  $A$  di  $36^\circ$  cosicché l'ampiezza del terzo dev'essere  $\angle ACB = 72^\circ$ . Quindi anche  $\triangle ABC$  è isoscele con  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{OC}$ . Inoltre quest'ultimo triangolo risulta simile a

quello di partenza in quanto tutti gli angoli corrispondenti sono congruenti. Da  $\triangle ABC \cong \triangle OAB$  discende

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

oppure

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OC}}{\overline{OC}}$$

in quanto  $\overline{BC} = \overline{OB} - \overline{OC}$ .  $OC$  è pertanto sezione aurea di  $OB$  essendo medio proporzionale tra il raggio  $OB$  e la parte rimanente.

Con le condizioni poste, l'ultima proporzione si riscrive

$$\frac{x}{r} = \frac{r-x}{x}$$

dalla quale discende l'equazione  $x^2 + rx - r^2 = 0$  che, risolta, fornisce la radice positiva

$$x = r \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{ossia} \quad \frac{x}{r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Essendo  $x$  il lato del decagono, pure questo risultato riafferma che esso è sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto (il numero  $(-1 + \sqrt{5})/2$  è, appunto, indicato come la *sezione aurea* dell'unità).

Per determinare il valore di  $\sin 18^\circ$ , tracciamo l'altezza  $OH$  e osserviamo che  $\overline{AB} = x = 2\overline{HB} = 2\overline{OB} \sin 18^\circ$ . Dal rapporto ottenuto precedentemente è allora

$$\frac{2r \sin 18^\circ}{r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \implies \quad \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0,3090. \quad (1)$$

Notato che  $\sin 18^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \cos 72^\circ$  o, in modo equivalente,

$$\sin 18^\circ = \frac{\overline{HB}}{\overline{OB}} = \cos 72^\circ,$$

utilizzando la formula di bisezione per il seno

$$|\sin \alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

il valore di  $\sin 36^\circ$  è

$$\sin 36^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos(2 \cdot 36^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 72^\circ}{2}}$$

per cui sostituendo al  $\cos 72^\circ$  il  $\sin 18^\circ$  dato da (1), abbiamo la formula seguente\*

$$\begin{aligned}\sin 36^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{8}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \approx 0,5878.\end{aligned}$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $h$  l'altezza del cilindro che, essendo retto, cade nel centro del cerchio di base e  $x$  il suo raggio di base (fig. 1). È evidentemente  $h > 0$ ,  $x > 0$ . Poiché il volume è fissato al valore  $\mathcal{V} = 0,4$  litri =  $0,4 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 400 \text{ cm}^3$ , dev'essere

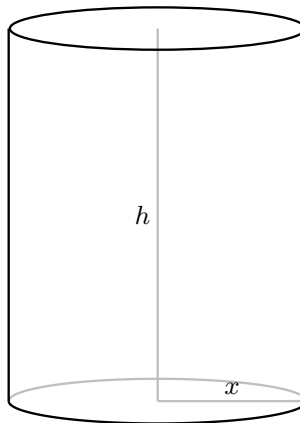
$$\mathcal{V} = \pi x^2 \cdot h \tag{1}$$

mentre l'area totale in termini degli stessi parametri risulta espressa dalla

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{base}} + \mathcal{A}_{\text{lat}} = \pi x^2 + \pi x^2 + (2\pi x) \cdot h$$

ossia

$$\mathcal{A} = 2\pi(x^2 + x \cdot h).$$



**Fig. 1.** Cilindro circolare retto.

---

\* Per altri approfondimenti si veda la pagina web interattiva  
<http://www.lorenzoroi.net/geometria/Poligoni.html>

Poiché questa funzione dipende da due variabili,  $x$  e  $h$ , dovremo ridurla ad una sola variabile ricavando  $h$  dalla (1). Difatti, esplicitata la variabile  $h = \mathcal{V}/(\pi x^2)$  la sostituiamo nell'espressione dell'area totale

$$\mathcal{A}(x) = 2\pi \left( x^2 + x \cdot \frac{\mathcal{V}}{\pi x^2} \right) = 2\pi \left( x^2 + \frac{\mathcal{V}}{\pi x} \right) \quad x > 0.$$

La ricerca della minima quantità di materiale per realizzare la lattina si riduce ora alla determinazione del minimo di tale area (come detto si trascura lo spessore della latta). Passando quindi allo studio della sua derivata prima  $\mathcal{A}'(x)$ , si ha

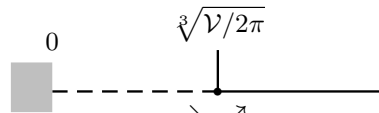
$$\mathcal{A}'(x) = 2\pi \left[ 2x + \frac{\mathcal{V}}{\pi} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right] = 2\pi \left( 2x - \frac{\mathcal{V}}{\pi x^2} \right),$$

e il segno di tale derivata è determinato solo dal termine entro parentesi per cui

$$2x - \frac{\mathcal{V}}{\pi x^2} \geq 0 \quad \cdot \pi x^2 > 0 \quad \implies \quad 2\pi x^3 - \mathcal{V} \geq 0 \quad \implies \quad x^3 \geq \frac{\mathcal{V}}{2\pi}.$$

L'estrazione della radice cubica fornisce

$$x \geq \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}}.$$



**Fig. 2.**

La rappresentazione grafica del segno di  $\mathcal{A}'(x)$  è data in fig. 2 e, considerate le limitazioni per  $x$ , mette in evidenza la presenza di un minimo assoluto di  $\mathcal{A}$  in corrispondenza del valore per il raggio

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{400}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3,9929 \text{ cm.}$$

In tal caso l'altezza è

$$h = \frac{\mathcal{V}}{\pi \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}^2}{4\pi^2}}} = \frac{\mathcal{V}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{\mathcal{V}^2}} = \sqrt[3]{\frac{4\mathcal{V}}{\pi}} \approx 7,9859 \text{ cm}$$

pari quindi al diametro di base del cilindro

$$d = 2x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4\mathcal{V}}{\pi}}.$$

In conclusione, il minimo dell'area totale (o del materiale da utilizzare), dato un certo volume, si raggiunge quando il cilindro retto risulta equilatero ossia possiede diametro di base pari all'altezza.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Affinché due curve descritte da equazioni del tipo  $y_1 = f(x)$  e  $y_2 = g(x)$  (e quindi rappresentative di funzioni reali di variabile reale) siano tangenti in un punto di ascissa  $x_0$ , devono essere soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Queste mettono in evidenza che il punto di ascissa  $x_0$  dev'essere comune ad entrambe le curve e, in questo punto, le curve devono possedere la medesima derivata e quindi la medesima retta tangente (si veda il quesito 2 assegnato nei corsi sperimentali per la definizione di retta tangente).

Nel caso proposto, la prima condizione è soddisfatta dai valori

$$\begin{cases} y_1 = x \operatorname{sen} x \\ y_2 = x \end{cases} \implies x = x \operatorname{sen} x \implies \operatorname{sen} x = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ , suggeriti implicitamente anche dal testo. Poiché poi le rispettive derivate prime sono

$$\begin{cases} y_1'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x \\ y_2'(x) = 1 \end{cases}$$

il loro calcolo nei punti  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  mostra

$$\begin{aligned} y_1' \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) &= \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \\ &= 1 + 0 = 1 = y_2' \end{aligned}$$

per cui è soddisfatta pure la seconda condizione.

Procedendo nello stesso modo anche con la retta  $y = -x$  abbiamo

$$\begin{cases} y_1 = x \operatorname{sen} x \\ y_2 = -x \end{cases} \implies -x = x \operatorname{sen} x \implies \operatorname{sen} x = -1 \implies x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

e quindi

$$\begin{cases} y_1'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x \\ y_2'(x) = -1 \end{cases} \implies y_1' \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = -1 + 0 = -1 = y_2'$$

si dimostra pure la seconda parte.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

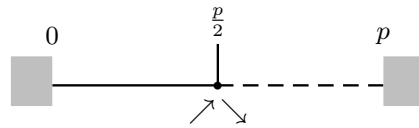
Siano  $a$  e  $b$  le lunghezze dei lati di un rettangolo qualsiasi ( $a > 0 \wedge b > 0$ ). La condizione che lega queste variabili è la costanza del perimetro  $2p$  e questa si traduce nell'espressione

$$2a + 2b = 2p \quad \text{equivalente alla} \quad a + b = p.$$

La funzione che fornisce l'area è invece  $\mathcal{A} = a \cdot b$  per cui, ottenuta  $b$  dalla precedente,  $b = p - a$  e posta la condizione  $b > 0$  ossia  $p - a > 0$  cioè  $a < p$ , riduciamo la funzione area alla sola variabile  $a$  eliminando  $b$ : risulta

$$\begin{cases} \mathcal{A}(a) = a \cdot (p - a) = -a^2 + ap \\ 0 < a < p. \end{cases}$$

Passando alla derivata prima (o, in alternativa, notando che la funzione  $\mathcal{A}(a)$  è una parabola),  $\mathcal{A}'(a) = -2a + p$ , per cui sarà  $\mathcal{A}' \geq 0$  se  $-2a + p \geq 0$ ,  $a \leq \frac{p}{2}$ . La fig. 1 rappresenta quindi il segno di  $\mathcal{A}'$  e mette in evidenza come  $\mathcal{A}$  possieda un massimo assoluto se  $a = \frac{p}{2}$ .

**Fig. 1.**

D'altra parte se  $a = \frac{p}{2}$  è pure  $b = p - a = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$  per cui il rettangolo si riduce ad un quadrato avendo lati uguali.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione del numero  $e$  di Nepero è data dal limite della successione

$$e = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

oppure, in luogo della successione, si può considerare pure il limite della funzione di variabile reale

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

Per dimostrare che  $D(e^x) = e^x$  va risolto il limite del rapporto incrementale per la funzione esponenziale in un punto qualsiasi  $x$  del suo dominio  $\mathbb{R}$  e al tendere allo zero dell'incremento  $h$ . Questo limite assume la forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

e per le proprietà dell'esponenziale si riscrive come

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^x \left( \frac{e^h - 1}{h} \right).$$

Posto

$$e^h - 1 = \frac{1}{t} \tag{1}$$

notiamo che se  $h \rightarrow 0$  dev'essere  $t \rightarrow \infty$  ossia, più formalmente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^h - 1} = \infty.$$

La sostituzione (1) fornisce inoltre

$$e^h = 1 + \frac{1}{t} \implies h = \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} e^x \left( \frac{e^h - 1}{h} \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^x \left[ \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^x \cdot \frac{1}{t \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)} \end{aligned}$$

per cui, portando ad esponente dell'argomento del logaritmo il fattore  $t$  si giunge alla forma

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t}.$$

La definizione **esposta** per il numero  $e$  permette di risolvere il limite della funzione al denominatore

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t = \lim_{z \rightarrow e} \ln z = \ln e = 1$$

per cui il limite del rapporto incrementale esiste finito  $\forall x \in \mathbb{R}$  e risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t} = \frac{e^x}{\ln e} = \frac{e^x}{1} = e^x$$

come richiedeva il quesito.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione di  $n$  fattoriale (simbolo  $n!$ ), è rappresentata dal secondo membro della scrittura

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

e consiste nel prodotto di  $n$  fattori pari ai numeri interi

$$1, 2, 3, \dots, (n-1), n.$$

Si pone inoltre  $0! = 1$ . Il suo significato combinatorio, descritto sinteticamente dalla  $P_n = n!$ , consiste nel fornire il numero  $P_n$  delle permutazioni semplici di  $n$  oggetti cioè il numero di quei gruppi contenenti  $n$  elementi tali da differire uno dall'altro solo per l'ordine in cui appaiono questi  $n$  elementi.

Il legame con i coefficienti binomiali  $C_{n,k}$  è dato dalla relazione

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dove  $C_{n,k}$  rappresenta invece il numero delle combinazioni semplici di  $n$  oggetti a gruppi di  $k$  ossia di quei gruppi contenenti  $k$  elementi presi tra gli  $n$  possibili e che differiscono uno dall'altro per almeno un elemento.

I coefficienti binomiali e il numero delle permutazioni sono tra loro collegati in quanto, osservato che ogni combinazione semplice di  $k$  oggetti dà origine a  $P_k = k!$  permutazioni, dalla relazione sopra si ottiene pure

$$C_{n,k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = D_{n,k}$$

essendo  $D_{n,k}$  il numero complessivo dei gruppi di  $k$  elementi (presi tra  $n$  possibili) tali da differire o per l'ordine o per qualche elemento: questi ultimi rappresentano le disposizioni semplici di  $n$  oggetti a gruppi di  $k$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ , il quesito chiede di determinare il numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = 2$  illustrando il ragionamento seguito. Poiché  $f(x) = 2$  implica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2 \quad \implies \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$$

e posto  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ , la ricerca del numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = 2$  è equivalente alla ricerca del numero delle intersezioni del grafico della funzione  $g(x)$  con l'asse delle  $x$ . Studiamo quindi per la  $g(x)$  alcune sue proprietà.

Ricordata la continuità di  $g(x)$  in  $\mathbb{R}$  in quanto espressa da un polinomio, i suoi limiti agli estremi di  $\mathbb{R}$  sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \left( 1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$

essendo nulli i limiti di tutti gli addendi dipendenti dalla variabile  $x$  entro parentesi rotonde.

Il segno della derivata prima  $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2)$  dipende dal fattore  $x \geq 0$  e da  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ . L'equazione associata a quest'ultima disequazione possiede le soluzioni  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 2$  per cui la disequazione è soddisfatta per  $x \leq 1 \vee x \geq 2$ . Il segno complessivo di  $g'$  è rappresentato dalla fig. 1 e mostra come la  $g$  possieda due minimi in corrispondenza di  $x = 0$  e  $x = 2$ .

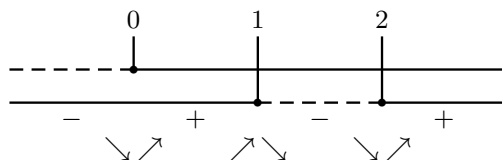


Fig. 1.

Poiché le ordinate di questi punti di minimo risultano

$$g(0) = 1, \quad g(2) = 16 - 4 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 1 = 1,$$

e quindi sono uguali e positive, la funzione  $g(x)$  ha come valore minimo assoluto 1 e di conseguenza il suo codominio è l'insieme  $[1, +\infty[$ . Non potrà quindi assumere alcun valore nullo o attraversare l'asse delle ascisse: l'equazione  $g(x) = 0$  ossia la  $f(x) = 2$  non può quindi avere soluzioni. In figura 2 riportiamo il grafico della funzione  $g(x)$  e le informazioni tratte dal suo studio.

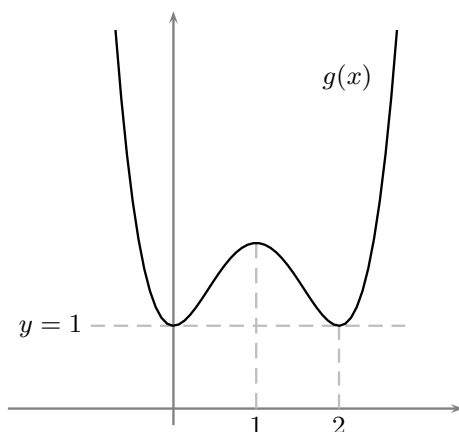


Fig. 2. Grafico della funzione  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ .

In alternativa a tale studio analitico e a partire dalla equazione

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2$$

osserviamo che, addizionando ad entrambi i membri  $-3$ , questa si può riscrivere come

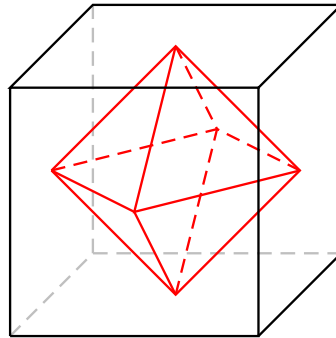
$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = -1 \quad x^2(x^2 - 4x + 4) = -1 \quad x^2(x - 2)^2 = -1$$

e, manifestamente, non può esistere alcun valore  $x \in \mathbb{R}$  tale che il primo membro, prodotto di quadrati, sia uguale ad un valore negativo.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

L'ottaedro (fig. 1) è un poliedro con otto facce, sei vertici e dodici spigoli. Un poliedro si dice regolare quando tutte le sue facce sono dei poligoni regolari congruenti così come i suoi angoloidi. Questi ultimi sono definiti come la parte di spazio delimitata da tre o più semirette non complanari uscenti da uno stesso vertice e delimitata dagli angoli (le facce dell'angoloide) che queste formano a due a due.

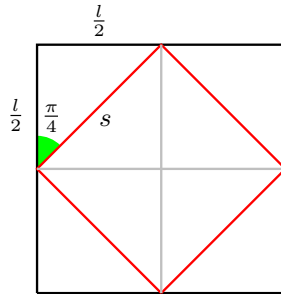
Nel caso dell'ottaedro la condizione che sia regolare si riduce alla congruenza tra tutti i suoi spigoli cosicché le sue facce saranno dei triangoli equilateri. Tale congruenza si traduce nell'uguaglianza delle distanze tra i centri delle sei facce del cubo.



**Fig. 1.** Cubo e ottaedro regolare.

Data comunque la simmetria del cubo, tale uguaglianza è soddisfatta e l'ottaedro che in tal modo si viene a formare è regolare.

Se  $l$  è la lunghezza dello spigolo del cubo, la lunghezza dello spigolo  $s$  dell'ottaedro è  $s = \frac{l}{2}\sqrt{2}$  e si ottiene facilmente se consideriamo una sezione piana parallela a due facce del cubo passante per il suo centro (fig. 2): si ha  $\frac{l}{2} = s \cos \frac{\pi}{4}$ .



**Fig. 2.** Sezione piana centrale del cubo.

Poiché l'ottaedro è l'unione di due piramidi congruenti aventi ciascuna come superficie di base un quadrato di lato  $s$ , con area  $\mathcal{A} = s \cdot s = s^2 = \frac{l^2}{2}$ , ed altezza  $h = \frac{l}{2}$ , il volume dell'ottaedro risulta

$$\mathcal{V}(\text{ottaedro}) = 2 \left[ \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A} \cdot h \right] = 2 \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{l^3}{6}$$

cosicché il rapporto richiesto tra i volumi dei due solidi è

$$\frac{\mathcal{V}(\text{ottaedro})}{\mathcal{V}(\text{cubo})} = \frac{(l^3/6)}{l^3} = \frac{1}{6}.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Dato che

$$\text{sen } 55^\circ = \text{sen}(90^\circ - 35^\circ) = \text{cos } 35^\circ$$

in quanto vale l'identità  $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$  tra angoli complementari, l'espressione proposta dal quesito si riscrive

$$\text{sen}^2 35^\circ + \text{sen}^2 55^\circ = \text{sen}^2 35^\circ + \text{cos}^2 35^\circ.$$

Poiché l'identità goniometrica fondamentale  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$  vale per  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , segue che

$$\text{sen}^2 35^\circ + \text{sen}^2 55^\circ = \text{sen}^2 35^\circ + \text{cos}^2 35^\circ = 1.$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Il dominio della funzione

$$f(x) = \text{arctg } x - \text{arctg } \frac{x-1}{x+1}$$

è evidentemente l'insieme  $D = \mathbb{R} - \{-1\}$  in quanto il dominio dell'arcotangente coincide con  $\mathbb{R}$  e l'unica condizione da imporre è l'esistenza del rapporto nel secondo addendo (cioè  $x + 1 \neq 0$ ). Poiché in tale dominio la sua derivata prima risulta

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left[ \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} \right]$$

e questa, dopo qualche passaggio,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1 + 2x + x^2 + 1 - 2x} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2(1+x^2)} = 0 \end{aligned}$$

si riduce ad essere nulla per  $\forall x \in D$ , possiamo applicare il teorema che stabilisce la *costanza di una funzione in un intervallo*  $I = [a, b]$  nell'ipotesi che questa abbia *derivata nulla in  $I$* .

Pertanto possiamo ritenere la  $f(x)$  costante e quindi indipendente da  $x$

- in sottoinsiemi del dominio  $D$  del tipo  $I_1 = [a, b]$  dove  $a > -1 \wedge b > -1$  oppure
- in intervalli  $I_2 = [c, d]$  con  $c < -1 \wedge d < -1$ .

Non potremo invece considerarla costante in intervalli  $[a, b]$  dove sia  $a < -1 \wedge b > -1$  in quanto in tali intervalli la  $f(x)$  non è derivabile in tutti i punti interni e quindi non soddisfa alle ipotesi del teorema. Il testo del quesito appare perciò fuorviante in quanto chiede di dimostrare la costanza di  $f(x)$  senza alcuna condizione (e pertanto, si ritiene, nel dominio  $D$ ).

Per calcolare il valore costante in intervalli del tipo  $I_1$  con  $x > -1$ , è sufficiente calcolare la funzione in un punto qualsiasi, per esempio,  $x = 0$ . Segue che

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \left( \frac{0-1}{0+1} \right) = 0 - \operatorname{arctg}(-1) = - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Se invece  $x < -1$ , per esempio  $x = -\sqrt{3}$ , risulta

$$f(-\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} \left( \frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} \right) = -\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right)$$

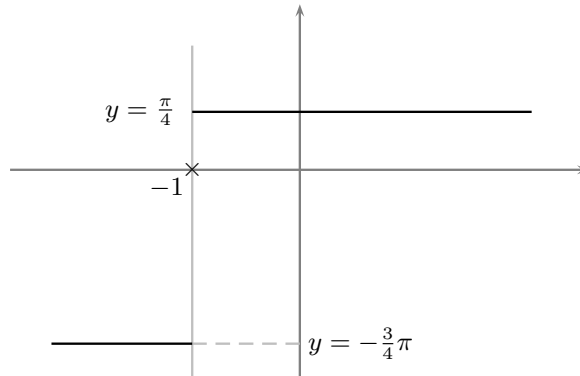
e poiché

$$\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right) = \frac{5}{12}\pi$$

si ha

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{12}\pi = -\frac{3}{4}\pi.$$

Con queste informazioni possiamo proporre nella figura che segue il grafico della funzione  $f(x)$ .



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $f(x)$ .

# ESAME 2005 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## • **Problema n. 1**

Nel piano  $Oxy$  sono date le curve  $\lambda$  e  $r$  d'equazioni:

$$\lambda : x^2 = 4(x - y) \quad \text{e} \quad r : 4y = x + 6.$$

1. Si provi che  $\lambda$  e  $r$  non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto  $P \in \lambda$  che ha distanza minima da  $r$ .
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da  $\lambda$  e dalla retta  $s$ , simmetrica di  $r$  rispetto all'asse  $x$ .
4. Si determini il valore di  $c$  per il quale la retta  $y = c$  divide a metà l'area della regione  $S$  del I quadrante compresa tra  $\lambda$  e l'asse  $x$ .
5. Si determini il volume del solido di base  $S$  le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse  $x$  sono quadrati.

Soluzione

## • **Problema n. 2**

Si consideri la funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[0, +\infty[$  da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \log x) + 1, \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia  $C$  la sua curva rappresentativa nel riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se  $f$  è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione  $f(x) = 0$  ha, nell'intervallo  $[0, +\infty[$ , un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

3. Si disegni  $C$  e si determini l'equazione della retta  $r$  tangente a  $C$  nel punto di ascissa  $x = 1$ .
4. Sia  $n$  un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di  $n$ , l'area  $A_n$  del dominio piano delimitato dalla curva  $C$ , dalla retta tangente  $r$  e dalle due rette:  $x = \frac{1}{n}$  e  $x = 1$ .
5. Si calcoli il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  e si interpreti il risultato ottenuto.

Soluzione

**Questionario**

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\sin 18^\circ$  e  $\sin 36^\circ$ .

Soluzione

2. Si dia una definizione di retta tangente. Successivamente, si dimostri che la curva  $y = x \sin x$  è tangente alla retta  $y = x$  quando  $\sin x = 1$  ed è tangente alla retta  $y = -x$  quando  $\sin x = -1$ .

Soluzione

3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali  $\sigma$  e  $\phi$  la cui composizione  $\sigma \circ \phi$  dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso  $\phi \circ \sigma$ .

Soluzione

4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

Soluzione

5. Come si definisce e quale è l'importanza del numero  $e$  di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.

Soluzione

6. Le rette  $r$  e  $s$  d'equazioni rispettive  $y = 1 + 2x$  e  $y = 2x - 4$  si corrispondono in una omotetia  $\sigma$  di centro l'origine  $O$ . Si determini  $\sigma$ .

Soluzione

7. Come si definisce  $n!$  ( $n$  fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

Soluzione

8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche  $x = e^t + 2$  e  $y = e^{-t} + 3$  nel suo punto di coordinate  $(3, 4)$ .

Soluzione

9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

Soluzione

10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Per provare che le curve  $\lambda : x^2 = 4(x - y)$  e  $r : 4y = x + 6$ , rispettivamente una parabola e una retta non hanno punti in comuni è sufficiente dimostrare che il sistema

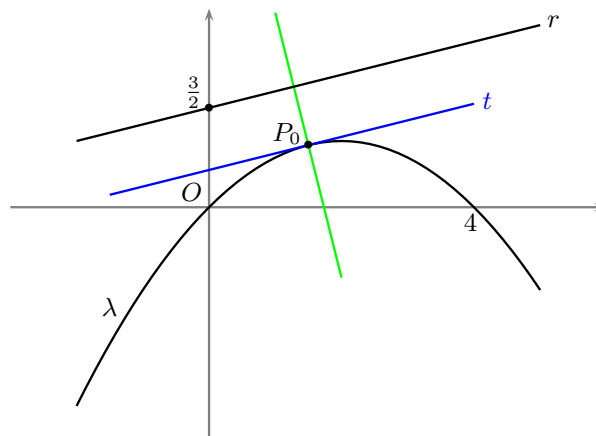
$$\begin{cases} x^2 = 4(x - y) \\ 4y = x + 6 \end{cases}$$

non possiede soluzioni reali. Difatti sostituendo la seconda nella prima riscritta

come  $x^2 = 4x - 4y$ , sia ha  $x^2 = 4x - x - 6$  ossia  $x^2 - 3x + 6 = 0$ . Dato che questa equazione ha un discriminante negativo,  $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$ , le due curve non possono intersecarsi.

2. Per determinare il punto  $P(x_0, y_0) \in \lambda$  che possiede distanza minima si può sfruttare la conoscenza del grafico della parabola.

Difatti riscritta  $\lambda$  come  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ , appare evidente che questa interseca l'asse delle  $x$  nell'origine e nel punto di ascissa 4 (ponendo  $y = 0$  si ottiene  $x = 0$  e  $x = 4$ ). Il suo vertice è il punto  $V(2, 1)$  e la concavità è rivolta costantemente verso il basso in quanto il coefficiente di  $x^2$ ,  $-\frac{1}{4}$ , risulta negativo (fig. 1).



**Fig. 1.** Parabola  $\lambda$  e retta  $r$ .

Da quest'ultimo fatto, segue che il punto  $P_0$  di  $\lambda$  sarà caratterizzato dall'aver la retta tangente  $t$  parallela alla retta  $r : y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$  (che pure viene rappresentata in fig. 1). Lo si determina quindi ponendo la derivata di  $\lambda$  uguale al coefficiente angolare di  $r$  (che pure è la derivata di  $r$ ). Pertanto

$$y' = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

La corrispondente ordinata è

$$y_0 = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{15}{16}$$

cosicché  $P_0 \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{16}\right)$ .

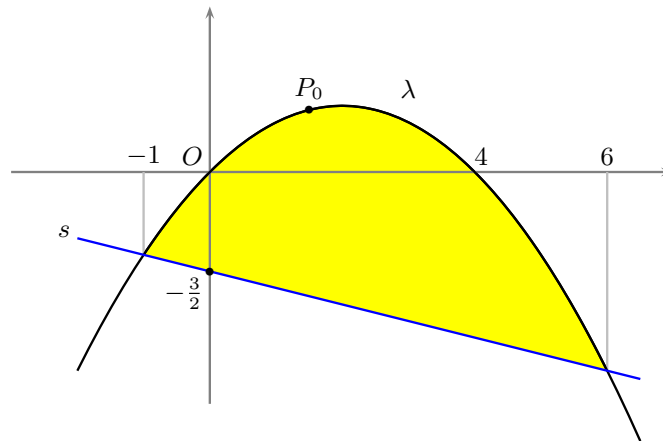
3. Ottenuta la retta  $s$  applicando la trasformazione di simmetria

$$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

risulta

$$s = \sigma_x(r) \implies 4(-y') = x' + 6 \quad \text{da cui} \quad y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$$

dove nell'ultima espressione si sono lasciati cadere gli apici sostituendo alla generica coppia  $(x', y')$  la coppia  $(x, y)$ .



**Fig. 2.** Parabola  $\lambda$ , retta  $s$  e regione racchiusa.

I punti di intersezione tra  $\lambda$  e  $s$  si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

da cui l'equazione risolvente

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \quad -x^2 + 4x = -x - 6 \quad x^2 - 5x - 6 = 0$$

che possiede le soluzioni  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 6$ . L'area racchiusa tra queste curve (fig. 2) è fornita dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^6 \left( -\frac{1}{4}x^2 + x \right) - \left( -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \right) dx$$

ma, più direttamente, essendo la regione un segmento parabolico, si può utilizzare la formula di Archimede generalizzata cioè

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6} \cdot |a| \cdot |x_2 - x_1|^3$$

che fornisce l'area di un segmento parabolico in termini del coefficiente  $a$  del termine quadratico della parabola (nel nostro caso  $a = -\frac{1}{4}$ ) e delle ascisse,  $x_1$  e  $x_2$ , dei punti di intersezione tra retta e parabola. Risulta quindi

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot |6 - (-1)|^3 = \frac{1}{24} \cdot 7^3 = \frac{343}{24}.$$

4. La regione  $\mathcal{S}$  è ancora un segmento parabolico compreso tra l'asse delle  $x$  e  $\lambda$  con ascisse degli estremi pari a 0 e a 4 (in colore giallo-verde in fig. 3). Riutilizzando la formula di Archimede la sua area risulta

$$\mathcal{A}_S = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot |4 - 0|^3 = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}.$$

Per determinare l'area della regione compresa tra la retta  $y = c$  e  $\lambda$  (in giallo in fig. 3) sono necessarie le ascisse dei punti di intersezione tra queste due curve e, in particolare, la loro differenza visto che faremo uso ancora della formula di Archimede. Queste si determinano risolvendo il sistema

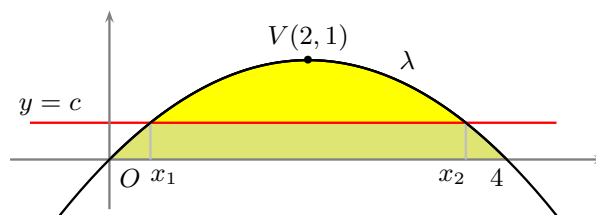


Fig. 3. Parabola  $\lambda$ , retta  $y = c$  e segmenti parabolici.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = c \end{cases}$$

da cui

$$c = -\frac{1}{4}x^2 + x \implies \frac{1}{4}x^2 - x + c = 0,$$

e sfruttando l'espressione che fornisce direttamente la differenza delle radici di una equazione di II grado  $|x_2 - x_1| = \sqrt{\Delta}/|a|$  risulta

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{1-c}}{(1/4)} = 4\sqrt{1-c}$$

con  $0 < c < 1$  dovendo la retta  $y = c$  appartenere al primo quadrante ed intersecare  $\lambda$  (l'ordinata del vertice  $V$  di  $\lambda$  è pari ad 1). L'area del segmento parabolico (in giallo in fig. 3) è quindi

$$\mathcal{A}_c = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot |x_2 - x_1|^3 = \frac{1}{24} \cdot |4\sqrt{1-c}|^3$$

e la condizione imposta dal testo si traduce nell'espressione

$$\mathcal{A}_c = \frac{1}{2} \mathcal{A}_S \quad \text{che esplicitamente diviene} \quad \frac{1}{24} \cdot |4\sqrt{1-c}|^3 = \frac{4}{3}.$$

Osservata la positività del termine entro valore assoluto si può riscrivere quest'ultima equazione come

$$(\sqrt{1-c})^3 = \frac{1}{2}$$

per cui, estratta la radice cubica di entrambi i membri

$$\sqrt{1-c} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

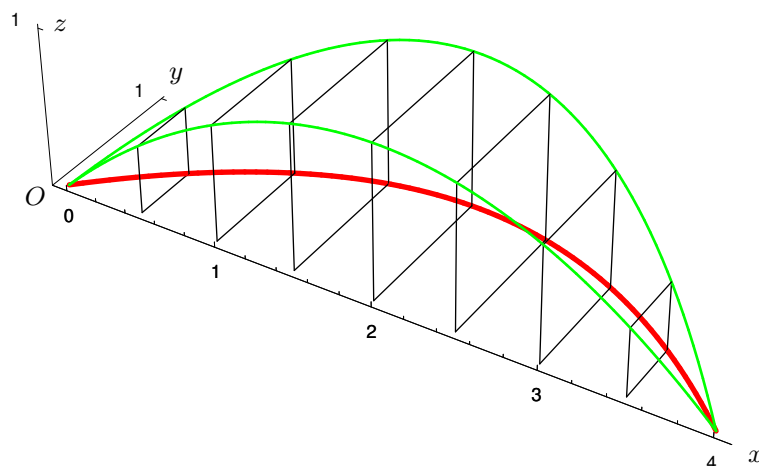
ed elevati al quadrato, otteniamo

$$1-c = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \quad \implies \quad c = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0,37.$$

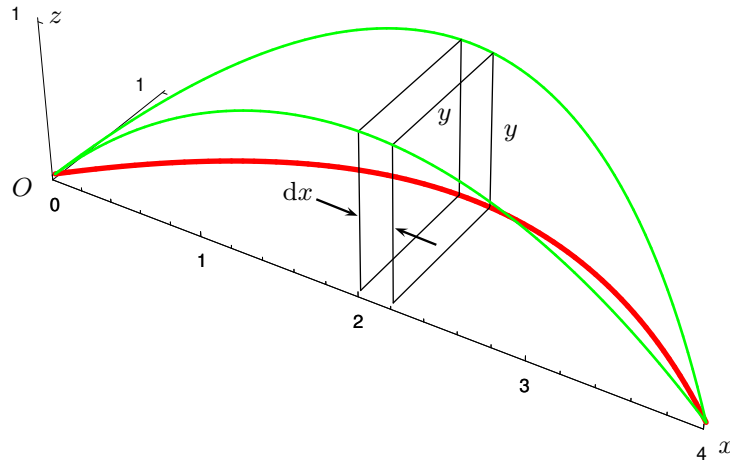
5. Alcune sezioni del solido richiesto sono rappresentate in fig. 4 dove in colore rosso appare sul piano orizzontale  $(x, y)$  l'arco di parabola  $\lambda$  compreso in  $[0, 4]$ . Il calcolo del suo volume  $\mathcal{V}$  può essere ricondotto all'integrale definito

$$\mathcal{V} = \int_0^4 \left( -\frac{1}{4}x^2 + x \right)^2 dx$$

per le ragioni esposte di seguito.



**Fig. 4.** Solido di base  $S$  e sue sezioni quadrate.



**Fig. 5.** Elemento differenziale di volume.

Difatti, se  $dx$  è il differenziale della variabile indipendente  $x$ , il volume infinitesimo di un prisma a base quadrata di lato  $y$  e di altezza  $dx$  risulta (fig. 5)

$$dV = y^2 dx = \left( -\frac{1}{4}x^2 + x \right)^2 dx$$

cosicché il volume totale si ottiene integrando la precedente tra i limiti 0 e 4 ossia

$$V = \int_0^4 \left( -\frac{1}{4}x^2 + x \right)^2 dx = \int_0^4 \left( \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + x^2 \right) dx.$$

Ottenuta facilmente una primitiva,

$$\int \left( \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + x^2 \right) dx = \frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} + c,$$

il calcolo numerico fornisce

$$\begin{aligned} V &= \left[ \frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{4^5}{80} - \frac{4^4}{8} + \frac{4^3}{3} \\ &= \frac{64}{5} - 32 + \frac{64}{3} = \frac{192 - 480 + 320}{15} = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

La soluzione di questo problema è del tutto simile a quella **proposta** per l'esame dei corsi di ordinamento e si differenzia solo quando, nel secondo quesito, si richiede una stima con due cifre decimali corrette della radice dell'equazione

$$f(x) = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \log x) + 1 = 0.$$

Riprendendo quanto già discusso, ricordiamo che il grafico della funzione  $f(x)$  è, per  $x > e$ , decrescente. Poiché inoltre risulta

$$f(4) = 25 - 16 \ln 4 \approx 2,8192, \quad f(5) = \frac{77}{2} - 25 \ln 5 \approx -1.7359 < 0$$

la radice  $\alpha$  deve appartenere all'intervallo  $\alpha \in ]4, 5[$ . Cerchiamo dapprima una approssimazione con il metodo di bisezione. Calcolando  $f$  nel punto medio si ha

$$f\left(\frac{4+5}{2}\right) = f(4,5) = 0,917433 > 0 \implies 4,5 < \alpha < 5.$$

Alla seconda iterazione si ha

$$f\left(\frac{4,5+5}{2}\right) = f(4,75) = -0,311888 < 0 \implies 4,5 < \alpha < 4,75.$$

Nella tabella seguente riassumiamo i precedenti due risultati iterando poi il metodo fino ad ottenere la seconda cifra decimale corretta ( $n$ , rappresenta l'ordine dell'iterazione,  $a$  e  $b$  sono gli estremi dell'intervallo e  $x_M$  il loro punto medio).

$n$	$a$	$b$	$x_M$	$f(x_M)$
1	4	5	4,5	0,917433
2	4,5	5	4,75	-0,311888
3	4,5	4,75	4,625	0,326701
4	4,625	4,75	4,6875	0,0134411
5	4,6875	4,75	4,71875	-0,147708
6	4,6875	4,71875	4,70313	-0,0667556
7	4,6875	4,70313	4,69531	-0,0265628
8	4,6875	4,69531	4,69141	-0,00653728
9	4,6875	4,69141	4,68945	0,00345781
10	4,68945	4,69141	4,69043	-0,00153826
11	4,68945	4,69043	4,68994	0,000960143
12	4,68994	4,69043	4,69019	-0,000288967
13	4,68994	4,69019	4,69006	0,000335611
14	4,69006	4,69019	4,69012	0,0000233275

Come si vede per giungere a definire correttamente la seconda cifra decimale sono necessarie ben 14 iterazioni del metodo per cui la convergenza della successione verso  $\alpha$  non si può dire particolarmente veloce. Per confronto applichiamo invece il metodo di Newton (o delle tangenti).

Questo si fonda sull'iterazione della espressione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a partire dall'estremo di un intervallo dove la funzione  $f$  assume valori di segno opposto e supposto che, nei punti interni dello stesso, le derivate prima e seconda non siano nulle. Tali condizioni sono soddisfatte dalla funzione data per cui, ottenuta l'espressione esplicita di

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{2}x_n^2(3 - 2 \ln x_n) + 1}{2x_n(1 - \ln x_n)}$$

che si può riscrivere come

$$x_{n+1} = \frac{2 - x_n^2(1 - 2 \ln x_n)}{4x_n(\ln x_n - 1)} = g(x_n)$$

e posto  $x_0 = 4$ , il calcolo dei primi valori della successione  $\{x_n\}$  fornisce

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 - 16(1 - 2 \ln 4)}{16(\ln 4 - 1)} = g(4) \approx 4,91229 \\ x_2 &= g(4,91229) \approx 4,70351 \\ x_3 &= g(4,70351) \approx 4,69018 \\ x_4 &= g(4,69018) \approx 4,69013. \end{aligned}$$

Appare in tal modo evidente come già alla terza iterazione il valore fornito da questo metodo approssimi correttamente  $\alpha$  alla seconda cifra decimale (ma a ben vedere, l'approssimazione è corretta pure fino alla quarta cifra). Quanto osservato è, a meno di cadere in casi particolari, una proprietà generale: il metodo di Newton fornisce approssimazioni numeriche migliori con un numero inferiore di iterazioni cioè, come si suol dire, converge più rapidamente del metodo di bisezione.

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 1.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione geometrica stabilisce che la retta  $t$  è tangente ad una curva  $C$  in un suo punto  $P$  se e solo esiste la posizione limite della retta secante  $s$  che unisce i punti  $P$  e  $Q \in C$  al tendere comunque di  $Q$  a  $P$ . In forma del tutto simbolica potremo scrivere

$$P \in C \wedge Q \in C \quad t = \lim_{Q \rightarrow P} s.$$

In altri termini, una retta tangente interseca una curva  $C$  in almeno due punti coincidenti. A livello algebrico, il sistema tra le equazioni rappresentative della

retta  $t$  e della curva  $C$  deve presentare una soluzione con molteplicità pari, o maggiore, a due: il punto corrispondente a questa soluzione sarà il punto di tangenza.

Tutto ciò si può generalizzare ed estendere a due curve qualsiasi,  $C_1$  e  $C_2$ . Queste saranno reciprocamente tangenti in un loro punto  $P$  se e solo se possiedono in questo punto, la medesima retta tangente. Poiché la ricerca della retta tangente ad una curva descritta dall'equazione  $y = f(x)$  è risolto non appena si conosca la derivata  $y' = f'(x)$ ,  $C_1$  e  $C_2$  saranno reciprocamente tangenti in un punto di ascissa  $x_0$  se risulta

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

dove  $y_1 = f(x)$  e  $y_2 = g(x)$  sono le rispettive equazioni rappresentative.

Per la parte restante del quesito si veda quanto già esposto nel quesito 3 dei corsi di ordinamento.

### Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Nella teoria delle trasformazioni geometriche del piano, la composizione  $\sigma \circ \phi$  di due simmetrie assiali,  $\phi$  di asse  $r$  e  $\sigma$  di asse  $s$ , si riduce ad una traslazione quando gli assi  $r$  ed  $s$  di ciascuna simmetria sono paralleli (nel caso siano incidenti, il prodotto di due simmetrie assiali è invece una rotazione). Inoltre, il vettore che caratterizza la traslazione risulta ortogonale alle rette  $r$  ed  $s$ , possiede modulo pari al doppio della distanza tra questi due assi ed è orientato nel verso che va da  $r$  ad  $s$ .

Nel caso proposto dal quesito, il vettore rappresentativo della traslazione risulta  $\vec{v} = (\sqrt{5}, -\sqrt{5})$  (fig. 1) per cui dovremo scegliere delle simmetrie con assi

- a) tra loro paralleli,
- b) aventi distanza  $d$  pari a

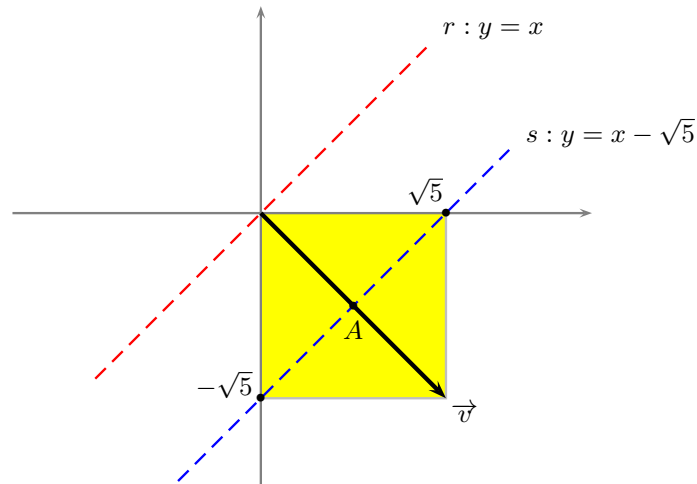
$$d = \frac{1}{2}|\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

- c) ed infine, perpendicolari  $\vec{v}$ .

Vi sono evidentemente infinite possibilità di individuare le trasformazioni richieste (e difatti il testo chiede le equazioni di due simmetrie) cosicché effettueremo le scelte che ci appaiono più semplici ed opportune.

Poiché  $\vec{v}$  forma un angolo di  $-45^\circ$  con il semiasse positivo delle ascisse in quanto le sue componenti sono uguali in valore assoluto (fig. 1), tra le rette perpendicolari a  $\vec{v}$  la più immediata appare la bisettrice del I e III quadrante per cui le equazioni della simmetria  $\phi$  (la prima che andrà applicata) avente tale retta come asse sono conosciute e consistono nella coppia

$$\sigma : \begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$$



**Fig. 1.** Vettore  $\vec{v}$  e assi di simmetria.

Una retta  $s$ , parallela ad  $r$  che abbia da questa la distanza  $d$  calcolata sopra risulta quella che passa per il punto  $A(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ , centro del quadrato individuato dal vettore  $\vec{v}$  e rappresentato in colore nella figura 1. L'equazione di  $s$  è  $s: y = x - \sqrt{5}$  dovendo intersecare l'asse  $y$  nel punto di ordinata  $-\sqrt{5}$ .

Per ricavare le equazioni della simmetria assiale  $\sigma$  avente  $s$  come asse va ricordato che, in una simmetria assiale, il punto medio del segmento che collega il punto originario  $P(x, y)$  con la sua immagine  $P'(x', y')$  deve appartenere all'asse e cioè  $M(x_M, y_M) \in s$ . Segue quindi che, una prima condizione, è

$$y_M = x_M - \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y' + y}{2} = \left( \frac{x' + x}{2} \right) - \sqrt{5}.$$

La seconda condizione esprime la perpendicolarità del segmento di estremi  $P$  e  $P'$  con la retta  $s$  ossia il coefficiente angolare della retta per  $P$  e  $P'$  dev'essere l'opposto del reciproco del coefficiente angolare,  $m_s = 1$ , di  $s$ . Segue che

$$\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{m_s} = -1.$$

Moltiplicando le due equazioni appena discusse per i denominatori si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y' + y = x' + x - 2\sqrt{5} \\ y' - y = -x' + x \end{cases}$$

per cui, sommando membro a membro, si ottiene  $2y' = 2x - 2\sqrt{5}$  cioè  $y' = x - \sqrt{5}$ . Sostituendo nella prima risulta  $x - \sqrt{5} + y = x' + x - 2\sqrt{5}$  da cui  $x' = y + \sqrt{5}$ .

In definitiva due possibili trasformazioni sono:

$$\phi : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \sigma : \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases}.$$

La composizione di  $\phi$  e  $\sigma$  risulta formalmente

$$\sigma \circ \phi : P(x, y) \xrightarrow{\phi} P(x', y') \xrightarrow{\sigma} P''(x'', y'')$$

mentre le equazioni sono

$$\sigma \circ \phi : P(x, y) \xrightarrow{\phi} P' = \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \xrightarrow{\sigma} P'' = \begin{cases} x'' = y' + \sqrt{5} \\ y'' = x' - \sqrt{5} \end{cases}$$

per cui, posto in luogo di  $x'$  e  $y'$  le espressioni fornite da  $\phi$  si ottiene

$$\sigma \circ \phi : \begin{cases} x'' = x + \sqrt{5} \\ y'' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

che costituisce la traslazione aspettata.

La composizione nell'ordine inverso risulta

$$\phi \circ \sigma : P(x, y) \xrightarrow{\sigma} P(x', y') \xrightarrow{\phi} P''(x'', y'')$$

e le sue equazioni sono

$$\phi \circ \sigma : P(x, y) \xrightarrow{\sigma} P' = \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases} \xrightarrow{\phi} P'' = \begin{cases} x'' = y' \\ y'' = x' \end{cases}$$

da cui

$$\phi \circ \sigma : \begin{cases} x'' = x - \sqrt{5} \\ y'' = y + \sqrt{5} \end{cases}$$

che rappresentano la traslazione di vettore  $\vec{t} = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) = -\vec{v}$ , evidentemente opposto a  $\vec{v}$ .

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello assegnato nell'esame di ordinamento: si veda la discussione là riportata del quesito 2.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione del numero  $e$  di Nepero è fornita dal limite della successione

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (1)$$

oppure, in luogo della successione, si può considerare pure il limite della funzione di variabile reale

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (2)$$

L'importanza in analisi matematica di tale numero reale irrazionale

$$e = 2,7182818184\dots$$

consiste nel fatto che la funzione logaritmica ed esponenziale soddisfano in tale base privilegiata ad importanti relazioni quali ad esempio

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad D(e^x) = e^x.$$

La prima permette di definire formalmente  $e$ , *naturalmente*, la funzione  $f(x) = \ln x$ , la seconda mette in evidenza come la funzione esponenziale a base naturale,  $y = e^x$ , abbia se stessa come derivata. Si può dimostrare che la semplice equazione differenziale  $y' = y$  è quindi risolta solo da questa funzione. Nelle scienze fisiche o biologiche le leggi del decadimento di sostanze radioattive o quelle della crescita o, ancora, decadimento, di organismi trovano nelle funzioni esponenziali a base  $e$  la loro rappresentazione più semplice.

La più semplice procedura per calcolare  $e$  fa uso della sua definizione pertanto si dovranno assegnare valori crescenti di  $n$  per ottenere approssimazioni  $a_n$  per difetto di  $e$  dato che la definizione (1) rappresenta il limite di una successione a termini positivi crescente. Volendo disporre di approssimazioni  $b_m$  per eccesso converrà far uso del secondo limite calcolando l'espressione  $(1 + 1/x)^x$  con valori di  $x$  negativi e, via via, decrescenti: pertanto posto  $x = -m$  risulta

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left[1 + \frac{1}{(-m)}\right]^{-m} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m}$$

con  $x < -1$  cioè  $m > 1$ . Le due tabelle sottostanti riportano le prime 10 approssimazioni al numero  $e$ .

$n$	$a_n < e$
1	2
2	2,35
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
6	2,52163
7	2,54650
8	2,56578
9	2,58117
10	2,59374

$m$	$b_m > e$
2	4
3	3,375
4	3,16049
5	3,05176
6	2,98598
7	2,94190
8	2,91029
9	2,88651
10	2,86797
11	2,85312

Appare evidente come la convergenza ad  $e$  sia molto lenta: difatti un calcolo automatico per indici molto grandi fornisce le ulteriori stime

$n$	$a_n < e$	$m$	$b_m > e$
1000	2,71692	1000	2,719642
2000	2,71760	2000	2,718962
3000	2,71783	3000	2,718735
4000	2,71794	4000	2,718622
5000	2,71801	5000	2,718554
6000	2,71805	6000	2,718508
7000	2,71809	7000	2,718476
8000	2,71811	8000	2,718452
9000	2,71813	9000	2,718433
10000	2,71815	10000	2,718418

che mostrano come si possano ottenere le prime tre cifre decimali corrette solo per indici prossimi a 5000. Altri metodi per accelerare la convergenza fanno uso di nozioni non comprese nei programmi.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Le equazioni di una omotetia di centro  $C(x_0, y_0)$  e rapporto  $k \neq 0$  sono

$$\sigma_C : \begin{cases} x' = k(x - x_0) + x_0 \\ y' = k(y - y_0) + y_0 \end{cases}$$

cosicché se  $C \equiv O$  queste si riducono alle

$$\sigma : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases}$$

Supposto che sia  $s = \sigma(r)$  con  $r : y = 2x + 1$  e  $s : y = 2x - 4$  e cioè che la retta  $s$  sia l'immagine di  $r$ , riscriviamo l'equazione di  $s$  in termini delle coordinate del punto immagine  $(x', y')$  ossia  $s : y' = 2x' - 4$ . Utilizzando le equazioni di  $\sigma$  e sostituendole in  $y' = 2x' - 4$  si ha,  $ky = 2kx - 4$ , da cui

$$y = 2x - \frac{4}{k}$$

ottenuta dividendo per  $k \neq 0$  (in caso contrario avremmo una trasformazione singolare). Questa equazione deve coincidere con quella di  $r$  ma, notato che entrambe possiedono il medesimo coefficiente angolare, l'unica condizione che va posta riguarda i termini noti per cui dev'essere

$$-\frac{4}{k} = 1 \quad \implies \quad k = -4.$$

La trasformazione richiesta è in definitiva

$$\sigma : \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}$$

e rappresenta una omotetia inversa avendo  $k < 0$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico al quesito 6 dei corsi di ordinamento cui si rimanda.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

La curva  $\mathcal{C}$  è rappresentata in forma parametrica dalla coppia di equazioni

$$\begin{cases} x = e^t + 2 \\ y = e^{-t} + 3 \end{cases}$$

e pertanto non nella forma, più frequente ma meno generale, che vede la variabile reale  $y$  esplicitata a primo membro di un'equazione dove, al secondo, compare solo la variabile indipendente  $x$  ossia  $y = f(x)$ .

Dovendo ricondurci a quest'ultima forma in quanto è in questa forma che si è interpretata la derivata in un punto come il coefficiente angolare della retta tangente, eliminiamo il parametro  $t$  esplicitando  $e^t$  dalla prima equazione parametrica: si ha  $e^t = x - 2$  con  $x - 2 > 0$  in quanto  $e^t > 0$ . Sostituendo questa espressione in

$$y = e^{-t} + 3 = \frac{1}{e^t} + 3 = \frac{1}{x - 2} + 3 = \frac{3x - 5}{x - 2} = f(x)$$

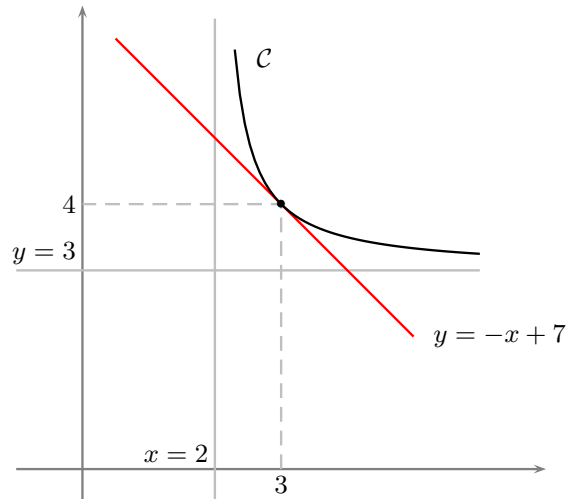
emerge che l'equazione esplicita ottenuta rientra nella forma che caratterizza le funzioni omografiche. Considerando la condizione  $x > 2$ , il grafico di  $\mathcal{C}$  è pertanto quello di un ramo di iperbole equilatera avente per asintoto verticale la retta  $x = 2$  e asintoto orizzontale  $y = 3$ , quest'ultimo ottenuto eseguendo il rapporto dei coefficienti dei termini di primo grado del numeratore e del denominatore (lo si può dedurre anche dalla forma  $y = \frac{1}{x-2} + 3$  della funzione). Poiché sappiamo che  $(3, 4) \in \mathcal{C}$  il grafico di  $\mathcal{C}$  è quello proposto in fig. 1.

È ora immediato determinare l'equazione della retta tangente: difatti, calcolata la derivata prima

$$y' = f'(x) = D\left(\frac{1}{x-2} + 3\right) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

risulta

$$f'(3) = -\frac{1}{(3-2)^2} = -1$$



**Fig. 1.** Grafico della curva  $\mathcal{C}$  e retta tangente.

per cui la retta tangente ha equazione

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \quad \Longrightarrow \quad y - 4 = -(x - 3)$$

ossia  $y = -x + 7$  (fig. 1).

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Per determinare la probabilità che in un lancio di due dadi si abbia come risultato 10 devono evidentemente uscire le seguenti tre coppie:  $(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})$  e  $(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})$ . In modo più formale, indicata con  $S$  la variabile aleatoria definita come la somma dei numeri mostrati dai due dadi, si vuole  $P(S = 10)$ . Per quanto detto, all'evento  $X = 10$  concorrono i seguenti tre elementi dello spazio campionario

$$\{S = 10\} = \{(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})\}$$

e dato che tale spazio (detto anche *spazio degli esiti*) è costituito da  $6 \times 6 = 36$  elementi tutti equiprobabili, la probabilità cercata risulta

$$P(S = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Se ora i lanci vengono ripetuti si entra nello schema delle prove ripetute in ciascuna delle quali i soli esiti possibili sono di successo o insuccesso. In una prova, l'evento  $S = 10$  è quindi considerato come un successo e la probabilità  $p$  che ciò avvenga è evidentemente quella determinata appena sopra

$$p = P(S = 10) = \frac{1}{12},$$

mentre l'insuccesso, evento complementare, possiede probabilità

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Introdotta la variabile aleatoria  $K$  per denotare il numero di successi, la probabilità che tale variabile assuma il valore  $K = k$  su  $n$  ripetizioni indipendenti del lancio è fornita dalla distribuzione binomiale o di Bernoulli e risulta

$$P(K = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Poiché il quesito chiede il valore di  $P(K = 2)$  su un totale di  $n = 6$  prove, discende

$$P(K = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^{6-2} = 15 \cdot \frac{1}{144} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^4 \approx 0,0735.$$

La terza domanda del quesito richiede il valore della probabilità  $P(K \geq 2)$  sempre su 6 prove. Poiché in una serie di 6 prove gli eventi caratterizzati da  $K = 2$ ,  $K = 3$ ,  $K = 4$ ,  $K = 5$  e  $K = 6$  sono a due a due disgiunti, la probabilità richiesta si può calcolare ricorrendo al teorema delle probabilità totali per cui

$$P(K \geq 2) = P(K = 2) + P(K = 3) + P(K = 4) + P(K = 5) + P(K = 6).$$

Possiamo comunque seguire anche una via alternativa considerando che l'evento contrario (o complementare),  $K < 2$ , si può decomporre negli eventi

$$\{K < 2\} = \{K = 0\} \cup \{K = 1\}$$

dove a secondo membro appare l'unione di eventi disgiunti. La sua probabilità è quindi  $P(K < 2) = P(K = 0) + P(K = 1)$  e il calcolo di  $P(K \geq 2)$  può ora svolgersi in forma abbreviata. Difatti per il teorema dell'evento complementare risulta

$$\begin{aligned} P(K \geq 2) &= 1 - P(K < 2) \\ &= 1 - [P(K = 0) + P(K = 1)] \\ &= 1 - P(K = 0) - P(K = 1), \end{aligned}$$

che esplicitamente fornisce

$$\begin{aligned} P(K \geq 2) &= 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^{6-0} - \binom{6}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^{6-1} \\ &= 1 - \frac{11^6}{12^6} - 6 \cdot \frac{11^5}{12^6} \approx 0,0831. \end{aligned}$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito fornisce un valore per l'età media di una popolazione di un Paese e, assieme, propone implicitamente una partizione della stessa popolazione in due classi:

- la prima composta da coloro che hanno un'età maggiore di 60 anni costituisce il 40% del totale,
- la seconda è invece composta da coloro con un'età inferiore ai 60 anni e, evidentemente, rappresenta il restante 60%.

La media fornita va quindi interpretata come una media pesata alla quale contribuiscono due elementi distinti ciascuno con un suo peso.

Formalizziamo il problema rappresentando la prima classe con la variabile  $x$ : questa è costituita da coloro che hanno un'età di  $x$  anni con  $x \geq 60$  e contribuisce alla media della popolazione con un peso  $p_x$  pari a  $p_x = 0,4 = 40/100$ . Analogamente la seconda è espressa dalla variabile  $y$  con peso  $p_y = 0,6 = (100 - 40)/100$  ed è formata da coloro che hanno un'età di  $y$  anni con  $y < 60$  (ed ovviamente  $y > 0$ ). La media pesata  $m$  con tale suddivisione è data dall'espressione

$$m = \frac{p_x x + p_y y}{p_x + p_y}$$

per cui sostituendo  $m = 30$  anni si giunge alla

$$\frac{0,4x + 0,6y}{0,4 + 0,6} = 0,4x + 0,6y = 30 \text{ anni.}$$

Poiché il testo fornisce una condizione solo sulla  $x$ , imponiamo su questa variabile la condizione  $x \geq 60$  per poi dedurre una condizione sull'età  $y$  della restante parte di popolazione. Difatti, esplicitata la  $x$  dalla precedente,

$$x = \frac{30 - 0,6y}{0,4}$$

e posto  $x \geq 60$ , discende

$$\frac{30 - 0,6y}{0,4} \geq 60$$

da cui, moltiplicando per 0,4 risulta

$$30 - 0,6y \geq 24 \quad \implies \quad -0,6y \geq 24 - 30 \quad \implies \quad 0,6y \leq 6.$$

L'ultimo risultato comporta per l'età  $y$  il risultato  $y \leq 10$  che costituisce pure la risposta al quesito.

Se quindi il 60% della popolazione possiede un'età di 10 anni o inferiore, allora la media della popolazione potrà essere di 30 anni. La risposta è quindi affermativa.

Se comunque vogliamo interpretare questi risultati come effettivamente realizzabili la risposta, salvo casi molto particolari, non può che essere negativa. Difatti la popolazione di un Paese è costituita da tutte le classi d'età per cui è praticamente impossibile che vi siano persone unicamente con un'età maggiore di 60 anni o minore di 10 senza alcun rappresentante delle età intermedie. Ma se il Paese è molto piccolo...

# ESAME 2006

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • **Problema n. 1**

1) Un filo metallico di lunghezza  $\lambda$  viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarla per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Soluzione

## • **Problema n. 2**

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  determinate da  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = ax^2$ , essendo  $a$  un parametro reale e il logaritmo in base  $e$ .

1. Si discuta, al variare di  $a$ , l'equazione  $\log x = ax^2$  e si dica, in particolare, per quale valore di  $a$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto  $a = 1$ , l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  e dalle rette  $x = 1$  e  $x = 2$ .
3. Si studi la funzione  $h(x) = \log x - ax^2$  scegliendo per  $a$  un valore numerico maggiore di  $\frac{1}{2e}$  e se ne disegni il grafico.

Soluzione

**Questionario**

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla  $64^a$  casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione

2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Soluzione

3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di  $50 \text{ cm}^2$ , margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

Soluzione

4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

Soluzione

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di  $(a + b)^n$  è uguale a  $2^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Soluzione

6. L'equazione risolvibile un dato problema è:  $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$  dove  $k$  è un parametro reale e  $x$  ha le seguenti limitazioni:  $15^\circ < x < 45^\circ$ . Si discuta per quali valori di  $k$  le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Soluzione

7. La funzione  $f(x) = x^3 - 2x^2$  soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo  $[0, 1]$ ? Se sì, trova il punto  $\xi$  che compare nella formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Soluzione

8. La funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x$  assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo  $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ , eppure non esiste alcun  $x \in I$  tale che  $f(x) = 0$ . È così? Perché?

Soluzione

9. Della funzione  $f(x)$  si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che:  $f'(x) = f(x)$  e  $f(0) = 1$ . Puoi determinare  $f(x)$ ?

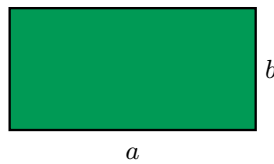
Soluzione

10. La funzione  $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x$  ha un estremo relativo per  $x = \frac{4\pi}{3}$  ed è  $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$ . Si trovino  $a$  e  $b$  e si dica quale è il periodo di  $f(x)$ .

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

- a) Dette  $a$  e  $b$  le lunghezze dei lati dell'aiuola rettangolare con  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$



**Fig. 1.** Dimensioni dell'aiuola rettangolare.

il suo perimetro è  $2a + 2b$  per cui

$$2a + 2b = \lambda \tag{1}$$

con  $\lambda$  che simbolizza la lunghezza del filo metallico ( $\lambda > 0$ ) utilizzato per delimitarne il perimetro: l'area è invece espressa dalla  $\mathcal{A} = a \cdot b$ .

Ricavando  $b$  dalla (1)

$$b = \frac{\lambda - 2a}{2}, \quad (2)$$

la condizione  $b \geq 0$  si riflette su  $a$  come

$$\frac{\lambda - 2a}{2} \geq 0$$

e ciò fissa un limite superiore per la lunghezza di  $a$  ossia  $a \leq \frac{\lambda}{2}$ . La funzione area  $\mathcal{A}$  si può ora esprimere in termini della sola variabile  $a$

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a \cdot \left( \frac{\lambda - 2a}{2} \right) = \frac{a}{2}(\lambda - 2a) = -a^2 + \frac{\lambda}{2}a \\ 0 \leq a \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (3)$$

e mostra come l'area dipenda quadraticamente dal lato  $a$  e quindi come il sistema (3) sia rappresentativo di un arco di parabola.

In coerenza con quanto aspettato, osserviamo innanzitutto l'annullarsi dell'area agli estremi dell'intervallo  $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(\lambda/2) = 0$ . Inoltre, poiché la concavità dell'arco di parabola è rivolta verso il basso, il valore massimo di  $\mathcal{A}$  si raggiunge in corrispondenza dell'ascissa del vertice ossia quando

$$a_1 = -\frac{\lambda/2}{2(-1)} = \frac{\lambda/2}{2} = \frac{\lambda}{4}.$$

Notato che tale risultato rientra nell'intervallo dei valori accettabili per  $a$  e ripresa la relazione (2), otteniamo in corrispondenza la lunghezza dell'altro lato

$$b_1 = \frac{\lambda - 2a_1}{2} = \frac{\lambda - \lambda/2}{2} = \frac{\lambda}{4} = a_1$$

dove l'ultima uguaglianza sta ad indicare come l'aiuola debba essere quadrata per soddisfare la condizione di massimo del problema.

b) Sia  $x$  la lunghezza di una parte del filo ed, evidentemente,  $\lambda - x$  la lunghezza della parte rimanente. Le limitazioni per  $x$  sono ovviamente  $0 \leq x \leq \lambda$ . Scegliamo di delimitare con la prima parte l'aiuola di forma quadrata che pertanto avrà un lato lungo  $l_1 = \frac{x}{4}$  (fig. 2), mentre con la seconda si delimiterà quella circolare cosicché la sua circonferenza avrà lunghezza  $2\pi r = \lambda - x$  da cui deduciamo il raggio  $r$  di quest'ultima aiuola

$$r = \frac{\lambda - x}{2\pi}.$$



**Fig. 2.** Aiuola quadrata e circolare.

La somma  $\mathcal{A}$  delle rispettive aree è

$$\begin{cases} \mathcal{A} = (l_1)^2 + \pi r^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{\lambda - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4\pi}(\lambda - x)^2 \\ 0 \leq x \leq \lambda. \end{cases} \quad (4)$$

Anche in questo caso la relazione cui si giunge esprime un arco di parabola con la concavità rivolta nella direzione positiva dell'asse della variabile  $\mathcal{A}$ . Il minimo si raggiunge in corrispondenza dell'ascissa del vertice che, questa volta, determiniamo annullando la derivata prima di  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'(x)$  cioè

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{2}{16}x + \frac{2}{4\pi}(\lambda - x)(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{8} - \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{x}{2\pi} = 0.$$

Segue

$$\frac{x}{2} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\lambda}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\lambda}{\pi} \left( \frac{4\pi}{4 + \pi} \right) = \frac{4\lambda}{4 + \pi}.$$

Poiché tale valore è interno all'intervallo  $[0, \lambda]$  in quanto manifestamente  $4 < 4 + \pi$ , il filo dovrà essere tagliato alla distanza  $4\lambda/(4 + \pi)$  da una estremità.

c) Per determinare il massimo (assoluto) della funzione  $\mathcal{A}$  vanno confrontati i suoi valori agli estremi dell'intervallo  $[0, \lambda]$ : risulta

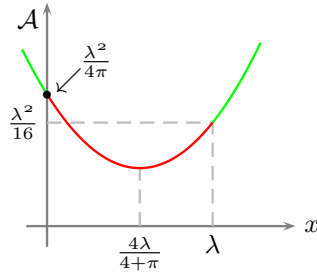
$$x = 0, \quad \mathcal{A}(0) = \frac{\lambda^2}{4\pi}; \quad x = \lambda, \quad \mathcal{A}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{16} + 0 = \frac{\lambda^2}{16}$$

e poiché si ha

$$\frac{\lambda^2}{4\pi} > \frac{\lambda^2}{16} \quad \Longrightarrow \quad 16 > 4\pi \quad \Longrightarrow \quad 4 > \pi$$

il massimo di  $\mathcal{A}$  si raggiunge in corrispondenza di  $x = 0$ . L'interpretazione di tale risultato è la seguente: converrà non tagliare il filo metallico e realizzare una sola aiuola circolare.

La rappresentazione grafica della funzione area totale  $\mathcal{A}(x)$  data da (4) è mostrata in figura 3. Questa mostra come l'area totale abbia un andamento parabolico e

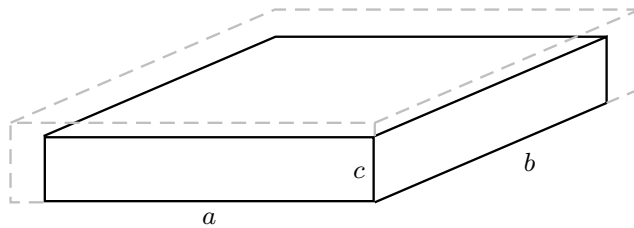


**Fig. 3.** Grafico della funzione area totale  $\mathcal{A}$ .

raggiunga il minimo in corrispondenza del vertice di ascissa  $4\lambda/(4 + \pi)$  mentre il massimo di tale funzione si trova in corrispondenza dell'estremo sinistro dell'intervallo dove la parabola interseca l'asse delle ordinate.

L'ultima richiesta del problema riguarda l'aumento percentuale del volume di un parallelepipedo rettangolo: siano  $a$ ,  $b$  e  $c$  le sue dimensioni originarie (fig. 4). Ne segue che il volume iniziale dell'aiuola è

$$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c. \quad (5)$$



**Fig. 4.** Parallelepipedo rettangolo e sue dimensioni.

Aumentando del 10% ogni dimensione le nuove lunghezze,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , dei lati risulteranno

$$a' = a + 10\% a = a + \left(\frac{10}{100}\right)a = \left(1 + \frac{1}{10}\right)a = \frac{11}{10}a = 1,1a$$

e similmente

$$b' = b + 10\% b = \dots = \frac{11}{10}b = 1,1b \quad c' = c + 10\% c = \dots = \frac{11}{10}c = 1,1c,$$

per cui il nuovo volume  $\mathcal{V}'$ , espresso da

$$\mathcal{V}' = a' \cdot b' \cdot c'$$

diviene

$$\mathcal{V}' = a' \cdot b' \cdot c' = (1,1a) \cdot (1,1b) \cdot (1,1c) = (1,1)^3 \cdot a \cdot b \cdot c.$$

Tenendo presente la (5) la precedente diviene

$$\mathcal{V}' = (1,1)^3 \cdot \mathcal{V}$$

e poiché  $(1,1)^3 \approx 1,331$ , si ha  $\mathcal{V}' = 1,331\mathcal{V}$ . Infine, per evidenziare l'aumento percentuale, si può riscrivere quest'ultima come

$$\mathcal{V}' = (1 + 0,331)\mathcal{V} = \mathcal{V} + 0,331\mathcal{V} = \mathcal{V} + 33,1\%\mathcal{V}$$

che mostra come l'aumento percentuale risulti essere del 33,1%. In forma appena alternativa si può risalire a tale valore anche riscrivendo la relazione  $\mathcal{V}' = 1,331\mathcal{V} = (1 + 0,331)\mathcal{V} = \mathcal{V} + 0,331\mathcal{V}$  come

$$\frac{\mathcal{V}' - \mathcal{V}}{\mathcal{V}} = 0,331 = 33,1\%.$$

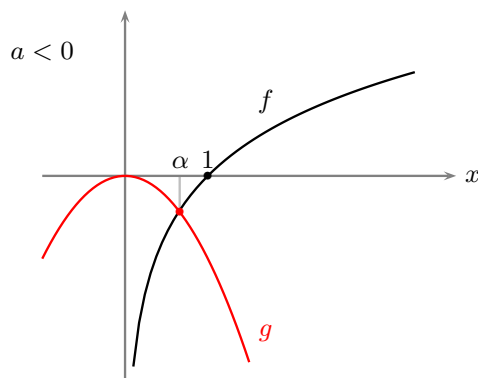
### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

1. Identificate le funzioni  $f(x) = \ln x$  (scriviamo  $\ln x$  in luogo della notazione  $\log x$  per intendere con maggiore evidenza il logaritmo naturale di  $x$ ) e  $g(x) = ax^2$ , la discussione dell'equazione  $f(x) = g(x)$  per  $x > 0$  al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$  si potrà condurre con i soli metodi dell'Analisi in quanto questa non rientra nella forme tipiche delle equazioni parametriche razionali (o irrazionali) bensì appartiene alle equazioni trascendenti miste che associano a funzioni trascendenti quali quelle circolari o logaritmiche/esponenziali, termini razionali o irrazionali. In linea con quanto posto dal testo del problema, scegliamo quindi di interpretare ciascun membro dell'equazione

$$f(x) = g(x) \quad \ln x = ax^2 \tag{1}$$

come una funzione, rispettivamente  $f$  e  $g$ , per cui la discussione della (1) si può riportare alla ricerca delle intersezioni, e del relativo numero, tra i grafici di queste due funzioni.

Per quanto riguarda il grafico di  $f$  questo è noto rappresentando  $f$  nient'altro che il logaritmo naturale. L'equazione  $g(x) = ax^2$  rappresenta invece  $\forall a \neq 0$  un fascio di parabole con vertice nell'origine di un sistema cartesiano  $Oxy$  mentre nel solo caso  $a = 0$  l'equazione si riduce a  $g(x) = 0$  che rappresenta l'asse delle ascisse di questo stesso sistema. Se  $a < 0$ , le parabole possiedono la concavità rivolta nella direzione negativa di  $y$  (o verso il "basso") e certamente intersecano il grafico del logaritmo in un unico punto di ascissa  $\alpha \in ]0, 1[$  (fig. 1). Nel caso



**Fig. 1.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = ax^2$  con  $a < 0$ .

$a = 0$  il punto di intersezione tra il logaritmo e l'asse  $x$  è ancora unico e possiede ascissa pari ad 1.

Se invece  $a > 0$  si possono presentare più situazioni in quanto all'aumentare di  $a$  la concavità delle parabole oltreché rivolta verso la direzione positiva dell'asse delle ordinate va via via restringendosi. Si potrà passare da due intersezioni a due coincidenti quando le due curve saranno reciprocamente tangenti: infine non si avrà alcuna intersezione. Studiamo quindi il caso in cui  $f(x)$  e  $g(x)$  sono tangenti, situazione dove evidentemente vale l'equazione  $\ln x = ax^2$  assieme alla condizione di tangenza che si traduce nell'uguaglianza delle rispettive derivate nel medesimo punto. Pertanto ne risulta il sistema

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \ln x = ax^2 \\ \frac{1}{x} = 2ax. \end{cases} \quad (2)$$

Dalla seconda si ricava il valore

$$x^2 = \frac{1}{2a} \quad (3)$$

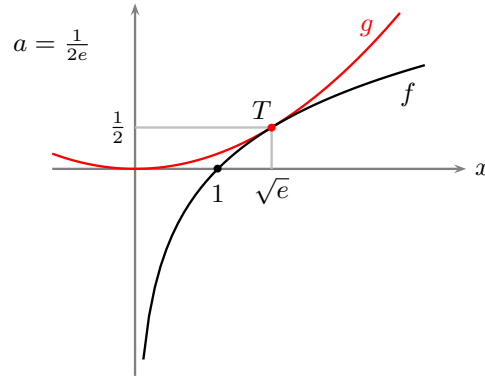
che sostituita nella prima di (2) fornisce l'ascissa del punto di tangenza

$$\ln x = ax^2 \implies \ln x = a \cdot \frac{1}{2a} \implies \ln x = \frac{1}{2} \implies x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

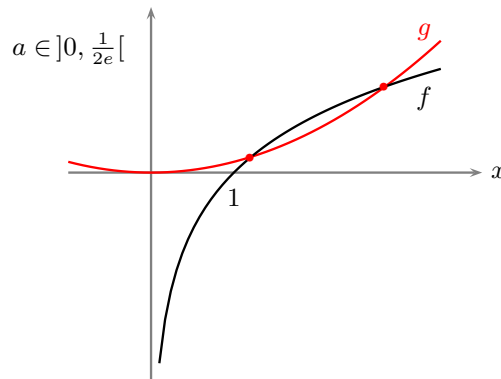
Segue poi da (3) che il valore di  $a$  associato è

$$a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}.$$

In corrispondenza di tale valore i grafici delle due funzioni sono tangenti nel punto  $T(\sqrt{e}, \ln \sqrt{e}) \equiv T(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$  (fig. 2).



**Fig. 2.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = ax^2$  con  $a = 1/(2e)$ .



**Fig. 3.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = ax^2$  con  $0 < a < 1/(2e)$ .

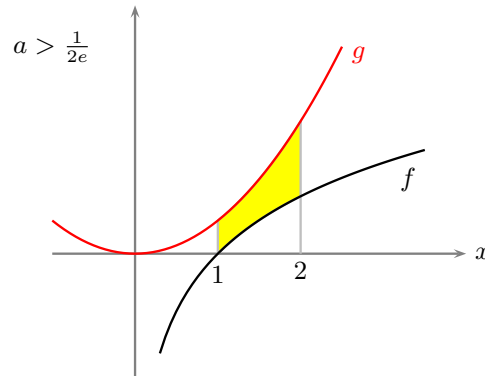
Evidentemente per  $0 < a < 1/(2e)$  la concavità di  $g$  risulta più ampia e le funzioni  $f$  e  $g$  si intersecano in due punti distinti cosicché l'equazione in oggetto ammette due soluzioni distinte (fig. 3).

Infine, se  $a > \frac{1}{2e}$ , la situazione è descritta graficamente dalla fig. 4 dove, per il restringersi della concavità delle parabole del fascio, appare evidente l'assenza di intersezioni con  $f$ . In corrispondenza di tali valori del parametro  $a$  risulta evidentemente soddisfatta  $\forall x > 0$  la disuguaglianza  $ax^2 > \ln x$ .

In conclusione la discussione dell'equazione parametrica assegnata permette di individuare per

$$\begin{array}{ll}
 a \leq 0 & 1 \text{ soluzione} \\
 0 < a < \frac{1}{2e} & 2 \text{ soluzioni} \\
 a = \frac{1}{2e} & 2 \text{ soluzioni coincidenti} \\
 a > \frac{1}{2e} & \text{nessuna soluzione.}
 \end{array}$$

Per  $a = 1/(2e)$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono, come detto, tangenti.



**Fig. 4.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = ax^2$  con  $a > 1/(2e)$ .

2. Essendo  $a = 1 > 1/(2e)$  i grafici di  $f$  e  $g$  non si intersecano per cui la situazione è quella rappresentata dalla figura 4 dove  $g(x) = x^2$  giace al di sopra del logaritmo: formalmente per  $x > 0$  è  $x^2 > \ln x$ . L'area richiesta, evidenziata in giallo in fig. 4, si ottiene risolvendo l'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (x^2 - \ln x) dx$$

che per la linearità dell'integrale, si può suddividere e parzialmente risolvere

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (x^2 - \ln x) dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 \ln x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 - \int_1^2 \ln x dx.$$

Il secondo integrale si può risolvere con il metodo per parti considerando  $\ln x$  come il fattore finito e  $dx$  come quello differenziale: si ha

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

Il valore dell'area richiesta risulta quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 - [x \ln x - x]_1^2 = \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) - (2 \ln 2 - 2 + 1) \\ &= \frac{7}{3} - 2 \ln 2 + 1 = \frac{10}{3} - 2 \ln 2 \approx 1,94704. \end{aligned}$$

3. Scelto  $a = 1$  studiamo la funzione  $h(x) = \ln x - x^2$  di dominio, evidentemente,  $D = \mathbb{R}_0^+ = \{x | x > 0\}$ . Tale funzione non è periodica in quanto  $h(x+T) \neq h(x)$

$\forall T \in \mathbb{R}_0$  e, non essendo  $D$  simmetrico rispetto allo zero, né vi possono essere simmetrie pari o dispari. Avendo osservato nel punto 2 che

$$x^2 > \ln x \quad \text{per } x > 0$$

è pure  $\ln x - x^2 < 0$  cioè  $h(x) < 0$ . Poiché  $h(x)$  risulta somma di funzioni continue, essa pure è continua in  $D$ . Gli unici limiti da svolgersi sono quindi quelli agli estremi del dominio: il primo è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0,$$

mentre il secondo è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ . Per risolvere quest'ultimo limite converrà, per non incorrere in un caso di indeterminazione, riscrivere la funzione nella forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right)$$

così da studiare il limite entro parentesi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}.$$

Poiché il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(\ln x)}{D(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

esiste, è possibile applicare il teorema di De L'Hôpital e affermare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0.$$

Segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$$

e il limite originario risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = -\infty.$$

Con tale risultato la funzione può presentare un andamento asintotico: per stabilirne l'esistenza o meno va analizzato il limite

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x.$$

Procedendo nel modo appena esposto, applicando cioè il teorema di De L'Hôpital, si trova

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{1} = 0.$$

È quindi

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x = -\infty$$

per cui non esistono asintoti obliqui.

Derivata prima. Il calcolo della  $h'(x)$  fornisce

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1 - 2x^2}{x}$$

e notato che il denominatore è positivo in  $D$ , lo studio del segno  $h'(x) \geq 0$  comporta

$$1 - 2x^2 \geq 0 \quad x^2 \leq \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi  $h'(x) \geq 0$  se  $0 < x \leq 1/\sqrt{2}$  (fig. 5): di conseguenza  $h(x)$  presenta in  $x = 1/\sqrt{2}$  un punto di massimo assoluto.

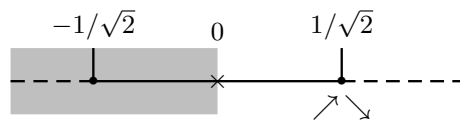


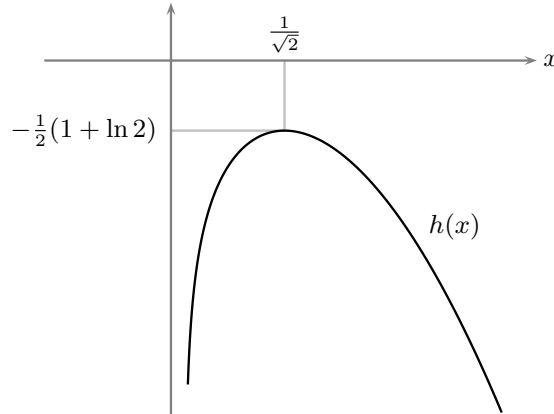
Fig. 5.

La derivata seconda e relativo segno sono

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0 \quad \forall x > 0$$

per cui la concavità è sempre rivolta verso il basso. Notato che l'ordinata del punto di massimo vale

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \ln(2^{-1/2}) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 + \ln 2), \end{aligned}$$



**Fig. 6.** Grafico della funzione  $h(x) = \ln x - x^2$ .

il grafico di  $h(x)$  è in definitiva rappresentato dalla fig. 6.

*Nota.* Pur non richiesto dal testo e nemmeno, ad una attenta lettura, non esplicitamente suggerito, intendiamo qui mostrare come la discussione della soluzione del primo quesito si possa rendere un po' più formale sfruttando conoscenze dell'Analisi piuttosto che rifarci alla conoscenza del comportamento del fascio di parabole  $g(x) = ax^2$  al variare di  $a$ . Intendiamo quindi studiare l'andamento della famiglia di funzioni

$$h_a(x) = \ln x - ax^2$$

al variare del parametro  $a$  con i soli "strumenti" dell'Analisi. In tale contesto discutere le soluzioni di  $\ln x = ax^2$  è equivalente a discutere il numero delle intersezioni di  $h_a(x)$  con l'asse delle  $x$ .

Notato quindi che tutte le funzioni  $h_a(x)$  possiedono dominio  $\mathbb{R}_0^+$  e che in questo dominio sono continue in quanto somma di funzioni continue, affrontiamo lo studio dei limiti per  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow +\infty$ . Qualsiasi sia il valore reale di  $a$ , risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h_a(x) = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 = a \cdot 0 = 0,$$

mentre si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = +\infty \tag{4}$$

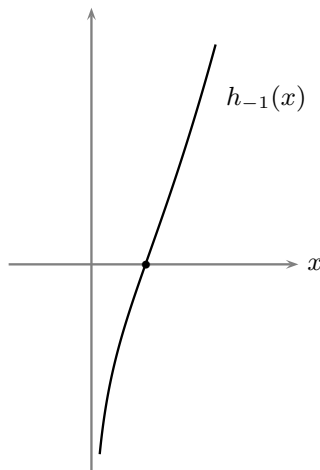
solo se  $a < 0$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -ax^2 = +\infty.$$

Poiché a ciò si aggiunge l'osservazione sul segno della derivata prima

$$h'_a(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

essendo  $1 - 2ax^2 > 0$  quando  $a < 0$ , segue che per tali valori del parametro  $h_a(x)$  rappresenta una funzione monotona strettamente crescente. Poiché i limiti agli estremi del dominio hanno segno opposto, di certo è possibile determinare un intervallo  $[\alpha, \beta]$  ai cui estremi risulti  $h_a(\alpha) < 0$  e  $h_a(\beta) > 0$ . Il teorema di esistenza degli zeri ci permette quindi di dedurre l'esistenza di almeno una, ma per la monotonia, di una sola soluzione dell'equazione  $h_a(x) = 0$ . Un grafico rappresentativo delle funzioni relative a valori di  $a < 0$  appare in fig. 7.



**Fig. 7.** Grafico della funzione  $h_{-1}(x) = \ln x + x^2$ .

Il caso  $a = 0$  riduce  $h_0(x) = \ln x$  e questa funzione, come si sa, incontra l'asse  $x$  nell'unico punto di ascissa  $x = 1$ .

Se  $a > 0$  il risultato del limite precedente per  $x \rightarrow +\infty$  non è più valido e va rivisto in quanto si cade in un caso di indeterminazione. Riscritta però la funzione come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - a \right) \quad (5)$$

questo si risolve con il teorema di De L'Hôpital nello stesso modo già visto ossia, data l'esistenza del limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(\ln x)}{D(x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

è pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{cosicché} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x^2} - a \right) = 0 - a = -a$$

e, in definitiva, il **limite** in questione ( $-a < 0$ ) è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = -\infty.$$

Pure il segno della derivata prima cambia: difatti

$$h'_a(x) = \frac{1 - 2ax^2}{x} \geq 0$$

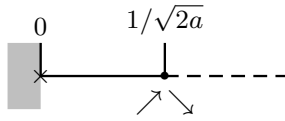
implica

$$1 - 2ax^2 \geq 0 \implies x^2 \leq \frac{1}{2a} \implies -\frac{1}{\sqrt{2a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

e, considerando il dominio, è

$$h'_a(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Evidenziando graficamente il segno di tale derivata (fig. 8)



**Fig. 8.**

appare evidente che tali funzioni presentano in  $x_0 = 1/\sqrt{2a}$  un punto di massimo assoluto di ordinata  $y_0$

$$\begin{aligned} y_0 &= h_a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) - a \cdot \frac{1}{2a} \\ &= \ln(2a)^{-1/2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2a - \frac{1}{2a} \\ &= -\frac{1}{2}(1 + \ln 2a). \end{aligned}$$

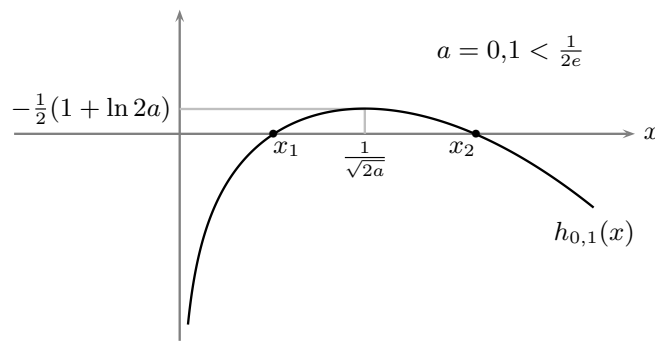
Data la monotonia crescente in  $]0, x_0]$  e decrescente in  $]x_0, +\infty[$ , le funzioni  $h_a(x)$  incontreranno l'asse delle  $x$  in due punti distinti  $x_1, x_2$  quando  $y_0 > 0$ ; se invece  $y_0 = 0$  l'asse delle  $x$  è la retta tangente al grafico di  $h_a(x)$  e vi saranno due valori coincidenti con il valore  $x_0$ . Infine se  $y_0 < 0$  non vi potranno essere intersezioni con tale asse e l'equazione originaria non presenterà soluzioni. Poiché  $y_0 > 0$  implica

$$-\frac{1}{2}(1 + \ln 2a) > 0 \implies 1 + \ln 2a < 0 \implies \ln 2a < -1 \implies 2a < e^{-1}$$

da cui  $a < 1/(2e)$  cosicché  $y_0 = 0$  comporta  $a = 1/(2e)$  e  $y_0 < 0$  è risolta da  $a > 1/(2e)$ , possiamo confermare anche per  $a > 0$  la **discussione** già svolta ossia

$$\begin{aligned} 0 < a < \frac{1}{2e} & \quad 2 \text{ soluzioni} \\ a = \frac{1}{2e} & \quad 2 \text{ soluzioni coincidenti} \\ a > \frac{1}{2e} & \quad \text{nessuna soluzione.} \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo i grafici delle funzioni finora non rappresentate: la fig. 9 è relativa ad un valore di  $a$  minore di  $1/(2e)$  e mostra le due intersezioni e le rispettive ascisse soluzioni dell'equazione originaria.

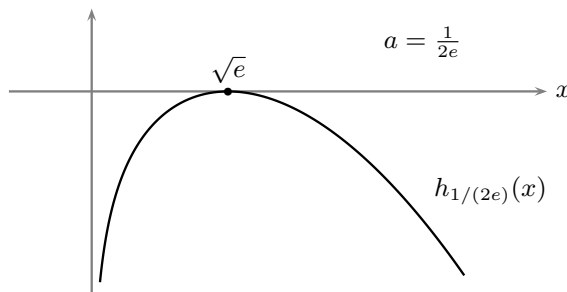


**Fig. 9.** Grafico della funzione  $h_{0,1}(x) = \ln x - 0,1x^2$ .

La fig. 10 rappresenta il grafico in corrispondenza di  $a = 1/(2e)$ . Con tale valore l'ascissa del punto di massimo risulta

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{1/e}} = \sqrt{e}$$

e in tale punto, curva e asse  $x$  sono mutuamente tangenti.



**Fig. 10.** Grafico della funzione  $h_{1/(2e)}(x) = \ln x - \frac{1}{2e}x^2$ .

Per  $a > 1/(2e)$  si ottengono andamenti analoghi a quelli descritti dalla fig. 6.

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Cerchiamo innanzitutto di individuare il legame tra il numero di caselle (in totale 64) e quello del numero dei chicchi di grano. Se quindi nella prima casella si dispone un chicco di grano, due sulla seconda, quattro sulla terza, otto sulla quarta, sedici sulla quinta, . . . , appare evidente che nel passaggio da una casella alla successiva il numero, a partire da un chicco, raddoppia. La schematizzazione di tale successione può pertanto essere

casella	numero chicchi
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$
5	$16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$
63	$2^{62}$
64	$2^{63}$

che mostra come in corrispondenza della  $64^a$  casella corrisponda un numero di chicchi pari a  $2^{63} = 2^{64-1}$ . Pertanto nella  $i$ -esima casella, il numero corrispondente di chicchi è  $2^{i-1}$ . Il numero totale di chicchi  $\mathcal{S}$  si ottiene sommando i 64 termini della seconda colonna ossia

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{62} + 2^{63} \\ &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{62} + 2^{63}, \end{aligned}$$

numero che si può riscrivere in forma compatta come

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}. \quad (1)$$

Notiamo che la successione del numero dei chicchi  $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ , costituisce una progressione geometrica di ragione 2 in quanto ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicando quest'ultimo per 2: in termini ricorsivi è

$$a_{i+1} = 2 \cdot a_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

mentre il termine generale  $i$ -esimo è espresso, come visto sopra, da  $a_i = a_1 \cdot 2^{i-1}$  con  $a_1 = 1$  per cui  $a_i = 2^{i-1}$ . Poiché la somma dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica di ragione  $q \neq 1$  è fornita dall'espressione

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

dove nel nostro caso abbiamo  $a_1 = 1$ ,  $q = 2$ ,  $n = 64$ , il numero di chicchi è

$$\mathcal{S} = 1 \cdot \left( \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \right) = -1 (1 - 2^{64}) = 2^{64} - 1. \quad (2)$$

Possiamo ora impostare una proporzione per ottenere il peso  $P$  in grammi della quantità  $\mathcal{S}$  sapendo che 1000 chicchi pesano 38 g:

$$\frac{1000}{38} = \frac{\mathcal{S}}{P} \quad \Longrightarrow \quad P = \left( \frac{\mathcal{S}}{10^3} \right) \cdot 38 \text{ g}$$

Sostituendo il risultato (2) e riportando il calcolo in notazione scientifica

$$P = \frac{2^{64} - 1}{10^3} \cdot 38 \text{ g} \approx 7,00976 \times 10^{17} \text{ g},$$

non rimane che trasformarlo in tonnellate (ton) sapendo che

$$1 \text{ ton} = 10^3 \text{ kg} = 10^3 \times 10^3 \text{ g} = 10^6 \text{ g} \quad \Longrightarrow \quad 1 \text{ g} = 10^{-6} \text{ ton:}$$

si ottiene infine

$$P = 7,00976 \times 10^{17} \times 10^{-6} \text{ ton} \approx 7,01 \times 10^{11} \text{ ton},$$

una quantità di grano... non certo trascurabile!

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Ricordiamo che un poliedro è una figura solida delimitata da poligoni non appartenenti al medesimo piano ognuno dei quali si chiama faccia e tali da avere ciascun lato, detto spigolo, in comune con una seconda faccia. In particolare, i poliedri regolari sono caratterizzati dall'avere tutte le facce costituite da poligoni regolari congruenti e, in aggiunta, tutti gli angoloidi uscenti da ciascun vertice, cioè le regioni dello spazio formate dalle facce con vertice in comune, debbono essere a loro volta congruenti.

Consideriamo un poliedro regolare convesso costituito da poligoni regolari di  $n$  lati: intendiamo determinare una relazione tra l'angolo interno di ciascuna faccia poligonale e il possibile numero di facce convergenti in un medesimo vertice.

A tal fine, congiunto il centro di un poligono regolare di  $n$  lati con i suoi vertici, si vengono a formare  $n$  triangoli isosceli ciascuno dei quali ha un angolo al vertice di ampiezza  $\frac{2\pi}{n}$  (in fig. 1 se ne sono tracciati tre).

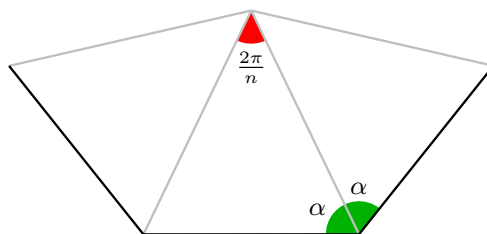


Fig. 1. Angolo interno di un poligono.

Sfruttando la nota proprietà sulla somma degli angoli interni di un triangolo, l'angolo alla base  $\alpha$  è quindi uguale a

$$\alpha + \alpha = \pi - \frac{2\pi}{n} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \pi$$

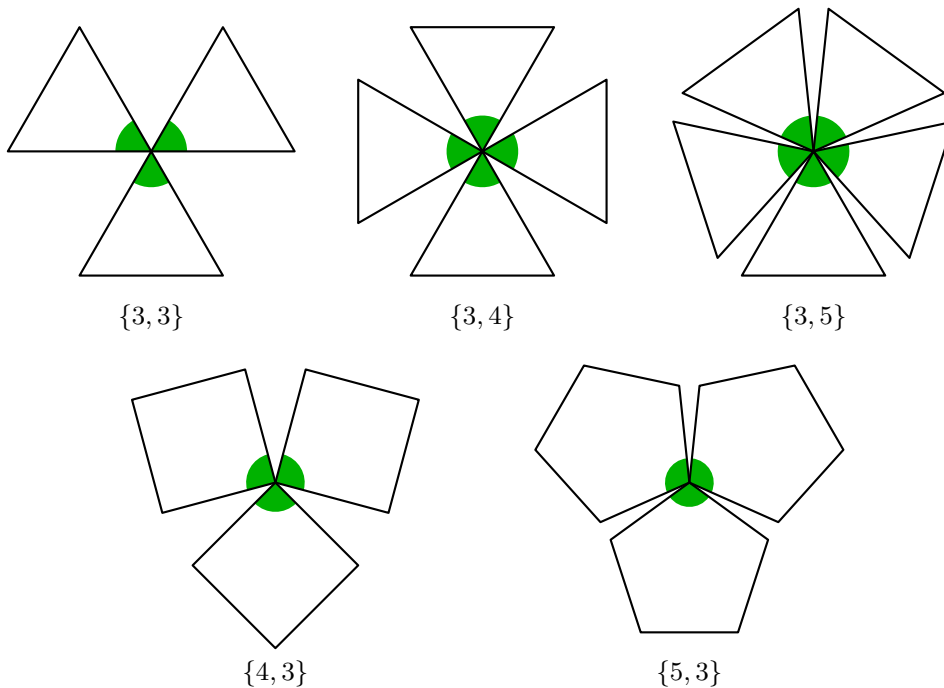
mentre l'angolo interno  $2\alpha$  definito da una qualsiasi coppia di lati del poligono (fig. 1) risulta essere

$$2\alpha = \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \pi.$$

Sia  $q$  il numero degli spigoli uscenti da ogni vertice del poliedro e quindi pure il numero delle facce uscenti da tale vertice: certamente  $q \geq 3$ . Ora immaginiamo di distendere ciascuna di queste facce in un piano (fig. 2): la somma  $\mathcal{S}$  di tutti gli angoli uscenti da tale vertice, rappresentata da

$$\mathcal{S} = q \cdot (2\alpha) = q \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \pi$$

dev'essere minore di  $2\pi$  ossia queste facce non potranno ricoprire un angolo maggiore o uguale all'angolo giro rendendo, in caso contrario, impossibile la costruzione del poliedro regolare (si veda sempre la fig. 2).



**Fig. 2.** Facce di un poliedro regolare uscenti dal medesimo vertice.

Questa osservazione intuitiva si può formalizzare con il teorema di geometria solida che afferma: *in un angoloide, la somma delle facce (cioè degli angoli delle facce uscenti da uno stesso vertice) è minore di un angolo giro.*

Segue da tale teorema la disuguaglianza

$$q\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi < 2\pi$$

da cui, moltiplicando per  $n$  ed eliminando  $\pi$  si ottiene,

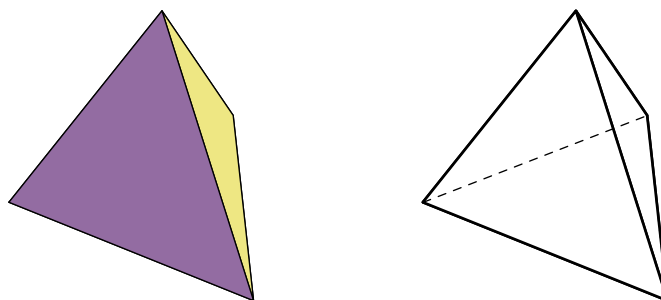
$$q(n - 2) < 2n. \quad (1)$$

Al variare di  $q$  e  $n$ , quest'ultima relazione deve essere sempre soddisfatta: studiamone quindi le possibili soluzioni  $\{n, q\}$  con  $n, q \in \mathbb{N}$  (la coppia  $\{n, q\}$ , è detta, simbolo di Schläfli).

Poiché  $n$  non può essere minore di 3 (il poligono con il minor numero di lati è il triangolo equilatero!), supponiamo inizialmente  $n = 3$  ossia che le facce siano dei triangoli equilateri. La (1) fornisce

$$q(3 - 2) < 2 \cdot 3 \quad \text{da cui} \quad q < 6.$$

Dato che, come detto, pure  $q \geq 3$ , i casi possibili corrispondono a  $q = 3$ ,  $q = 4$  oppure  $q = 5$ . Ciascuno di questi dà origine ad un poligono regolare: difatti la coppia  $\{3, 3\}$  origina il tetraedro, poliedro composto da quattro triangoli equilateri tre dei quali formano le facce concorrenti in uno qualsiasi dei quattro vertici (fig. 3)

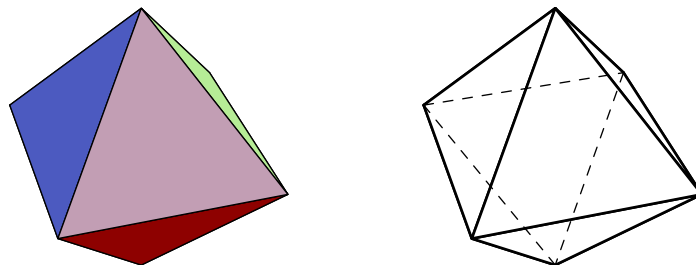
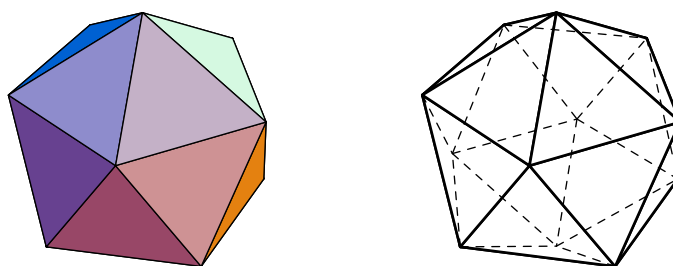
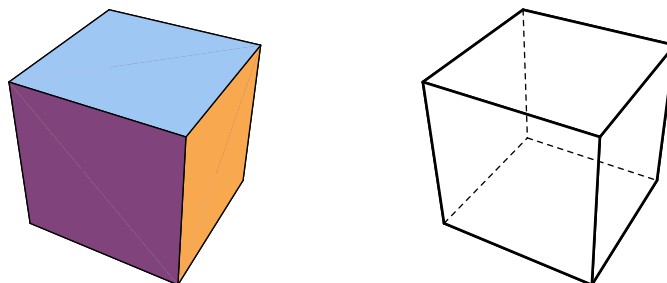


**Fig. 3.** Tetraedro  $\{3, 3\}$ .

Se  $q = 4$  si ottiene l'ottaedro, poliedro con 8 facce equilateri, quattro delle quali uscenti da uno qualsiasi dei 6 vertici (fig. 4).

Se poi  $q = 5$  si può costruire l'icosaedro dove ogni vertice è circondato da cinque triangoli equilateri per un totale di 20 facce equilateri (fig. 5).

Passando ad  $n = 4$  cioè richiedendo che ciascuna faccia sia un quadrato da (1) si ricava  $q(4 - 2) < 2 \cdot 4$  da cui  $q < 4$ . Si può presentare quindi solo il caso con

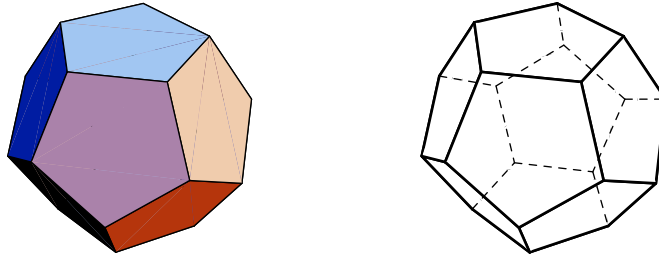
Fig. 4. Ottaedro  $\{3,4\}$ .Fig. 5. Icosaedro  $\{3,5\}$ .Fig. 6. Cubo o esaedro  $\{4,3\}$ .

$q = 3$  cui corrisponde il ben noto cubo o esaedro (6 facce quadrate, tre uscenti da ciascun vertice, fig. 6)

Se le facce sono dei pentagoni  $n = 5$  la (1) fornisce la condizione  $q(5 - 2) < 2 \cdot 5$  da cui  $q < \frac{10}{3}$  che ammette come unica soluzione, ancora,  $q = 3$ . Si può in tal caso costruire il dodecaedro, composto da 12 facce pentagonali, tre delle quali attorno ad ogni vertice (fig. 7)

Infine, sia  $n \geq 6$ : dalla (1) si ottiene

$$q(n - 2) < 2n \quad \implies \quad qn - 2q < 2n \quad \implies \quad n(q - 2) < 2q$$



**Fig. 7.** Dodecaedro  $\{5, 3\}$ .

da cui, dividendo per  $q - 2 > 0$  si ha

$$n < \frac{2q}{q-2}.$$

È pertanto

$$6 \leq n < \frac{2q}{q-2}$$

e di conseguenza

$$6 < \frac{2q}{q-2} :$$

risolvendo in  $q$  risulta

$$6q - 12 < 2q \quad \implies \quad q < 3,$$

valore che evidentemente non può essere accettabile. Non vi possono quindi essere ulteriori soluzioni oltre a quelle già discusse per cui, in definitiva, le sole coppie possibili sono  $\{3, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{4, 3\}$ ,  $\{5, 3\}$  a ciascuna delle quali, come visto, si associa il rispettivo solido platonico (del quale, ovviamente, si può dimostrare l'esistenza \*).

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

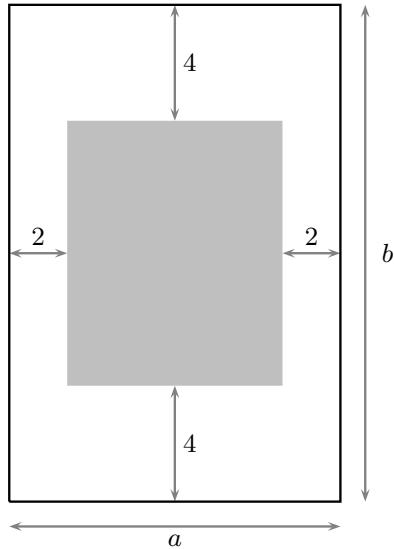
Siano  $a$  e  $b$  le dimensioni incognite del foglio di carta ( $a > 0$  e  $b > 0$ ). Le restrizioni imposte dal quesito sono: area di stampa  $\mathcal{A}_s = 50 \text{ cm}^2$ , margini superiore ed inferiore pari a 4 cm, margini destro e sinistro di 2 cm, mentre si chiede di determinare le dimensioni del foglio di area  $\mathcal{A}$  minima (fig. 1).

L'area  $\mathcal{A}$  e le condizioni sulle sue dimensioni si esprimono come

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a \cdot b \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

---

\* Per sperimentare in modo interattivo con i solidi platonici si veda la pagina web <http://www.lorenzoroi.net/maths.html#solidiplatonici>.



**Fig. 1.** Dimensioni del foglio e parametri di stampa (in cm).

mentre la restrizione sull'area fissa di stampa si riporta come

$$\mathcal{A}_s = 50 \text{ cm}^2 = (a - 4) \cdot (b - 8)$$

essendo  $a - 4$  la lunghezza del lato orizzontale del rettangolo di stampa e  $b - 8$  quella del lato verticale (fig. 1). Evidentemente questi valori devono essere positivi per cui  $a - 4 > 0$  cioè  $a > 4$  e  $b - 8 > 0$  che implica  $b > 8$ . Gli elementi coinvolti finora si riassumono nel sistema di condizioni

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a \cdot b \\ (a - 4)(b - 8) = 50 \\ a > 4 \\ b > 8. \end{cases}$$

Per ricondurre l'area  $\mathcal{A}$  ad una funzione di una variabile ricaviamo  $b$  dalla seconda equazione del sistema sostituendola poi nella prima

$$b - 8 = \frac{50}{a - 4} \quad \implies \quad b = 8 + \frac{50}{a - 4} = \frac{8a + 18}{a - 4}$$

per cui

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a \cdot b = a \cdot \left( \frac{8a + 18}{a - 4} \right) = 2 \left( \frac{4a^2 + 9a}{a - 4} \right) \\ a > 4. \end{cases}$$

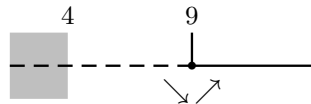
Volendo ricercare il minimo (assoluto) di  $\mathcal{A}$  passiamo al calcolo della derivata prima: questo fornisce

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= 2 \left[ \frac{(8a+9)(a-4) - (4a^2+9a)}{(a-4)^2} \right] \\ &= \frac{2}{(a-4)^2} (8a^2 - 32a + 9a - 36 - 4a^2 - 9a) \\ &= \frac{2}{(a-4)^2} (4a^2 - 32a - 36) \\ &= \frac{8}{(a-4)^2} (a^2 - 8a - 9).\end{aligned}$$

La condizione  $\mathcal{A}' \geq 0$  comporta lo studio di  $a^2 - 8a - 9 \geq 0$  data la positività dei termini rimanenti. La sua equazione associata ammette le soluzioni

$$a^2 - 8a - 9 = 0 \quad a_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16+9} \quad \implies \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 9$$

per cui  $\mathcal{A}' \geq 0$  è risolta per  $a \leq -1 \vee a \geq 9$ . La rappresentazione grafica di  $\mathcal{A}'$  (fig. 2) mette in evidenza l'esistenza di un minimo in corrispondenza del valore  $a = 9$  cm: tale minimo è quello assoluto in quanto alla sua sinistra  $\mathcal{A}$  è decrescente mentre è crescente per  $a > 9$ .



**Fig. 2.** Segno di  $\mathcal{A}'$ .

In corrispondenza

$$b = \frac{8 \cdot 9 + 18}{9 - 4} = 18 \text{ cm}$$

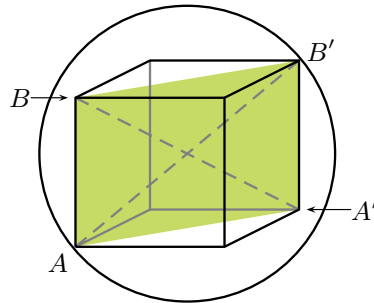
per cui possiamo concludere che le dimensioni del foglio dovranno essere pari a  $9 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$ .

#### Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

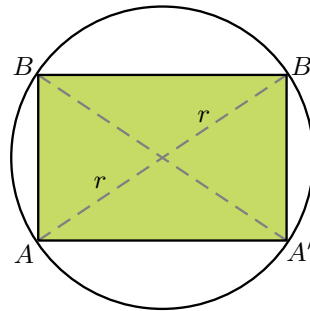
Il cubo inscritto in una sfera di diametro  $2r = 1$  m ha le proprie diagonali, quali per esempio  $AB'$  e  $BA'$  di fig. 1, di lunghezza pari al diametro della sfera.

Sezioniamo cubo e sfera con un piano passante per il centro di quest'ultima che è pure il centro del cubo (punto d'incontro delle sue diagonali) e per i vertici  $A$ ,  $B$ ,  $B'$  e  $A'$ . La figura piana che ne risulta mostra evidentemente un rettangolo inscritto in un cerchio (fig. 2).

Per determinare la lunghezza del lato  $\overline{AB} = l$  del cubo (figg. 1 e 2) e quindi determinarne il volume, notiamo innanzitutto che la diagonale della sua sezione



**Fig. 1.** Cubo inscritto in una sfera.



**Fig. 2.** Sezione piana del cubo inscritto nella sfera.

piana scelta coincide con il diametro della sfera per cui è  $\overline{AB'} = 2r$ . Il segmento  $BB' = AA'$  costituisce invece la diagonale di base del cubo per cui la lunghezza è quella della diagonale di un quadrato di lato  $l$  cioè  $\overline{BB'} = l\sqrt{2}$ . Il teorema di Pitagora permette di collegare tali segmenti con la relazione

$$\overline{AB'} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BB'}^2}$$

che implica

$$2r = \sqrt{l^2 + (l\sqrt{2})^2} = \sqrt{l^2 + 2l^2} = l\sqrt{3} :$$

il lato cercato è quindi

$$l = \frac{2}{\sqrt{3}} r.$$

Ovviamente a tale conclusione si poteva giungere direttamente ricordando che tra lato e diagonale  $d = 2r$  del cubo, sussiste la relazione  $d = l\sqrt{3}$ .

Ricordando che  $r = \frac{1}{2}$  m, il volume  $\mathcal{V}$  del cubo risulta

$$\mathcal{V} = l^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} r\right)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ m}^3$$

e dato che  $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ litri}$ , si ha in definitiva

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (10^3 \text{ l}) = \frac{10^3}{3\sqrt{3}} \text{ l} \approx 192,45 \text{ l}.$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Ritenuta nota la formula dello sviluppo del binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad (1)$$

si potrà ottenere a secondo membro la somma dei coefficienti di tale sviluppo non appena si ponga  $a = b = 1$  in quanto  $1^{n-k} = 1^k = 1, \forall n, k \in \mathbb{N}$ . Segue dalla (1)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

che è quanto richiesto dal quesito.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Riportate le ampiezze angolari ai radianti  $15^\circ = \frac{\pi}{12}$  e  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ , il quesito fornisce il sistema di condizioni

$$\begin{cases} k \cos 2x - 5k + 2 = 0 \\ \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

con  $k \in \mathbb{R}$  chiedendo di discutere l'equazione parametrica assegnata cioè di determinare come varia il numero delle soluzioni (accettabili) dell'equazione in funzione dei valori del parametro  $k$ . Posto quindi  $x' = 2x$ , il sistema parametrico precedente si riscrive

$$\begin{cases} k \cos x' - 5k + 2 = 0 \\ 2 \cdot \frac{\pi}{12} < 2x < 2 \cdot \frac{\pi}{4} \end{cases} \implies \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Poiché il grafico del coseno tra  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{2}$  è conosciuto (è pure decrescente) e notato che se  $k = 0$  non vi sono soluzioni in quanto  $2 \neq 0$ , possiamo riscrivere l'equazione come

$$\begin{cases} \cos x' = 5 - \frac{2}{k} \\ \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

per cui, posto  $y = \cos x'$ ,

$$\begin{cases} y = \cos x' \\ y = 5 - \frac{2}{k} & k \neq 0 \\ \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

la discussione delle soluzioni si può ricondurre alla ricerca delle intersezioni tra l'arco di grafico del coseno relativo all'intervallo  $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$  e il fascio di rette orizzontali  $f$  rappresentato dalla seconda equazione. Nella figura 1 sono evidenziati in colore i punti del grafico del coseno accettabili ed alcune rette del fascio.

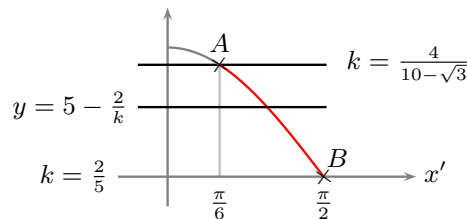


Fig. 1. Grafico di  $\cos x'$  e rette orizzontali.

Data la monotonia del coseno nell'intervallo dato, appare evidente come il fascio  $f$  intersechi in un sol punto il grafico del coseno. In particolare le rette di  $f$  per i punti  $A$  e  $B$  (fig. 1)

$$A\left(\frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{6}\right) \equiv \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad B\left(\frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}\right) \equiv \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

corrispondono ai valori del parametro

$$y_A = \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 - \frac{2}{k} \implies \sqrt{3}k = 10k - 4 \implies k = \frac{4}{10 - \sqrt{3}} \approx 0,4838$$

e

$$y_B = 0 = 5 - \frac{2}{k} \implies 5k - 2 = 0 \implies k = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Se osserviamo che la funzione

$$y = 5 - \frac{2}{k}$$

risulta monotona strettamente crescente in  $\mathbb{R}_0^+$  in quanto tale funzione (che è una funzione omografica) possiede derivata prima  $y' = 2/k^2$  positiva, possiamo essere certi che ad ogni valore di  $k$  dell'intervallo  $]\frac{2}{5}, \frac{4}{10-\sqrt{3}}[$  corrisponda pure una sola retta orizzontale e quindi, per quanto detto, un'unica intersezione. In base a tale corrispondenza biunivoca tra i valori di  $k$  e le intersezioni del fascio

$f$  con il coseno, concludiamo ammettendo l'esistenza di un'unica soluzione in corrispondenza dei valori del parametro appartenenti all'intervallo aperto

$$\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10 - \sqrt{3}}. \quad (2)$$

Volendo evitare queste osservazioni sulla corrispondenza biunivoca tra i valori del parametro  $k$  e l'esistenza di una sola retta orizzontale corrispondente, si può risolvere il sistema (1) esplicitando il parametro  $k$  in un membro ossia applicando il metodo del "cosiddetto" parametro separato. Si ottiene allora

$$\begin{cases} k = \frac{2}{5 - \cos x'} \\ \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

per cui posto  $y = k$  si dovranno studiare le intersezioni di un fascio di rette orizzontali (di immediata interpretazione) con l'arco di curva di equazione  $y = 2/(5 - \cos x')$  cioè

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5 - \cos x'} \\ y = k \\ \frac{\pi}{6} < x' < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Poiché la derivata prima della funzione

$$y' = D\left(\frac{2}{5 - \cos x'}\right) = \frac{-2 \operatorname{sen} x'}{(5 - \cos x')^2}$$

risulta negativa  $y' < 0, \forall x' \in ]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$  in quanto per tali valori  $-2 \operatorname{sen} x' < 0$ , la funzione stessa è ivi strettamente decrescente e quindi il fascio  $y = k$  incontrerà in un sol punto il relativo grafico. Determinati i valori del parametro in corrispondenza degli estremi dell'intervallo

$$x' = \frac{\pi}{6} \implies k = \frac{2}{5 - \cos(\pi/6)} = \frac{2}{5 - (\sqrt{3}/2)} = \frac{4}{10 - \sqrt{3}}$$

e

$$x' = \frac{\pi}{2} \implies k = \frac{2}{5 - \cos(\pi/2)} = \frac{2}{5}$$

si può concludere la discussione affermando l'esistenza di un'unica soluzione dell'equazione originaria per i valori di  $k$  compresi tra questi estremi (nello stesso modo dato da (2)).

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione  $f(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$  rappresenta una cubica tangente all'asse  $x$  nell'origine di un sistema cartesiano  $Oxy$  e tale da intersecare ulteriormente quest'asse nel suo punto di ascissa 2.

Poiché  $f(x)$  è continua in  $\mathbb{R}$  e quindi pure in  $[0, 1]$ , derivabile internamente con derivata prima  $f'(x) = 3x^2 - 4x$  per  $x \in ]0, 1[$ , essa soddisfa alle ipotesi del teorema di Lagrange per cui deve  $\exists \xi \in ]0, 1[$  tale che

$$f'(\xi) = 3\xi^2 - 4\xi = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \quad \Longrightarrow \quad 3\xi^2 - 4\xi = \frac{-1 - 0}{1}.$$

Quest'ultima conduce all'equazione  $3\xi^2 - 4\xi + 1 = 0$  che ammette le due soluzioni

$$\xi_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3} \quad \Longrightarrow \quad \xi_1 = \frac{1}{3}, \quad \xi_2 = 1.$$

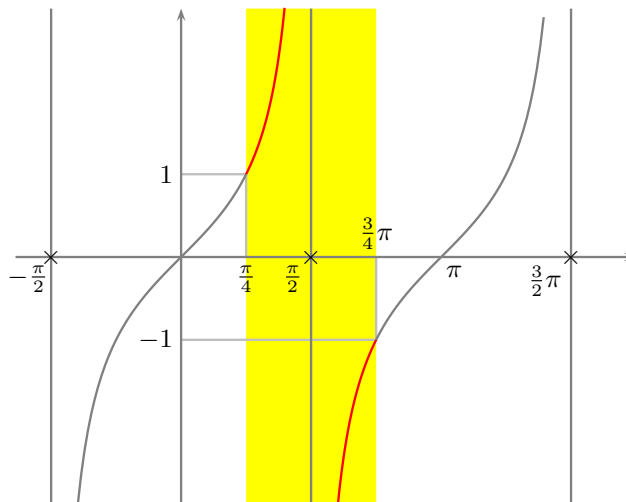
Il punto di ascissa  $\xi$ , come detto, è interno all'intervallo cosicché solo  $\xi = \frac{1}{3}$  rappresenta l'ascissa del punto cercato.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x$  rientra nelle funzioni elementari ed è ben conosciuta. In particolare i suoi valori agli estremi dell'intervallo suggerito sono

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 > 0 \quad f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi = -1 < 0.$$

La fig. 1 riporta il grafico della tangente in un intervallo pari a due periodi e mette in evidenza la parte compresa tra  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{3}{4}\pi$ .



**Fig. 1.** Grafico di  $\operatorname{tg} x$ .

Da tale grafico appare evidente come non vi sia alcun punto in  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$  dove sia  $\operatorname{tg} x = 0$ .

Difatti a tale funzione, non può applicarsi il teorema di esistenza degli zeri (o teorema di Bolzano, Praga 1781–1848) in quanto l'ipotesi di continuità della funzione in tale intervallo non è soddisfatta non esistendo la tangente in  $\frac{\pi}{2}$ , punto interno all'intervallo in questione. Poiché valgono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

la funzione  $\operatorname{tg} x$  presenta di conseguenza in  $x = \frac{\pi}{2}$  una discontinuità di seconda specie.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $y = f(x)$ , la funzione incognita  $f(x)$  soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

che, a ben vedere, sono quelle tipiche della funzione esponenziale a base naturale. Comunque, procedendo in modo formale riscriviamo la prima “equazione” sfruttando la forma differenziale della derivata in quanto questa notazione permette una più immediata distinzione tra funzione e variabile indipendente: in tal modo la prima condizione diviene

$$\frac{dy}{dx} = y$$

che, supposto  $y \neq 0$ , si riscrive come

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Quest'ultima può vedersi come una relazione tra differenziali coinvolgente la funzione incognita  $y$ . È in effetti una semplice equazione differenziale che si risolve attraverso l'integrazione indefinita

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx.$$

Entrambi gli integrali sono immediati e forniscono

$$\ln |y| = x + c$$

da cui, prendendo gli esponenziali di entrambi i membri,

$$|y| = e^{x+c} = e^x \cdot e^c.$$

Abbiamo pertanto le due possibilità

$$\begin{cases} y = e^x \cdot e^c \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -y = e^x \cdot e^c \\ y < 0. \end{cases} \implies y = -e^x \cdot e^c$$

Imponendo la condizione  $f(0) = 1$ , il primo sistema comporta  $1 = e^0 \cdot e^c$ , da cui  $1 = e^c$  risolta da  $c = 0$ , mentre la seconda possibilità  $1 = -e^0 \cdot e^c$ ,  $e^c = -1$  non fornisce alcuna soluzione. Notato che  $e^x \neq 0$ , concludiamo indicando la

$$y = f(x) = e^x$$

come la funzione cercata.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Dato che  $f(x) = a \sin x + b \cos x$  la condizione  $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$  si esplicita facilmente in

$$a \sin \frac{2}{3}\pi + b \cos \frac{2}{3}\pi = 1$$

che implica la relazione tra i coefficienti incogniti  $a$  e  $b$

$$a \frac{\sqrt{3}}{2} - b \frac{1}{2} = 1 \implies a\sqrt{3} - b = 2. \quad (1)$$

Il fatto che  $f(x)$  presenti un estremo relativo in  $x = \frac{4}{3}\pi$  si traduce nell'annullarsi della sua derivata prima in questo punto in quanto l'espressione  $a \sin x + b \cos x$  non presenta in  $\mathbb{R}$  punti singolari. Siccome pure la sua derivata

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x$$

è definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ne segue

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0 \implies a \cos \frac{4}{3}\pi - b \sin \frac{4}{3}\pi = 0$$

che diviene

$$-\frac{a}{2} - b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \implies -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \implies a = b\sqrt{3}.$$

Introdotta questo risultato in (1) si ottiene

$$b\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - b = 2 \implies 3b - b = 2 \implies b = 1$$

per cui  $a = \sqrt{3}$ . Dev'essere pertanto  $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ .

Ricordata la periodicità delle funzioni goniometriche seno e coseno

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(x + 2\pi) = \operatorname{cos} x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la periodicità  $T$  della  $f(x)$  ne deriva immediatamente in quanto, per  $T = 2\pi$ , vale l'identità

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sqrt{3} \operatorname{sen}(x + 2\pi) + \operatorname{cos}(x + 2\pi) \\ &= \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alla medesima conclusione si giunge riscrivendo la funzione come

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = \sqrt{3} \left( \operatorname{sen} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{cos} x \right) \\ &= \sqrt{3} \left( \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{cos} x \right) = \sqrt{3} \left[ \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\operatorname{cos}(\pi/6)} \operatorname{cos} x \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{cos}(\pi/6)} \left( \operatorname{sen} x \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{cos} x \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= 2 \operatorname{sen} \left[ \left( x + 2\pi \right) + \frac{\pi}{6} \right] = 2 \operatorname{sen} \left[ x + 2\pi + \frac{\pi}{6} \right] \\ &= 2 \operatorname{sen} \left[ \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi \right] = 2 \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

# ESAME 2006 PNI

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

Un filo metallico di lunghezza  $\lambda$  viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarla per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Soluzione

## • Problema n. 2

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  determinate da  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = ax^2$ , essendo  $a$  un parametro reale e il logaritmo in base  $e$ .

1. Si discuta, al variare di  $a$ , l'equazione  $\log x = ax^2$  e si dica, in particolare, per quale valore di  $a$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto  $a = -e^2$ , l'area che è compresa tra i grafici di  $f$  e  $g$  (con  $x > 0$ ) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazione  $y = -1$  e  $y = -2$ .
3. Si studi la funzione  $h(x) = \log x - ax^2$  scegliendo per  $a$  un valore numerico maggiore di  $\frac{1}{2e}$  e se ne disegni il grafico.

Soluzione

**Questionario**

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla  $64^a$  casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione

2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

Soluzione

3. In un piano sono dati una retta  $r$  e due punti  $A$  e  $B$  ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine  $r$ . Si trovi il più breve cammino che congiunga  $A$  con  $B$  toccando  $r$ .

Soluzione

4. Si dimostri che l'equazione  $\sin x = x - 1$  ha una e una sola radice  $\alpha$  e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare  $\alpha$  con la precisione voluta.

Soluzione

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di  $(a + b)^n$  è uguale a  $2^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Soluzione

6. L'equazione risolvibile un dato problema è:  $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$  dove  $k$  è un parametro reale e  $x$  ha le seguenti limitazioni:  $15^\circ < x < 45^\circ$ . Si discuta per quali valori di  $k$  le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Soluzione

7. Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "che cos'è la probabilità?" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Soluzione

8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità  $\geq 0,99$  di colpirlo almeno una volta?

Soluzione

9. Della funzione  $f(x)$  si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che:  $f'(x) = f(x)$  e  $f(0) = 1$ . Puoi determinare  $f(x)$ ?

Soluzione

10. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di  $\pi$  utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

Il problema è identico a quello proposto nei corsi di ordinamento. Si rimanda pertanto alla **soluzione** là svolta per tale problema.

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1. Per la discussione del primo punto si veda quanto esposto nel corrispondente **quesito** assegnato nell'analogo problema di Ordinamento.
2. Posto  $a = -e^2 < 0$  la parabola  $g(x) = -e^2x^2$  volge la concavità verso il basso e, per quanto **discusso** precedentemente, interseca  $f(x) = \ln x$  in un unico punto. Poiché il testo richiede l'area compresa tra  $f$  e  $g$  appartenente alla striscia di

piano delimitata dalle rette orizzontali  $y = 1$  e  $y = 2$ , determiniamo i punti di intersezione di queste due funzioni con tali rette. Per  $f$

$$\ln x = -1 \quad \implies \quad x = \frac{1}{e}$$

mentre per  $g$ ,

$$-e^2 x^2 = -1 \quad \implies \quad x^2 = \frac{1}{e^2} \quad \implies \quad x = \frac{1}{e}$$

in quanto  $x > 0$ . Deduciamo pertanto che i grafici di  $f$  e  $g$  si devono intersecare nel punto  $P \left( \frac{1}{e}, -1 \right)$  (fig. 1).

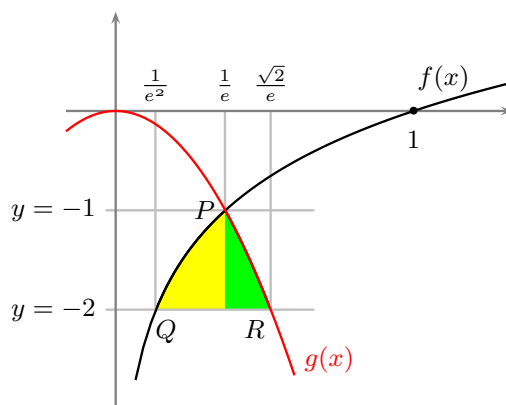


Fig. 1. Grafici delle funzioni  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = -e^2 x^2$ .

La retta  $y = -2$  incontra invece  $f$  nel punto  $Q$  la cui ascissa è soluzione di  $\ln x = -2$ : risulta  $x_Q = e^{-2} = 1/e^2$ . Il punto  $R$  di intersezione della medesima retta con  $g$  possiede ascissa positiva soluzione della equazione  $-e^2 x^2 = -2$ . Quest'ultima implica  $x^2 = 2/e^2$  che ammette la soluzione positiva  $x_R = \sqrt{2}/e$ .

L'area  $\mathcal{A}$  richiesta è data dalla somma delle aree evidenziate in colore nella figura 1 ciascuna delle quali si ottiene con l'integrale definito della differenza tra l'equazione della curva superiore con quella inferiore ( $y = -2$  in entrambi i casi): la prima (in giallo in fig. 1) è data da

$$\int_{1/e^2}^{1/e} [\ln x - (-2)] dx$$

mentre la seconda (in verde) da

$$\int_{1/e}^{\sqrt{2}/e} [-e^2 x^2 - (-2)] dx.$$

cosicché  $\mathcal{A}$  risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{1/e^2}^{1/e} [\ln x - (-2)] dx + \int_{1/e}^{\sqrt{2}/e} [-e^2 x^2 - (-2)] dx \\ &= \int_{1/e^2}^{1/e} (\ln x + 2) dx + \int_{1/e}^{\sqrt{2}/e} (-e^2 x^2 + 2) dx.\end{aligned}$$

L'unico termine non elementare coinvolto nell'integrazione riguarda l'integrale della funzione logaritmo che, comunque, si può risolvere applicando il metodo per parti identificando il fattore differenziale con  $dx$ . Risulta

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

per cui l'area richiesta si calcola tramite

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= [x \ln x - x + 2x]_{1/e^2}^{1/e} + \left[ -e^2 \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{1/e}^{\sqrt{2}/e} \\ &= [x \ln x + x]_{1/e^2}^{1/e} + \left[ -\frac{e^2}{3} x^3 + 2x \right]_{1/e}^{\sqrt{2}/e}\end{aligned}$$

Sostituendo opportunamente risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left[ \frac{1}{e} \ln \left( \frac{1}{e} \right) + \frac{1}{e} \right] - \left[ \frac{1}{e^2} \ln \left( \frac{1}{e^2} \right) + \frac{1}{e^2} \right] + \left( -\frac{e^2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{e^3} + \frac{2\sqrt{2}}{e} \right) + \frac{e^2}{3e^3} - \frac{2}{e} \\ &= -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} - \frac{2\sqrt{2}}{3e} + \frac{2\sqrt{2}}{e} + \frac{1}{3e} - \frac{2}{e} \\ &= \frac{1}{e^2} - \frac{5}{3e} + \frac{4\sqrt{2}}{3e} \approx 0,2159\end{aligned}$$

Un'alternativa al calcolo appena sviluppato può essere quella che scambia le variabili  $x$  e  $y$  applicando la trasformazione di simmetria assiale  $x' = y$  e  $y' = x$  così da riportare il calcolo dell'integrale nell'intervallo  $[-2, -1]$ . In tal modo le equazioni

$$y = -e^2 x^2 \quad y = \ln x \quad \text{con} \quad x \geq 0 \wedge y \leq 0$$

diventano

$$x' = -e^2 (y')^2 \quad x' = \ln y' \quad \text{con} \quad y' \geq 0 \wedge x' \leq 0.$$

Esplicitando la variabile dipendente  $y'$  dalla prima si ottiene

$$(y')^2 = -\frac{x'}{e^2} \quad \Longrightarrow \quad |y'| = \frac{1}{e}\sqrt{-x'} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{e}\sqrt{-x'}$$

in quanto  $x' \leq 0$  e  $y' \geq 0$ , mentre la seconda fornisce  $y' = e^{x'}$ .  
L'area richiesta è ora rappresentata dall'integrale

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} \left[ \frac{1}{e}\sqrt{-x'} - e^{x'} \right] dx'$$

per cui, osservato che

$$\int \sqrt{-x'} dx' = -\frac{2}{3}(-x')^{3/2} + c \quad \int e^{x'} dx' = e^{x'} + c,$$

si giunge all'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[ -\frac{2}{3e}(-x')^{3/2} - e^{x'} \right]_{-2}^{-1} \\ &= -\frac{2}{3e} - \frac{1}{e} + \frac{2}{3e} \cdot 2^{3/2} + \frac{1}{e^2} \\ &= \frac{1}{e^2} - \frac{5}{3e} + \frac{4\sqrt{2}}{3e} \approx 0,2159 \end{aligned}$$

che conferma quanto già trovato.

3. La soluzione è analoga a quella del terzo **punto** del corrispondente problema nel corso di Ordinamento.

**Quesito n. 1: soluzione.** ([testo del quesito](#))

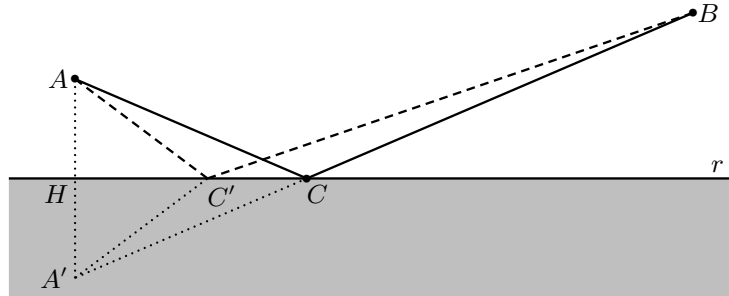
Per la soluzione si veda il quesito n. 1 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 2: soluzione.** ([testo del quesito](#))

Per la soluzione si veda il quesito n. 2 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 3: soluzione.** ([testo del quesito](#))

Il problema riprende il classico argomento della riflessione di un raggio luminoso da parte di uno specchio piano e il conseguente percorso seguito. Lo si può risolvere utilizzando osservazioni di tipo puramente geometrico: sia quindi  $A'$  il



**Fig. 1.** Possibili percorsi  $A \rightarrow C \rightarrow B$ .

punto simmetrico di  $A$  rispetto alla retta  $r$  e  $C$  il punto di contatto del percorso  $A \rightarrow C \rightarrow B$  con la retta  $r$  (fig. 1).

Dimostriamo che tale punto è determinato dalla intersezione del segmento  $A'B$  con  $r$ , simbolicamente  $\{C\} = r \cap A'B$ , e che il percorso  $A \rightarrow C \rightarrow B$  è il più breve.

Ragioniamo per assurdo negando che  $C$  sia il punto che definisce il percorso più breve. Esiste quindi un altro punto  $C' \in r$  distinto da  $C$  tale che

$$\overline{AC'} + \overline{C'B} < \overline{AC} + \overline{CB}. \quad (1)$$

Siccome per costruzione  $A'$  è il simmetrico di  $A$  rispetto ad  $r$  per cui  $AA' \perp r$  con  $\{H\} = r \cap AA'$ , le seguenti coppie di triangoli rettangoli sono congruenti

$$\triangle AHC' \simeq \triangle A'HC' \quad \wedge \quad \triangle AHC \simeq \triangle A'HC. \quad (2)$$

Ne segue che  $\overline{AC'} = \overline{A'C'}$  e  $\overline{AC} = \overline{A'C}$  e la relazione (1) diviene

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B} < \overline{A'C} + \overline{CB} : \quad (3)$$

dato che  $\overline{A'C} + \overline{CB} = \overline{A'B}$  otteniamo da (3) la conclusione

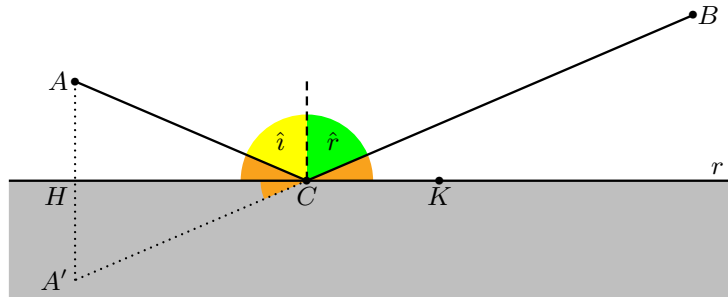
$$\overline{A'C'} + \overline{C'B} < \overline{A'B}$$

in evidente contraddizione con la disuguaglianza triangolare applicata a  $\triangle A'C'B$  che invece afferma  $\overline{A'C'} + \overline{C'B} \geq \overline{A'B}$ . Il punto di intersezione tra  $r$  e  $A'B$  definisce pertanto quell'unico punto di  $r$  che assicura il percorso di lunghezza minima tra  $A$  e  $B$  toccando  $r$ .

*Nota.* Dalla congruenza dei triangoli espressa nella (2) si ha pure la congruenza tra gli angoli (fig. 2)

$$\angle ACH \simeq \angle A'CH \simeq \angle BCK$$

per cui ne discende la relazione  $\hat{i} = \hat{r}$  tra le ampiezze dell'angolo di incidenza  $\hat{i}$  e quello di riflessione  $\hat{r}$  (fig. 2), uguaglianza che costituisce la ben nota legge della riflessione dei fenomeni ondulatori.



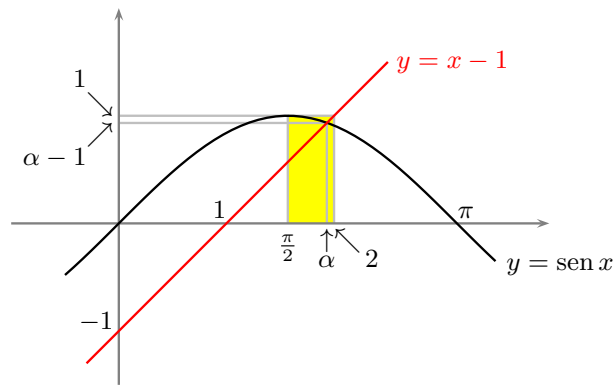
**Fig. 2.** Legge della riflessione.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

L'equazione  $\sin x = x - 1$  si può reinterpretare come il sistema

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = x - 1 \end{cases}$$

e in tal modo la ricerca delle sue soluzioni viene a coincidere con quella delle intersezioni tra le due funzioni del sistema e i rispettivi grafici che, in tal caso, sono conosciuti e rappresentati in figura 1.



**Fig. 1.** Grafici di  $y = \sin x$  e  $y = x - 1$ .

In termini geometrici approssimativi, i due grafici appaiono intersecarsi in un punto di ascissa  $\alpha$  compreso tra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ . In particolare, poiché l'ordinata del punto di intersezione (cioè  $\alpha - 1$ ) è minore di 1 e il punto sulla retta di ordinata unitaria possiede ascissa

$$y = 1 \quad \implies \quad 1 = x - 1 \quad \implies \quad x = 2,$$

dovrà essere  $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2$ .

La formalizzazione di tali osservazioni si può ottenere studiando le proprietà della funzione  $f(x) = \sin x - x + 1$ . Questa risulta continua in  $\mathbb{R}$  e quindi pure nell'intervallo  $[\frac{\pi}{2}, 2]$ . Inoltre risulta

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 2 - \frac{\pi}{2} > 0 \quad \wedge \quad f(2) = \sin 2 - 2 + 1 = -1 + \sin 2 < 0$$

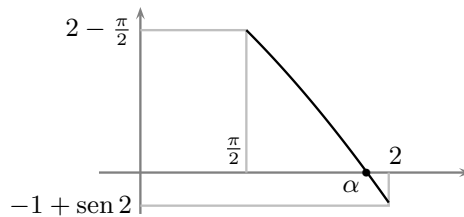
cosicché agli estremi  $f(x)$  assume valori di segno opposto. È quindi possibile applicare il teorema di esistenza degli zeri (o teorema di Bolzano, Praga 1781–1848) che assicura l'esistenza di almeno un punto  $\alpha$  dove  $f(\alpha) = 0$ . Se infine, osserviamo che

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ma certamente

$$f'(x) < 0 \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\right],$$

allora la  $f(x)$  in tale intervallo è monotona strettamente decrescente e tale valore  $\alpha$  è quindi unico (fig. 2).



**Fig. 2.** Grafico di  $y = \sin x - x + 1$  con  $x \in [\frac{\pi}{2}, 2]$ .

Per determinare  $\alpha$  e quindi rispondere alla seconda parte del quesito, applichiamo il metodo di bisezione a partire dall'intervallo  $[\frac{\pi}{2}, 2]$ . Pertanto, come prima iterazione, calcoliamo il valore medio,  $x_M$  tra questi estremi cioè

$$x_M = \frac{(\pi/2) + 2}{2} = \frac{\pi}{4} + 1$$

Poiché

$$f\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{\pi}{4} - 1 + 1 \approx 0,191663 > 0$$

sarà, nella seconda iterazione,

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{4} + 1, 2\right].$$

Procedendo nello stesso modo si ottiene la seguente **tabella** ( $a$  = estremo inferiore,  $b$  = estremo superiore,  $x_M$  valore medio di  $[a, b]$ ):

$n$	$a$	$b$	$x_M$	$f(x_M)$
1	$\pi/2$	2	1,7854	0,191663
2	1,7854	2	1,8927	0,0559361
3	1,8927	2	1,94635	-0,0160447
4	1,8927	1,94635	1,91952	0,0202838
5	1,91952	1,94635	1,93294	0,00220368
6	1,93294	1,94635	1,93964	-0,00689953
7	1,93294	1,93964	1,93629	-0,00234268

Come si vede, si giunge a stimare  $\alpha$  con due cifre decimali corrette,  $\alpha \approx 1,93$ , in corrispondenza dell'iterazione  $n = 7$ .

Volendo invece ricorrere al metodo di Newton, nel quale la convergenza è generalmente più veloce, dobbiamo esplicitare la relazione ricorsiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

partendo da un valore  $x_0$  dato. Tenuto conto che  $f'(x) = \cos x - 1$ , la (1) diviene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n + 1}{\cos x_n - 1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

per cui, scelto  $x_0 = 2$  otteniamo per la prima iterazione

$$x_1 = 2 - \frac{\sin 2 - 2 + 1}{\cos 2 - 1} \approx 1,9360.$$

Nella seconda

$$x_2 = x_1 - \frac{\sin x_1 - x_1 + 1}{\cos x_1 - 1} \approx 1,9346.$$

Da un confronto con quanto ottenuto sopra, il valore di  $\alpha$  appare conosciuto a meno di un centesimo già dalla prima iterazione.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Per la soluzione si veda il quesito n. 5 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Per la soluzione si veda il quesito n. 6 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La definizione classica di probabilità di un evento come

*rapporto tra i casi favorevoli all'evento e quelli possibili,*

è applicabile quando questo conteggio diviene possibile ma ciò non è sempre realizzabile. La definizione *frequentista* che considera la probabilità di un evento come

*la frequenza calcolata su un numero sufficientemente elevato di prove,*

si può applicare quando gli eventi siano ripetibili e per i quali si possa disporre di conteggi che informino su quante volte un evento si è verificato in un numero elevato di prove. Vi sono comunque eventi che non rientrano in nessuna delle precedenti due definizioni: per questo B. De Finetti poteva affermare che “*la probabilità non esiste*”. Difatti ad un evento del tipo — *domani risolvo tutti i problemi d'esame* — non è possibile assegnare con le precedenti definizioni alcun valore di probabilità.

Tale limitatezza delle definizioni viene superata dalla definizione *soggettivista* che afferma

*la probabilità di un evento è la misura della fiducia che un individuo coerente attribuisce al verificarsi di tale evento*

e nella interpretazione di B. De Finetti diviene

*la probabilità di un evento è il valore o prezzo  $p$  che un individuo coerente ritiene equo pagare per ricevere una vincita pari ad 1 nel caso si verifichi l'evento.*

Se quindi, per riprendere l'esempio, stimassi di risolvere tutti i problemi d'esame all'80% nella giornata di domani, allora vuol dire che  $p = 0,8$  e quindi sono disposto a scommettere per esempio, 80 euro, in cambio di una vincita di 100 euro nel caso risolvessi tutti i problemi d'esame.

### **Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $p = 0,3$  la probabilità di colpire il bersaglio e quindi di aver successo in una singola prova e  $q = 1 - p = 0,7$  la probabilità contraria cioè di non colpire il bersaglio. Poiché la probabilità  $p_{n,k}$  che su  $n$  prove (o tiri) vi siano  $k$  successi è data dalla distribuzione binomiale (o di Bernoulli)

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \quad (1)$$

sia  $P_n(k \geq 1)$  la probabilità di colpire almeno una volta il bersaglio (sempre su  $n$  prove). Essendo  $P_n(k = 0)$  la probabilità su  $n$  prove di non colpirlo, vale evidentemente

$$P_n(k \geq 1) + P_n(k = 0) = 1$$

ossia si è certi che su  $n$  tiri il bersaglio potrà essere colpito oppure no. Dato che  $P_n(k=0) = p_{n,0}$ , per (1) discende

$$\begin{aligned} P_n(k \geq 1) &= 1 - P_n(k=0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} p^0 \cdot q^{n-0} \end{aligned}$$

ma

$$\binom{n}{0} = 1, \quad p^0 = 1$$

per cui

$$P_n(k \geq 1) = 1 - 1 \cdot 1 \cdot q^n = 1 - q^n.$$

La condizione imposta dal quesito su tale probabilità è di avere  $P_n(k \geq 1) \geq 0,99$  che implica

$$1 - q^n \geq 0,99 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leq 1 - 0,99 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leq 0,01$$

che, con  $q = 0,7$ , diviene  $(0,7)^n \leq 10^{-2}$ . Prendendo il logaritmo in base 10 di entrambi i membri e sfruttando la proprietà che  $\log x^\alpha = \alpha \log x$

$$\log 0,7^n \leq \log 10^{-2} \quad \Longrightarrow \quad n \log 0,7 \leq -2$$

da cui, dividendo per  $\log 0,7 < 0$

$$n \geq \frac{-2}{\log 0,7}.$$

Dato che

$$\frac{-2}{\log 0,7} \approx 12,91$$

dev'essere  $n \geq 12,91$  e quindi, per avere una probabilità maggiore di 0,99 di colpire il bersaglio almeno una volta, il numero  $n$  dei tiri dovrà essere uguale o superiore a 13.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Per la soluzione si veda il quesito n. 9 del corso di Ordinamento.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è sostanzialmente analogo al numero 7 proposto nella prova d'esame dell'anno 2003, corso P.N.I. In questo caso non si chiede di verificare l'uguaglianza numerica espressa da

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (1)$$

ma solo di calcolare un'approssimazione di  $\pi$  stimando numericamente il valore dell'integrale definito. Le osservazioni sono quindi le medesime ma questa volta, intendiamo applicare il metodo dei trapezi (o di Bezout) così da poterlo affiancare a quello dei rettangoli applicato nell'occasione ricordata.

Analogamente a quello dei rettangoli, nel metodo dei trapezi si suddivide l'intervallo di integrazione  $[a, b]$  in  $n$  intervallini di uguale ampiezza

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{e di estremi} \quad x_i = h \cdot i + a \quad \text{con} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ciascun intervallino dà poi origine ad un trapezio di altezza  $h$  e basi (verticali) pari al valore della funzione negli estremi dell' $i$ -esimo intervallino cioè  $f(x_i)$  e  $f(x_{i+1})$ . Supposta la funzione positiva nell'intervallo  $[a, b]$ , l'area di ciascun trapezio risulta

$$a_i = \frac{1}{2} h \cdot [f(x_{i+1}) + f(x_i)],$$

mentre la stima dell'area complessiva si ottiene sommando questi  $n$  valori

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_{i+1}) + f(x_i)].$$

Estratto il fattore comune  $h/2$  e sostituiti esplicitamente i valori degli estremi si giunge all'espressione finale

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \{f[h(i+1) + a] + f(hi + a)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Nel caso proposto dal quesito la stima numerica di  $\pi$  si ottiene non appena si abbia una stima dell'integrale definito a II membro della (1). Questo esprime l'area  $\mathcal{A}$  della regione compresa tra il grafico della funzione integranda

$$f : y = \frac{1}{1+x^2},$$

l'asse delle  $x$  e le rette  $x = 0$  e  $x = 1$ . Studiamo quindi, almeno approssimativamente, il grafico di  $f$  per individuare tale regione (detta comunemente, trapezoide).

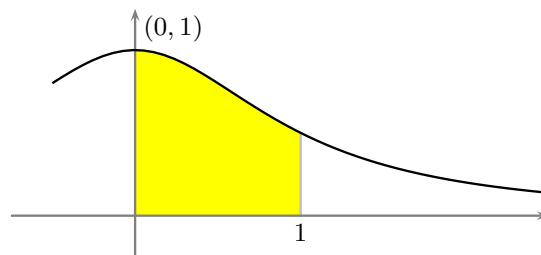
La funzione integranda è la ben nota **versiera** di Gaetana Agnesi: il suo dominio è  $\mathbb{R}$  e, in tale dominio  $f$  è una funzione simmetrica pari in quanto vale l'identità

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il segno è sempre positivo essendo  $1 + x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .  $f$  è pure continua in  $\mathbb{R}$  e i suoi limiti all'infinito sono  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ . Dato che per  $x \geq 0$  è

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$$

la funzione è ivi decrescente e presenta un massimo assoluto in  $x = 0$ . Nella figura 1 appare il grafico di  $f$  con evidenziato il trapezoide di cui si cerca una stima numerica per l'area  $\mathcal{A}$ .



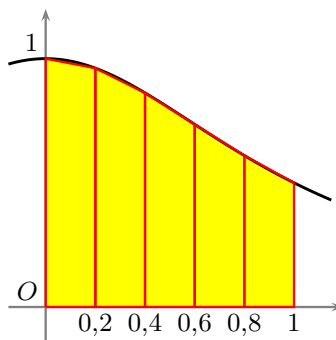
**Fig. 1.** Grafico della funzione  $y = 1/(1+x^2)$  e trapezoide.

Scelto  $n = 5$  (fig. 2) l'ampiezza di ciascun intervallino è  $h = (1 - 0)/5 = 0,2$  e possiamo partizionare l'intervallo  $[0, 1]$  con i punti di ascissa

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0,2 \quad x_2 = 0,4 \quad x_3 = 0,6 \quad x_4 = 0,8 \quad x_5 = 1$$

e quindi impostare la somma (2) come

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{0,2}{2} \cdot \sum_{i=0}^4 \{f[0,2(i+1)+0] + f(0,2i+0)\} \\ &= 0,1 \sum_{i=0}^4 \{f[0,2(i+1)] + f(0,2i)\}. \end{aligned}$$



**Fig. 2.** Suddivisione in 5 trapezi della regione di area  $\mathcal{A}$ .

Più esplicitamente si ha

$$\mathcal{A} = 0,1\{[f(0,2) + f(0)] + [f(0,4) + f(0,2)] + [f(0,6) + f(0,4)] \\ + [f(0,8) + f(0,6)] + [f(1) + f(0,8)]\}$$

per cui calcolando i corrispondenti valori della funzione  $f$  otteniamo

$$\mathcal{A} = 0,1\{[0,961538 + 1] + [0,862069 + 0,961538] + [0,735294 + 0,862069] \\ + [0,609756 + 0,735294] + [0,5 + 0,609756]\} \\ \approx 0,783732.$$

Con tale approssimazione del valore dell'integrale a secondo membro della (1) la stima di  $\pi$  risulta

$$\frac{\pi}{4} = \mathcal{A} \approx 0,783732 \quad \implies \quad \pi \approx 4 \cdot 0,783732 = 3,13493$$

valore che differisce per meno di un centesimo da  $\pi$  ( $\pi - 3,13493 = 0,0067$ ). Ulteriori calcoli, ottenuti con un programma che usa tale metodo, forniscono in funzione di  $n$ , le stime seguenti di  $\pi$

$n$ :	5	10	20	50	100
$\pi$ :	3,13493	3,13993	3,14118	3,14153	3,14158.

# ESAME 2007

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

- 1) Si considerino i triangoli la cui base è  $AB = 1$  e il cui vertice  $C$  varia in modo che l'angolo  $\widehat{CAB}$  si mantenga doppio dell'angolo  $\widehat{ABC}$ .
  1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico  $\gamma$  descritto da  $C$ .
  2. Si rappresenti  $\gamma$ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
  3. Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\widehat{ABC}$  che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati  $AC$  e  $BC$  e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
  4. Si provi che se  $\widehat{ABC} = 36^\circ$  allora è  $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Soluzione

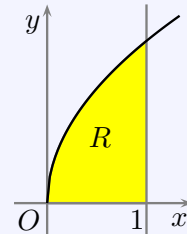
## • Problema n. 2

- 2) Si consideri un cerchio  $C$  di raggio  $r$ .
  1. Tra i triangoli isosceli inscritti in  $C$  si trovi quello di area massima.
  2. Si denoti con  $S_n$  l'area del poligono regolare di  $n$  lati inscritto in  $C$ . Si dimostri che  $S_n = \frac{n}{2}r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$  e si trovi un'analogia espressione per l'area del poligono regolare di  $n$  lati circoscritto a  $C$ .
  3. Si calcoli il limite di  $S_n$  per  $n \rightarrow \infty$ .
  4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Soluzione

**Questionario**

1. La regione  $R$  delimitata dal grafico di  $y = 2\sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 1$  (in figura) è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $S$ .



Soluzione

2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Soluzione

3. Si determini, al variare di  $k$ , il numero delle soluzioni reali dell'equazione  $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$ .

Soluzione

4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

Soluzione

5. Si mostri che la funzione  $y = x^3 + 8$  soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo  $[-2, 2]$ . Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

Soluzione

6. Si sa che il prezzo  $p$  di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni.

Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

Soluzione

7. Se  $f(x)$  è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo  $[-2, 2]$ , che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?

Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione  $3 + f(x)$ ?

Soluzione

8. Si risolva l'equazione:  $4 \binom{n}{4} = 15 \binom{n-2}{3}$ .

Soluzione

9. Si calcoli l'integrale indefinito  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  e, successivamente, si verifichi che il risultato di  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  è in accordo con il suo significato geometrico.

Soluzione

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera  $S$  e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta  $r$  passante per il centro di  $S$ , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

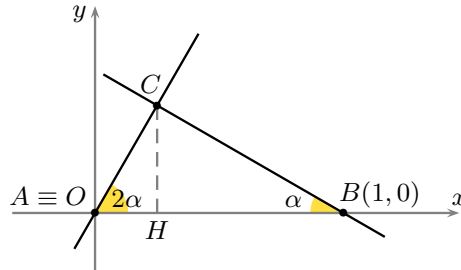
Soluzione

### Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

1. Scegliamo un sistema di assi cartesiani dove il vertice  $A$  coincida con l'origine  $O$ , il vertice  $B$  appartenga all'asse delle  $x$  con coordinate  $B(1, 0)$  mentre il terzo vertice  $C$  sarà individuato dalla coppia  $C(x, y)$ . Posto inoltre  $\angle ABC = \alpha$  con  $\alpha \geq 0$  dev'essere pure soddisfatta la condizione  $\angle CAB = 2\angle ABC = 2\alpha$  (fig. 1). Poiché la misura dell'ampiezza di ciascuno dei tre angoli di  $\triangle ABC$  dev'essere un numero positivo (o, nei casi degeneri, nulla) nonché la loro somma deve valere  $\pi$ , segue che

$$\angle ACB = \pi - (\angle ABC + \angle CAB) = \pi - (\alpha + 2\alpha) \geq 0$$

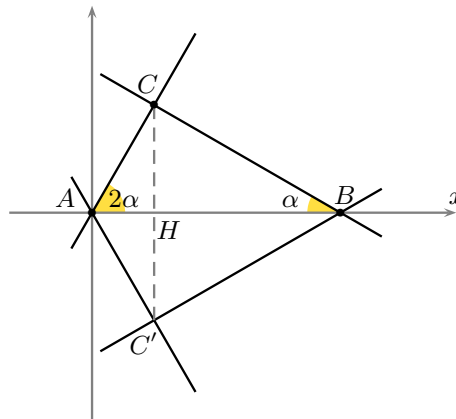
per cui  $\pi - 3\alpha \geq 0$  ossia  $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$ . La misura  $\alpha$  dovrà pertanto soddisfare le limitazioni  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$  e nel caso assuma i valori estremi di tale intervallo il triangolo



**Fig. 1.** Sistema cartesiano associato al triangolo  $ABC$ .

risulterà degenere.

Notata la simmetria del problema rispetto all'asse delle  $x$  (fig. 2) in quanto ad ogni punto  $C(x, y)$  del semipiano delle ordinate positive o nulle ( $y \geq 0$ ) che soddisfa alla condizione  $\angle CAB = 2\angle ABC$  se ne può individuare un secondo  $C'(x, -y)$  con ordinata opposta,



**Fig. 2.** Simmetria del problema rispetto all'asse  $x$ .

supporremo inizialmente che l'ordinata di  $C$  sia  $y \geq 0$ . Detto poi  $H$  il punto proiezione ortogonale di  $C$  sull'asse delle  $x$ , per definizione di tangente trigonometrica si ha

$$\operatorname{tg} \angle CAB = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{HC}{AH},$$

per cui, notato che  $HC = y$  e  $AH = x$ , è anche

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = x \operatorname{tg} 2\alpha,$$

equazione quest'ultima che rappresenta l'equazione cartesiana della retta  $AC$ . Tale retta si poteva ottenere ricordando pure il significato goniometrico di coefficiente angolare ossia come la tangente dell'angolo che la retta definisce con l'asse

delle ascisse. Nell'unico caso in cui la precedente relazione perde di significato ossia quando  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  si ha  $x = 0$  per cui  $C$  appartiene all'asse  $y$  e il  $\triangle ABC$  si riduce ad un triangolo rettangolo isoscele ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ). L'ordinata di  $C$  è in tal caso  $y = 1$ .

Ricordato che  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$  ne segue che  $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \sqrt{3}$  per cui, ancora considerando il significato trigonometrico di tangente di un angolo e in riferimento a  $\triangle HBC$  rettangolo in  $H$ , possiamo scrivere

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{HC}{HB} = \frac{y}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad y = (1-x) \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

che appare l'equazione della retta  $BC$ . Avendo poi posto  $y \geq 0$  dev'essere anche  $1-x > 0$  cioè  $x < 1$ .

Il punto  $C$  è quindi individuato dall'intersezione delle precedenti due rette

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tg} 2\alpha & (2) \\ y = -x \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha & (3) \\ x < 1 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

che ne esprimono il luogo  $\gamma$  in termini del parametro  $\alpha$ .

Per ottenere quanto richiesto ossia l'equazione (implicita) di  $\gamma$ , va eliminato nel sistema precedente il parametro  $\alpha$ . Osservato che dalla (1) la  $\operatorname{tg} \alpha$  è già data in termini di  $x$  e  $y$ , converrà esprimere la  $\operatorname{tg} 2\alpha$  della (2) in funzione di  $\operatorname{tg} \alpha$  e quindi eliminare tra (2) e (3) tale termine. Pertanto sfruttando l'identità

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

si ha

$$y = x \operatorname{tg} 2\alpha \quad \Longrightarrow \quad y = x \left( \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)$$

e, sostituendo la

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{1-x}$$

si ottiene

$$y = x \cdot 2 \left( \frac{y}{1-x} \right) : \left[ 1 - \frac{y^2}{(1-x)^2} \right].$$

Sviluppato il quadrato ed eseguito il minimo comune multiplo entro parentesi quadre

$$y = \frac{2xy}{1-x} : \left[ \frac{1+x^2-2x-y^2}{(1-x)^2} \right] \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2xy}{1-x} \cdot \frac{(1-x)^2}{1+x^2-2x-y^2}$$

l'espressione si può semplificare nella

$$y = \frac{2xy \cdot (1-x)}{1+x^2-2x-y^2}$$

e quindi, moltiplichiamo entrambi i membri per il denominatore, si giunge

$$y(1+x^2-2x-y^2) = 2xy(1-x)$$

o anche

$$y[1+x^2-2x-y^2-2x+2x^2] = 0 \implies y(3x^2-4x+1-y^2) = 0.$$

Quest'ultima equazione possiede la soluzione  $y = 0$  (e  $x \in \mathbb{R}$ ) che implica  $\alpha = 0$  e, geometricamente, afferma l'appartenenza di  $C$  all'asse delle  $x$ . Manifestamente è una situazione geometrica degenera in quanto  $\triangle ABC$  si riduce ad un segmento. D'altra parte può essere anche

$$3x^2 - 4x + 1 - y^2 = 0$$

da cui

$$y^2 = 3x^2 - 4x + 1. \quad (4)$$

Affinché quest'ultima abbia soluzioni dev'essere

$$3x^2 - 4x + 1 \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{1}{3} \end{matrix}$$

per cui  $x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 1$ . Per la condizione di positività collegata alla  $\text{tg } \alpha$  e tradotta precedentemente in  $x < 1$  (sistema (2)), abbiamo che la forma esplicita per il luogo  $\gamma$  (di ordinate positive) risulta in definitiva

$$\gamma : \begin{cases} y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1} \\ x \leq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (5)$$

La forma implicita che rappresenta il luogo  $\gamma$  è invece data dalla (4) con aggiunta la condizione appena ricavata e che riscriviamo come

$$\gamma : \begin{cases} 3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0 \\ x \leq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (6)$$

Questa forma rientra nella classe delle equazioni di II grado in due incognite

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

equazioni rappresentative, tranne i casi degeneri, delle curve coniche.

2. Nel caso siano noti gli elementi essenziali della teoria delle equazioni di II grado in due variabili (in caso contrario si veda più avanti) e cioè come il segno della quantità  $\Delta = b^2 - 4ac$  (detta *discriminante della conica*) permetta di individuare il tipo di conica tra parabola, ellisse ed iperbole secondo lo schema seguente

$$\begin{aligned} \Delta < 0 & \text{ l'equazione rappresenta un'ellisse o una circonferenza,} \\ \Delta = 0 & \text{ l'equazione rappresenta una parabola,} \\ \Delta > 0 & \text{ l'equazione rappresenta un'iperbole,} \end{aligned}$$

segue immediatamente che l'equazione (6) rappresenta un'iperbole in quanto il suo discriminante risulta  $\Delta = 0 - 4(3)(-1) = 12 > 0$ . Se poi *completiamo il quadrato* ossia riscriviamo identicamente l'espressione di II grado come

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a},$$

l'equazione (6) diviene

$$3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - y^2 = -1 \quad 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$$

da cui

$$9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1.$$

Posto

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2}{3} \\ y' = y \end{cases} \quad (7)$$

si giunge all'equazione  $9(x')^2 - 3(y')^2 = 1$  che, ridotta alla forma canonica

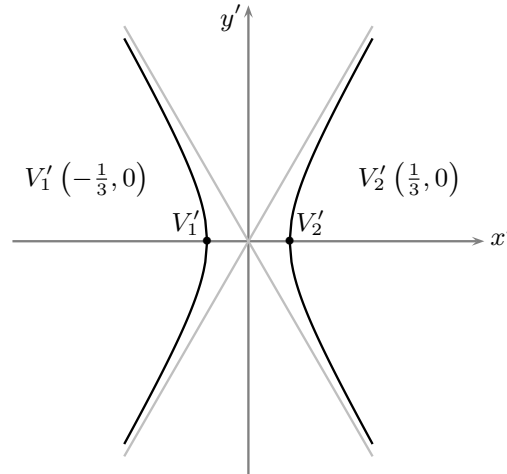
$$\gamma' : \frac{(x')^2}{1/9} - \frac{(y')^2}{1/3} = 1, \quad (8)$$

permette di riconoscere un'iperbole centrata  $\gamma'$  con vertici  $V'_1$  e  $V'_2$  sull'asse delle  $x$  (che è quindi l'asse focale)

$$V'_1 \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \quad V'_2 \left(\frac{1}{3}, 0\right).$$

Le lunghezze dei semiassi sono

$$a^2 = \frac{1}{9} \implies a = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{1}{3} \implies b = \frac{1}{\sqrt{3}},$$



**Fig. 3.** Grafico dell'iperbole traslata  $\gamma'$  e suoi asintoti.

da cui le equazioni degli asintoti

$$y' = \pm \left( \frac{1/\sqrt{3}}{1/3} \right) x' = \pm \sqrt{3} x'.$$

Il grafico di tale iperbole e relativi asintoti è rappresentato nella fig. 3.

Poiché la trasformazione (7) rappresenta una traslazione possiamo dedurre il grafico di  $\gamma$  eseguendo la traslazione inversa che, per le ascisse, si riduce a  $x = x' + \frac{2}{3}$  e quindi è rappresentata dal vettore  $\vec{t}$  di componenti  $\vec{t} = (\frac{2}{3}, 0)$ . Si tratta perciò di traslare di  $\frac{2}{3}$  nel verso positivo dell'asse  $x$  l'iperbole  $\gamma'$ . Pertanto l'ascissa del vertice  $V_1$  assume il valore di  $\frac{1}{3}$  e, data la condizione (6) sulle ascisse collegata alle condizioni geometriche iniziali, solo il ramo sinistro dell'iperbole potrà descrivere il luogo  $\gamma$ . Le equazioni dei due asintoti divengono

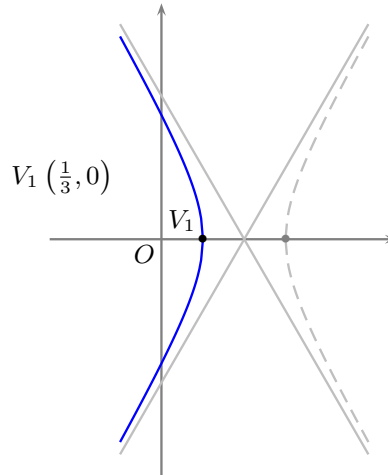
$$y' = \pm \sqrt{3} x' \quad \Longrightarrow \quad y = \pm \sqrt{3} \left( x - \frac{2}{3} \right)$$

cosicché il luogo richiesto possiede il grafico di fig. 4.

• Nel caso invece non sia nota la teoria sulle equazioni di II grado in due incognite si dovrà studiare la funzione data dalle (5)

$$\begin{cases} y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1} \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

e, al termine, considerare la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ . Il segno di tale funzione risulta evidentemente positivo se  $x < \frac{1}{3}$  mentre è nullo in corrispondenza di  $x = \frac{1}{3}$ .



**Fig. 4.** Grafico del luogo  $\gamma$  e suoi asintoti.

Lo studio del limite all'infinito implica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left( 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}$$

per cui estratto il fattore  $x^2$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{3}.$$

Tale risultato permette l'esistenza di un eventuale asintoto per cui va ancora risolto il limite

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

che, per quanto sopra, conduce ad un coefficiente angolare  $m = -\sqrt{3}$ . Il termine noto  $q$  discende dal limite

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} - (-\sqrt{3}x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x.$$

L'indeterminazione cui conduce quest'ultima espressione si riduce razionalizzando il numeratore ossia

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\dots} + \sqrt{3} \right) \cdot \frac{\sqrt{\dots} - \sqrt{3}x}{\sqrt{\dots} - \sqrt{3}x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1 - 3x^2}{\sqrt{\dots} - \sqrt{3}x}.\end{aligned}$$

Ridotti i termini simili ed estratto il fattore  $-x$  dalla radice si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 1} + \sqrt{3}x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{-x\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{3}x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(4 - 1/x)}{-x\left(\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4 - 1/x)}{\left(\sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - \frac{1}{x} = 4 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

La funzione quindi presenta l'asintoto di equazione  $r : y_a = -\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$ . La posizione della funzione rispetto ad  $r$  si studia risolvendo la disequazione  $y > y_a$ ,

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 1} > -\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3x^2 - 4x + 1} > \frac{2 - 3x}{\sqrt{3}}$$

che equivale alla

$$3x^2 - 4x + 1 > \left(\frac{2 - 3x}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \text{essendo} \quad x \leq \frac{1}{3}.$$

Da quest'ultima discende subito

$$3x^2 - 4x + 1 > 3x^2 - 4x + \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad 1 > \frac{4}{3}$$

che non possiede soluzioni: pertanto  $y < y_a \quad \forall x \leq \frac{1}{3}$ .

Il calcolo fornisce la derivata prima seguente

$$y' = \frac{6x - 4}{2\sqrt{3x^2 - 4x + 1}} = \frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$$

e questa risulta positiva se  $3x - 2 > 0$  cioè se  $x > \frac{2}{3}$ . Essendo  $x \leq \frac{1}{3}$  risulta in tale intervallo illimitato  $y' < 0$  e la funzione  $y$  è perciò monotona decrescente.

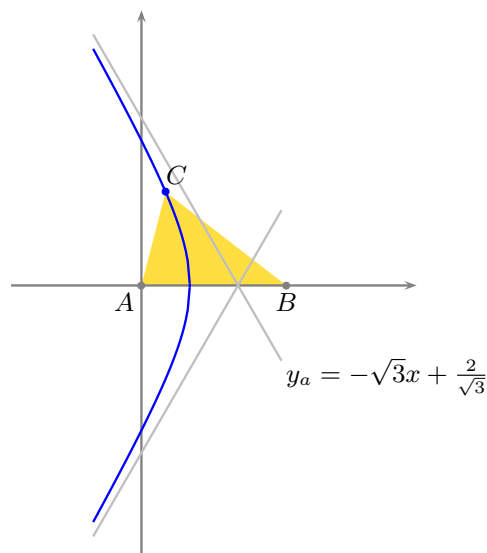
Lo studio della derivata seconda informa su come sono disposte le concavità e convessità della funzione. Si ha

$$\begin{aligned} y'' &= D \left[ \frac{3x - 2}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}} \right] = D \left[ \frac{3x - 2}{\sqrt{\dots}} \right] \\ &= \left( 3\sqrt{\dots} - (3x - 2) \cdot \frac{3x - 2}{\sqrt{\dots}} \right) / (3x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

ed eseguendo il minimo comune multiplo ci si riduce alla

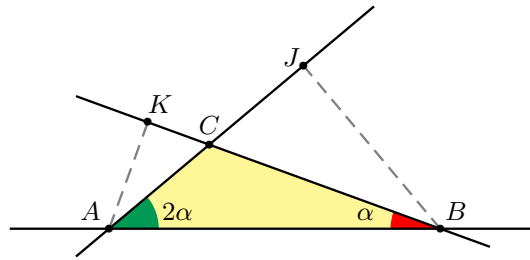
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{3(3x^2 - 4x + 1) - (3x - 2)^2}{(3x^2 - 4x + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{-1}{(3x^2 - 4x + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Poiché l'ultima espressione è certamente negativa per  $x \leq \frac{1}{3}$  la concavità è rivolta verso il basso. In definitiva, tenendo conto della simmetria, il grafico appare identico a quello già **discusso** e lo si ripropone di seguito (fig. 5) mettendone in evidenza pure il triangolo che lo origina a livello geometrico.



**Fig. 5.** Grafico del luogo  $\gamma$  e triangolo  $ABC$ .

3. La richiesta del quesito suggerisce implicitamente di abbandonare il sistema cartesiano e considerare l'angolo  $\alpha = \angle ABC$  come la variabile in termini della quale esprimere la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati  $AC$  e  $BC$ .



**Fig. 6.** Triangolo  $ABC$  ed altezze.

Detti  $J$  e  $K$  i piedi delle altezze relative al lato  $AC$  e rispettivamente  $BC$  (fig. 6), la funzione di cui cercare il massimo è

$$s = \overline{BJ}^2 + \overline{AK}^2.$$

Essendo i due triangoli  $ABJ$  e  $ABK$ , rettangoli con ipotenusa  $\overline{AB} = 1$ , è immediato dedurre che

$$\overline{AK} = \overline{AB} \sin \angle ABK = 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \quad \overline{BJ} = \overline{AB} \sin \angle BAJ = \sin 2\alpha.$$

Pertanto la funzione  $s$  che si ottiene è

$$\begin{cases} s = \sin^2 2\alpha + \sin^2 \alpha \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

dove si sono aggiunte le condizioni sull'angolo  $\alpha$ .

La sua derivata prima risulta

$$s' = 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot 2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha (4 \cos 2\alpha + 1)$$

e lo studio del segno  $s' \geq 0$  coinvolge due fattori, il primo dei quali risulta positivo o nullo,  $\sin 2\alpha \geq 0$ , per  $0 \leq 2\alpha \leq \pi$  ossia  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Per l'altro si ha

$$4 \cos 2\alpha + 1 \geq 0 \quad \cos 2\alpha \geq -\frac{1}{4} \tag{9}$$

e quindi definito l'angolo  $2\beta$  tramite

$$\cos 2\beta = -\frac{1}{4} \quad \text{ossia} \quad 2\beta = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right),$$

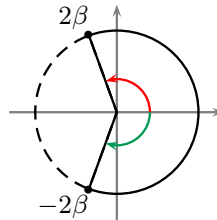


Fig. 7.

angolo che approssimativamente vale

$$\beta = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 52,238^\circ = 52^\circ 14' 20'',$$

le soluzioni della (9) sono rappresentate graficamente dalla figura 7 coinvolgente la circonferenza goniometrica. Formalmente è l'insieme  $-2\beta + 2k\pi \leq 2\alpha \leq 2\beta + 2k\pi$  ossia  $-\beta + k\pi \leq \alpha \leq \beta + k\pi$ .

Restringendo lo studio in  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$  e associando pure l'esito dello studio del segno del primo fattore (fig. 8) si riconosce dal segno complessivo di  $s'$  che il massimo è raggiunto quando  $\alpha = \beta = 52^\circ 14' 20''$ .

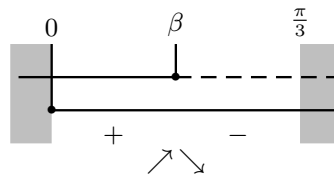


Fig. 8.

4. Se  $\angle ABC = 36^\circ$  segue che  $\angle CAB = 2\angle ABC = 72^\circ$  e  $\angle BCA = 180^\circ - 3(36^\circ) = 72^\circ$  per cui il triangolo  $\triangle ABC$  è isoscele sulla base  $AC$  e il lato  $AC$  è pure il lato di un decagono regolare di apotema unitaria (si veda pure il quesito n. 1 dell'Esame 2005).

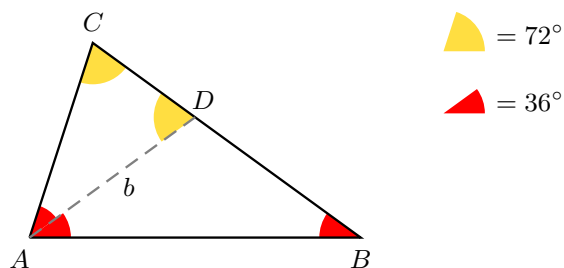


Fig. 9.

Tracciata la bisettrice  $b$  di  $\angle A$  (fig. 9) sia  $\{D\} = b \cap BC$  per cui  $\triangle CAD$  possiede l'angolo in  $A$  di  $36^\circ$  e, per differenza,  $\angle ADC = 72^\circ$ . Ne segue che  $\overline{AD} = \overline{AC}$  e, per il III criterio,  $\triangle CAD$  è simile con  $\triangle ABC$ . D'altra parte pure  $\triangle ABD$  è isoscele avendo le ampiezze degli angoli adiacenti il lato  $AB$  uguali a  $36^\circ$  e quindi  $\overline{AD} = \overline{BD}$ . Pertanto da  $\triangle ABC \sim \triangle CAD$  segue la proporzione

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$$

che, per quanto detto,  $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BD} = x$  e  $\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD} = 1 - x$ , riscriviamo come

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}.$$

Moltiplicando per  $x$  si ha  $x^2 = 1 - x$  cioè  $x^2 + x - 1 = 0$ . Quest'ultima equazione possiede le soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

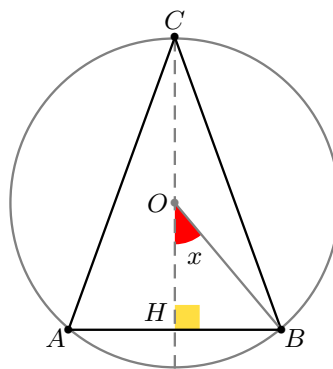
e l'unica accettabile risulta

$$x_1 = \overline{AC} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

che coincide con quanto si voleva dimostrare. Infine, poiché il valore ottenuto rappresenta la sezione aurea dell'unità ( $\overline{BC} = 1$ ), possiamo aggiungere l'osservazione di geometria elementare che vede il lato  $AC$  di un decagono regolare come la sezione aurea di  $BC$  cioè del raggio del cerchio circoscritto a tale poligono regolare.\*

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

Tracciata l'altezza  $CH$  relativa alla base  $AB$  del triangolo isoscele  $ABC$  inscritto nel cerchio  $C$  di centro  $O$  e raggio  $r$  (fig. 1), poniamo  $x = \angle HOB$  con  $0 \leq x \leq \pi$ .



**Fig. 1.** Triangolo isoscele inscritto in un cerchio.

\* Per ulteriori approfondimenti si veda la pagina web

<http://www.lorenzoroi.net/geometria/Poligoni.html>

Considerando il triangolo rettangolo  $OHB$  di ipotenusa  $\overline{OB} = r$ , risulta facilmente che la misura (con segno) del cateto  $OH$  è

$$OH = \overline{OB} \cos \angle HOB = r \cos x,$$

potendo  $OH$  assumere valori anche negativi nell'intervallo  $[-r, r]$ , mentre  $\overline{HB}$  è pari a  $\overline{HB} = \overline{OB} \sin \angle HOB = r \sin x$ . Ne segue che  $\overline{CH} = \overline{CO} + OH = r + r \cos x$  e tale relazione rimane valida pure quando l'ampiezza dell'angolo  $x$  assume valori maggiori di  $\pi/2$ . L'area di  $\triangle ABC$  è perciò rappresentata dalla funzione

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \overline{HB} \cdot \overline{CH} = r \sin x (r + r \cos x)$$

ossia, con le restrizioni geometriche (poniamo per brevità  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\triangle ABC)$ )

$$\begin{cases} \mathcal{A} = r^2(\sin x + \sin x \cos x) \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

La derivata di quest'ultima espressione è

$$\mathcal{A}' = r^2(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = r^2(\cos x + 2 \cos^2 x - 1)$$

dove si è utilizzata l'identità goniometrica  $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ . Lo studio del segno di  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}' \geq 0$ , implica la risoluzione della disequazione  $2 \cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$  che, posto  $t = \cos x$ , si riduce alla

$$t^2 + t - 1 \geq 0 \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \quad t \leq -1 \vee t \geq \frac{1}{2}.$$

La disequazione elementare  $\cos x \leq -1$  possiede come soluzioni  $x = \pi + 2k\pi$  mentre le soluzioni di  $\cos x \geq \frac{1}{2}$ , notato che  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , sono rappresentate graficamente dalla fig. 2 e formalmente dalle

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

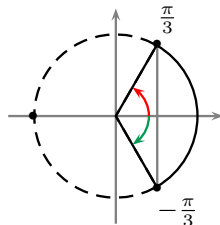


Fig. 2.

Nell'intervallo  $[0, \pi]$  il segno di  $\mathcal{A}'$  è quindi sintetizzato graficamente dalla figura 3 che mette in evidenza un massimo in corrispondenza dell'angolo  $x_{max} = \frac{\pi}{3}$ .

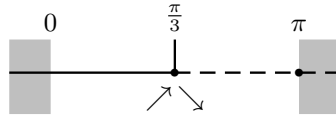


Fig. 3.

In tal caso  $\triangle ABC$  si riduce ad un triangolo equilatero come d'altra parte ci si poteva aspettare essendo questo un classico problema di max-min.

2. Se  $\mathcal{P}_n$  è il poligono regolare di  $n$  lati inscritto nel cerchio  $\mathcal{C}$  e  $O$  è il suo centro, sia  $\triangle AOB$  il triangolo isoscele avente per base un lato  $AB$  del poligono (fig. 4). L'ampiezza dell'angolo al vertice di  $\triangle AOB$  è evidentemente  $\angle AOB = 2\pi/n$ .

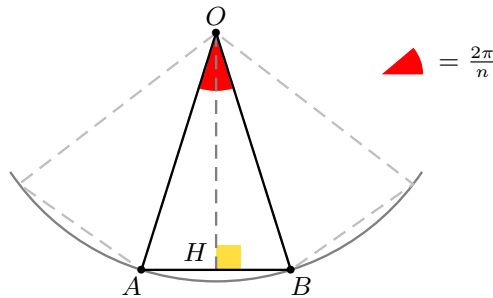


Fig. 4. Triangolo di un poligono regolare inscritto in  $\mathcal{C}$ .

Essendo  $\overline{AO} = \overline{OB} = r$  e detto  $H$  il piede dell'altezza alla base  $AB$  si ha

$$\begin{aligned} \overline{HB} &= \overline{OB} \operatorname{sen}\left(\frac{\angle AOB}{2}\right) \\ &= r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi/n}{2}\right) \\ &= r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\overline{OH} = \overline{OB} \cos\left(\frac{\angle AOB}{2}\right) = r \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

e quindi l'area di  $\triangle AOB$  è

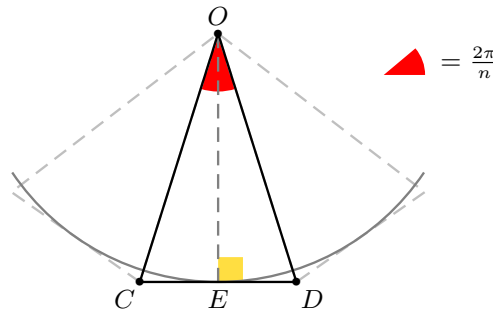
$$\mathcal{A}(\triangle AOB) = \overline{HB} \cdot \overline{OH} = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Essendo il poligono  $\mathcal{P}_n$  formato da  $n$  triangoli congruenti (ed equivalenti) a quello appena discusso, l'area complessiva  $\mathcal{S}_n$  di  $\mathcal{P}_n$  è

$$\mathcal{S}_n = n \cdot \mathcal{A}(\triangle AOB) = n \cdot r^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} \cdot r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

avendo sfruttato l'identità goniometrica  $\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$ . L'espressione trovata coincide con quella richiesta dal quesito.

Per il poligono regolare circoscritto  $\mathcal{P}'_n$  (fig. 5) l'apotema è  $\overline{OE} = r$  con  $E$  piede dell'altezza relativa alla base  $CD$ : risulta inoltre ancora  $\angle COD = 2\pi/n$ .



**Fig. 5.** Triangolo di un poligono regolare circoscritto a  $C$ .

Per la definizione di tangente goniometrica ne deriva che

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{OE}} = \operatorname{tg} \angle DOE = \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \angle COD \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{n} \right).$$

Segue che  $\overline{ED} = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$  per cui

$$\mathcal{A}(\triangle COD) = \overline{OE} \cdot \overline{ED} = r \cdot r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

e l'area complessiva  $\mathcal{S}'_n$  del poligono circoscritto è, in definitiva,  $\mathcal{P}'_n$

$$\mathcal{S}'_n = n \cdot \mathcal{A}(\triangle COD) = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

3. Si chiede di calcolare il seguente limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \cdot r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2}{2} \left( n \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Posto  $x = \frac{2\pi}{n}$  e osservato che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x = 0$ , il limite richiesto si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{x} \cdot \text{sen } x = \lim_{x \rightarrow 0} \pi r^2 \left( \frac{\text{sen } x}{x} \right).$$

Sapendo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

se l'angolo  $x$  è espresso in radianti come è in tal caso, si giunge infine alla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2$$

che costituisce, come aspettato, l'area del cerchio  $\mathcal{C}$ .

4. Il problema storico della quadratura del cerchio consiste nella costruzione di un quadrato, per esempio di lato  $l$ , che abbia un'area pari a quella del cerchio ossia

$$l \cdot l = \pi r^2 \quad l^2 = \pi r^2.$$

Evidentemente a livello algebrico dev'essere  $l = r\sqrt{\pi}$  ma, va ribadito, la costruzione del quadrato dev'essere realizzata tramite riga e compasso gli unici strumenti ammessi nell'ambito della geometria euclidea. Il problema è inoltre equivalente a quello della rettificazione della circonferenza che consiste nel determinare con riga e compasso un segmento congruente con la lunghezza della circonferenza ( $l = 2\pi r$ ).

Nel 1882 F. Lindemann ha dimostrato che tali problemi (che trovano origine nella geometria greca) non sono risolvibili ossia è impossibile costruire con strumenti euclidei (riga e compasso) un quadrato che abbia la stessa area del cerchio. In termini algebrici ciò equivale ad affermare che  $\pi$ , o anche  $\sqrt{\pi}$ , non sono esprimibili tramite radicali ossia non possono essere soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti razionali: sono cioè dei numeri reali trascendenti.

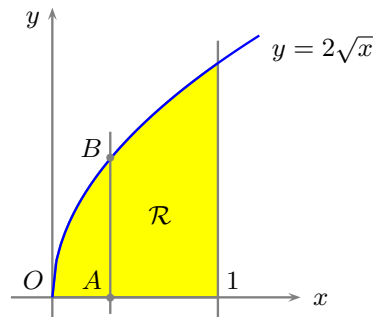
#### Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

L'equazione  $y = 2\sqrt{x}$  rappresenta l'arco di parabola  $p$  descritto pure dal sistema misto

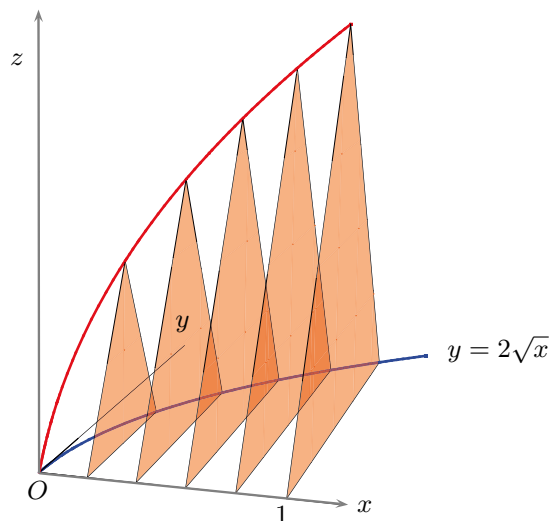
$$p : \begin{cases} x = \frac{1}{4}y^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

ottenuto quadrando l'equazione assegnata e ponendo le necessarie condizioni di esistenza ( $x \geq 0$ ) e positività ( $y \geq 0$ ). Il grafico corrispondente è riportato in fig. 1.

Del solido  $\mathcal{S}$  vengono proposte in prospettiva alcune sue sezioni (fig. 2) con evidenziato in blu l'arco di parabola  $p$  e in rosso il luogo dei vertici non appartenenti al piano  $Oxy$  dei triangoli equilateri sezioni di  $\mathcal{S}$ .



**Fig. 1.** Arco di parabola  $p$  e regione  $R$ .



**Fig. 2.** Cinque sezioni equilateri del solido  $S$ .

Il volume di un solido  $S$  del quale sia possibile esprimere l'area delle sue sezioni parallele in funzione di una variabile  $x$  è dato dall'integrale

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x) \cdot dx$$

dove  $\mathcal{A}(x)$  rappresenta l'area della sezione del solido ottenuta tagliando  $S$  nel punto di ascissa  $x$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , mentre  $a$  e  $b$  sono gli estremi rispettivamente inferiore e superiore di variabilità di  $x$ : la funzione  $\mathcal{A}(x)$  è supposta nota e continua nell'intervallo  $[a, b]$ .

Nel caso in esame le sezioni sono costituite da triangoli equilateri aventi la base di estremi  $A(x, 0)$  e  $B(x, 2\sqrt{x})$  (fig. 1) e quindi la misura del lato in termini di  $x$

è  $l = 2\sqrt{x}$ . Poiché l'area di un triangolo equilatero di lato  $l$  è data da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot l = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2,$$

il volume di  $\mathcal{S}$  si calcola con l'integrale definito

$$\mathcal{V} = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2 dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4x dx = \sqrt{3} \int_0^1 x dx$$

avendo sostituito ad  $l$  la sua espressione in termini della variabile  $x$ . Poiché  $\int x dx = x^2/2$ , il risultato discende immediato

$$\mathcal{V} = \sqrt{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Siano  $a = 40$  cm,  $b = 60$  cm e  $c = 80$  cm le misure delle lunghezze dei tre lati di un triangolo. Poiché il teorema di Carnot (o del coseno) collega tali lunghezze ad un angolo del triangolo tramite la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

e le analoghe per  $b$  e  $c$ , non resta che applicare tale teorema isolando a primo membro il coseno. Ne segue

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{60^2 + 80^2 - 40^2}{2 \cdot 60 \cdot 80} = \frac{7}{8}$$

da cui  $\alpha = \arccos \frac{7}{8} \approx 28,9550^\circ = 28^\circ 57' 18''$ .

Allo stesso modo

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{40^2 + 80^2 - 60^2}{2 \cdot 40 \cdot 80} = \frac{11}{16}$$

da cui

$$\beta = \arccos \frac{11}{16} \approx 46,5675^\circ = 46^\circ 34' 3''$$

e infine,

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{40^2 + 60^2 - 80^2}{2 \cdot 40 \cdot 60} = -\frac{1}{4}$$

da cui

$$\gamma = \arccos \left( -\frac{1}{4} \right) \approx 104,4775^\circ = 104^\circ 28' 39''.$$

Ovviamente risulta  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Riscritta l'equazione  $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$  come  $x^3 - x^2 + 1 = k$ , la ricerca del numero delle sue soluzioni al variare del parametro  $k$  cioè la sua *discussione*, equivale alla ricerca delle intersezioni tra le curve di equazione

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 + 1 \\ y = k, \end{cases}$$

la prima rappresentativa di una parabola cubica, la seconda di un fascio di rette orizzontali.

Notato che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = \pm\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1,$$

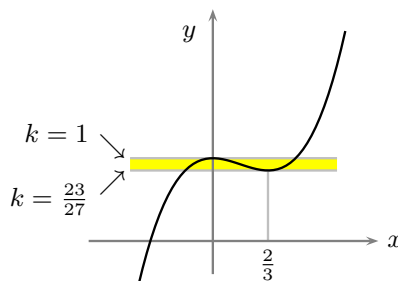
e che la derivata prima  $y' = 3x^2 - 2x \geq 0$  risulta positiva o nulla per  $x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$ , ne segue che la cubica possiede un massimo in  $x = 0$  (fig. 1) del valore  $y(0) = 1$  ed un minimo in corrispondenza di  $x = \frac{2}{3}$  che vale

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{8 - 12 + 27}{27} = \frac{23}{27}.$$



**Fig. 1.**

Con queste informazioni possiamo tracciare un grafico approssimativo (fig. 2) ma che ci permette di riconoscere il numero delle soluzioni.



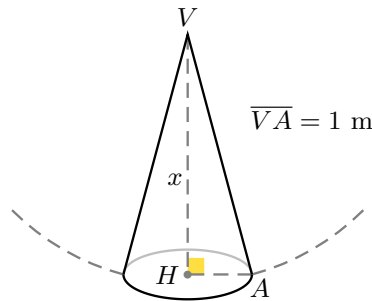
**Fig. 2.** Grafico della cubica  $y = x^3 - x^2 + 1$ .

Il fascio di equazione  $y = k$  interseca quindi la cubica in un solo punto (e quindi avremo una sola soluzione) per  $k < \frac{23}{27} \vee k > 1$  mentre vi sono 3 soluzioni per  $\frac{23}{27} \leq k \leq 1$ : di queste ultime, due coincidono se  $k$  assume i valori estremi  $k = 1$  o  $k = \frac{23}{27}$ .

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

In riferimento alla figura 1, sia  $V$  il vertice del cono,  $H$  il piede dell'altezza e  $A$  un punto qualsiasi della circonferenza di base. Dato che l'apotema è unitaria,  $\overline{VA} = 1$  m, posto  $x = \overline{VH}$  con  $0 \leq x \leq 1$ , la misura del raggio di base  $\overline{AH}$  si esprime per mezzo del teorema di Pitagora,

$$r^2 = \overline{AH}^2 = \overline{VA}^2 - \overline{VH}^2 = 1 - x^2.$$



**Fig. 1.** Cono e sue dimensioni.

Il volume  $\mathcal{V}$  risulta di conseguenza

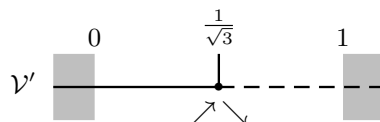
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} (\pi \overline{AH}^2) \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3} (\pi r^2) \cdot x \\ &= \frac{1}{3} \pi (1 - x^2) x = \frac{\pi}{3} (x - x^3) \end{aligned}$$

con associata la condizione di origine geometrica  $0 \leq x \leq 1$ .

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$\mathcal{V}' = \frac{\pi}{3} (1 - 3x^2) \quad \text{per cui da } \mathcal{V}' \geq 0 \quad \text{discende } 1 - 3x^2 \geq 0$$

e quest'ultima disequazione è risolta dai valori dell'intervallo  $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ . La rappresentazione grafica del segno di  $\mathcal{V}'$  (fig. 2) mette in evidenza la crescita della funzione in  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$  e la monotonia decrescente per  $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$



**Fig. 2.**

Pertanto il volume raggiunge il suo valore massimo,  $\mathcal{V}_{max}$ , in corrispondenza del valore  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Tale valore risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{max} &= \frac{\pi}{3} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 \right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \text{ m}^3.\end{aligned}$$

Il passaggio all'unità litri viene realizzato ricordando che

$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ litri}$$

per cui

$$\mathcal{V}_{max} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \text{ m}^3 \approx 0,4031 \text{ m}^3 = 0,4031 \times 10^3 \text{ litri} = 403,1 \text{ litri.}$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Il teorema di Lagrange (o *del valor medio*), nell'ipotesi di una funzione  $f$  continua in un intervallo  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ , stabilisce l'esistenza di almeno un valore  $x_0 \in ]a, b[$  in corrispondenza del quale la derivata prima  $f'(x_0)$  assume il valore

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad x_0 \in ]a, b[.$$

La funzione  $f$  di equazione  $y = x^3 + 8$  è una funzione polinomiale di terzo grado detta anche *parabola cubica*. Poiché è noto che qualsiasi polinomio rappresenta una funzione continua in  $\mathbb{R}$  derivabile un numero qualsiasi di volte, la  $f$  soddisfa alle ipotesi del teorema di Lagrange in ogni intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e quindi pure in  $[-2, 2]$ . Pertanto,  $\exists x_0 \in ]-2, 2[$  dove

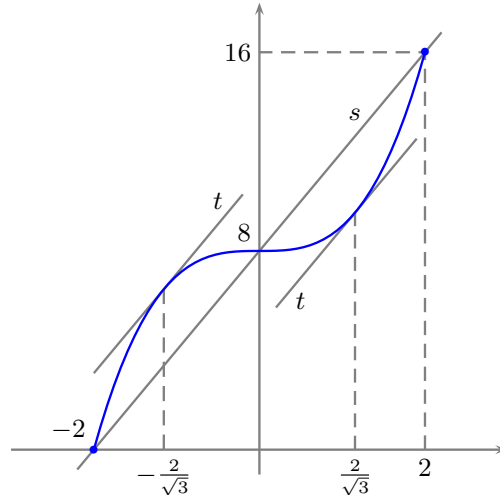
$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \quad x_0 \in ]-2, 2[.$$

Essendo  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f(2) = 16$  e  $f(-2) = 0$  risulta

$$3x_0^2 = \frac{16 - 0}{4} \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ed entrambi i valori sono accettabili in quanto interni all'intervallo  $[-2, 2]$ .

Il significato geometrico è illustrato in figura 1 dove il grafico  $G$  di  $f$  si è dedotto traslando di 8 unità nel verso positivo dell'asse  $y$  quello noto della parabola cubica



**Fig. 1.** Grafico di  $y = x^3 + 8$  e rette tangenti e secante (non isometrico).

$y = x^3$ . Appare evidente che in ciascun punto di ascissa  $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ , la retta tangente  $t$  al grafico è parallela alla retta  $s$ , secante il medesimo grafico e passante per gli estremi di  $f$  in  $[-2, 2]$  cioè in  $(-2, 0)$  e  $(2, 16)$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Supponiamo che a partire dal prezzo  $p$  vi sia stato prima un aumento e successivamente una diminuzione. Se quindi  $p$  è il prezzo iniziale, dopo l'aumento il suo prezzo  $p_1$  è

$$p_1 = p + 6\% p = p + 0,06 p = (1 + 0,06)p. \quad (1)$$

A seguito della diminuzione risulta infine

$$p_2 = p_1 - 6\% p_1 = p_1 - 0,06 p_1 = (1 - 0,06) p_1$$

e sostituendovi la (1) si ottiene

$$\begin{aligned} p_2 &= (1 - 0,06) p_1 = (1 - 0,06)(1 + 0,06)p = (1 - 0,06^2)p \\ &= (1 - 0,0036)p. \end{aligned} \quad (2)$$

In definitiva, il prezzo è diminuito dello 0,36%.

Nell'ipotesi alternativa che vi sia un'iniziale diminuzione seguita da un aumento, il prezzo dopo la diminuzione risulta

$$p'_1 = p - 6\% p = p - 0,06 p = (1 - 0,06) p. \quad (3)$$

mentre, a seguito dell'aumento, il prezzo finale sarà

$$p'_2 = p'_1 + 6\% p'_1 = p'_1 + 0,06 p'_1 = (1 + 0,06) p'_1$$

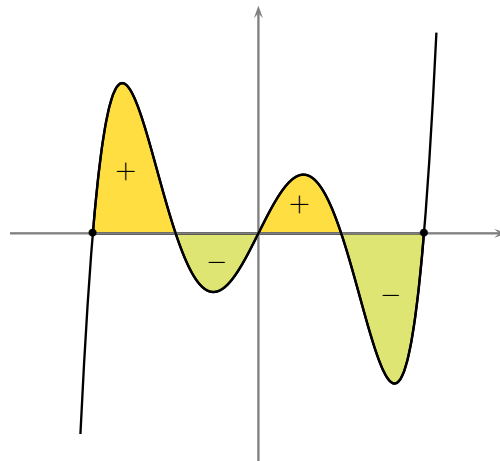
e, ancora sostituendo la (3) in quest'ultima, si giunge alla

$$\begin{aligned} p'_2 &= (1 + 0,06) p'_1 = (1 + 0,06)(1 - 0,06) p = (1 - 0,06^2) p \\ &= (1 - 0,0036) p \end{aligned}$$

Questo risultato mostra un prezzo finale identico a quello dato dalla (2) e ciò ci permette di concludere che il prezzo diminuisce leggermente (dello 0,36%) e nello stesso modo, in entrambe le ipotesi.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Se la funzione  $f$  risulta  $f(-x) = -f(x) \forall x \in [-2, 2]$  e ivi definita ed integrabile, il suo integrale definito  $I$  nel medesimo intervallo dev'essere nullo in quanto, escluso il caso banale  $f(x) = 0 \forall x \in [-2, 2]$  che comporta ovviamente  $I = 0$ , a regioni trapezoidali che contribuiscono con valori positivi all'integrale definito (dove  $f(x) > 0$ , in arancione in fig. 1) corrispondono per simmetria, trapezoidi dove l'integrale definito assume valori negativi (fig. 1).



**Fig. 1.** Grafico di una funzione dispari e segno di aree di trapezoidi.

Per generalità forniamo la dimostrazione ponendo  $2 = a$  cosicché si dovrà dimostrare che

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

supposta valida l'identità  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in [-a, a]$ , con  $f(x)$  integrabile.

Per la proprietà di additività dell'integrale definito possiamo suddividere  $I$  negli integrali

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \quad (1)$$

Posto  $x = -t$  per cui  $dx = -dt$ , gli estremi di integrazione risultano se  $x = -a$ ,  $t = a$  e se  $x = 0$ ,  $t = 0$ . Ne segue che il primo integrale del II membro di (1) si riscrive come

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_a^0 f(-t)dt$$

dove si è sfruttata la proprietà di linearità dell'integrale. Per la simmetria dispari della funzione  $f(-t) = -f(t)$  per cui il precedente integrale diviene

$$-\int_a^0 f(-t)dt = -\int_a^0 [-f(t)]dt = \int_a^0 f(t)dt.$$

Infine considerando che, per definizione,

$$\int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt,$$

l'integrale originario (1)

$$I = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x) dx = 0$$

appare la somma di due termini opposti in quanto il nome della variabile di integrazione non influisce sul valore dell'integrale: in conclusione  $I = 0$ .

Applichiamo tale proprietà al calcolo dell'integrale definito

$$\int_{-2}^2 [3 + f(x)] dx.$$

Per la proprietà di additività

$$\int_{-2}^2 [3 + f(x)] dx = \int_{-2}^2 3 dx + \int_{-2}^2 f(x) dx$$

ma essendo  $\int k dx = kx$  mentre, per quanto dimostrato, il secondo addendo è nullo, discende

$$\int_{-2}^2 [3 + f(x)] dx = 3[x]_{-2}^2 + 0 = 3(2 + 2) = 12.$$

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Tenendo conto della definizione di coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{con } n \geq k,$$

le soluzioni della disequazione

$$4 \binom{n}{4} = 15 \binom{n-2}{3} \quad (1)$$

dovranno soddisfare alle condizioni

$$\begin{cases} n \geq 4 \\ n-2 \geq 3 \end{cases} \implies \begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 5 \end{cases} \text{ risolto da } n \geq 5. \quad (2)$$

Eslicitata l'equazione (1) con la definizione di coefficiente binomiale

$$4 \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!} = 15 \cdot \frac{(n-2)!}{3!(n-2-3)!},$$

la proprietà del fattoriale  $n! = n \cdot (n-1)!$  permette di riscriverla come

$$4 \cdot \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{4 \cdot 3!(n-4)!} = 15 \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{3!(n-5)!}.$$

Possiamo ora semplificare i fattori comuni a numeratore e denominatore ottenendo

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = \frac{15}{3!} \cdot (n-2)(n-3)(n-4).$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $3!$  e riportati i termini nel primo membro

$$n(n-1)(n-2)(n-3) - 15(n-2)(n-3)(n-4) = 0,$$

si possono riconoscere dei fattori comuni

$$(n-2)(n-3)[n(n-1) - 15(n-4)] = 0,$$

per cui si giunge all'equazione

$$(n-2)(n-3)(n^2 - 16n + 60) = 0.$$

Evidentemente questa equazione ammette le soluzioni intere  $n = 2$  o  $n = 3$  ma, per quanto posto **inizialmente**, non sono valori accettabili in quanto minori di 5. Il terzo fattore si annulla invece in corrispondenza dei valori

$$n^2 - 16n + 60 = 0 \quad n_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64 - 60} = \begin{cases} \nearrow 10 \\ \searrow 6 \end{cases}$$

entrambi accettabili. Le soluzioni dell'equazione 1 sono pertanto  $n = 6$  oppure  $n = 10$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

L'integrale indefinito

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

è collegato all'area del cerchio. Per determinarne l'insieme delle primitive eseguiamo il cambio di variabile collegato alla funzione  $x = \sin t$  il cui differenziale è  $dx = \cos t dt$ . Sostituendo questi termini, l'integrale originario si riscrive

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

ed utilizzando l'identità goniometrica fondamentale  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$  si riduce a (consideriamo  $\cos t > 0$ )

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int |\cos t| \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Quest'ultima forma si può ricondurre ad integrali elementari ricordando la formula di duplicazione  $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$  da cui

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

espressione quest'ultima che costituisce pure il quadrato di una formula di bisezione in quanto collega un angolo  $t$  con il suo doppio,  $2t$ . Con la sostituzione di questa identità e sfruttando la linearità dell'integrale indefinito giungiamo

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt. \end{aligned}$$

Con un'ulteriore semplice sostituzione  $w = 2t$  avente per differenziale  $dw = 2 dt$  per cui  $dt = dw/2$ , l'integrale rimasto diviene

$$\frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int \cos w \cdot \frac{1}{2} dw = \frac{1}{4} \int \cos w dw = \frac{1}{4} \sin w$$

e l'integrale iniziale, in termini di  $t$  e  $w$  risulta

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin w + c.$$

Per giungere ad esprimerlo in termini della variabile  $x$ , dalla  $x = \operatorname{sen} t$  si ricava  $t = \operatorname{arcsen} x$  e, tenuto conto che  $\operatorname{sen} w = \operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ , si ha

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + c \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t + c. \end{aligned}$$

Osservato che  $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$  si giunge infine al risultato

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left( \operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2} \right) + c$$

che rappresenta l'insieme delle primitive richiesto.

L'integrale definito di una funzione positiva

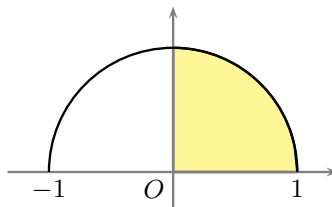
$$\int_a^b f(x) \, dx$$

esprime geometricamente l'area del trapezoide compreso tra il grafico di  $f(x)$ , l'asse delle  $x$  e le rette  $x = a$ ,  $x = b$ . Nel caso proposto dal quesito, poiché l'equazione  $y = \sqrt{1-x^2}$  descrive la semicirconferenza di ordinate positive con centro l'origine del sistema cartesiano e raggio unitario (quadrando, si ottiene l'equazione della circonferenza goniometrica  $x^2 + y^2 = 1$ ), ne segue che il valore dell'integrale definito

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

dovrà coincidere con l'area del quadrante di cerchio di raggio  $r = 1$  (fig. 1) e valere

$$\mathcal{A} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}.$$



**Fig. 1.** Quadrante di cerchio di raggio unitario.

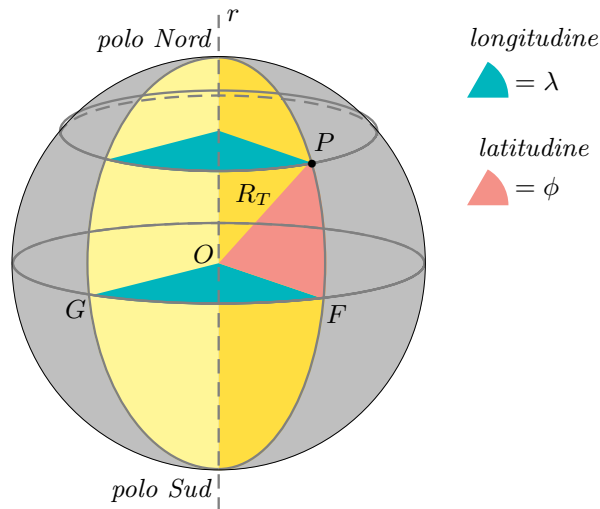
Difatti, utilizzando una delle primitive dedotte in precedenza, l'applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale fornisce

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \left[ \arcsen x + x\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left( \arcsen 1 + \sqrt{1-1} - \arcsen 0 - 0\sqrt{1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

che conferma quanto aspettato.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La rotazione della Terra, con periodo di 24 ore, attorno ad una retta  $r$ , l'asse terrestre, definisce una direzione privilegiata nello spazio cui riferire le disposizioni di opportuni piani rispetto alla Terra stessa. Innanzitutto l'asse terrestre interseca la superficie sferica terrestre  $S$  in due suoi punti particolari, il polo Nord e il polo Sud (fig. 1) e inoltre passa per il centro  $O$  di  $S$ .



**Fig. 1.** Terra e definizione di meridiani e paralleli.

L'intersezione della superficie terrestre con un piano passante per l'asse terrestre e per un punto  $P$  qualsiasi di  $S$ , definisce il *meridiano terrestre* che quindi risulta una circonferenza di raggio pari al raggio  $R_T$  della Terra passante per i poli. Il meridiano è suddiviso dai poli in due semicirconferenze ciascuna delle quali è detta, *meridiano geografico*. Assunto come meridiano geografico fondamentale quello passante per Greenwich, la distanza angolare tra questo e il meridiano passante per  $P$  ossia l'angolo di una sezione normale del diedro formato dai due piani

che definiscono i meridiani, rappresenta la *longitudine*  $\lambda$  di  $P$ . In riferimento alla fig. 1 risulta  $\lambda = \angle GOF$  assunto il meridiano per  $G$  come quello fondamentale. Convenzionalmente, se  $P$  si trova ad Est del meridiano fondamentale, la longitudine appartiene all'intervallo  $[0^\circ, 180^\circ]$  mentre assume valori in  $] - 180^\circ, 0[$  se ad Ovest.

L'intersezione della superficie terrestre  $S$  con un piano perpendicolare all'asse terrestre  $r$  e passante per un punto qualsiasi  $P$ , è a sua volta una circonferenza e questa definisce il *parallelo terrestre* per  $P$ . Fissato il *parallelo fondamentale* ossia l'equatore, ottenuto con l'intersezione di  $S$  con il piano perpendicolare ad  $r$  passante per il centro  $O$  della Terra, l'ampiezza dell'angolo  $\phi$  formato dalla verticale nel punto  $P$  cioè la linea  $OP$  che collega il centro della Terra con  $P$  con il piano equatoriale (fig. 1), si dice *latitudine* di  $P$ . In fig. 1,  $\phi = \angle FOP$ . Convenzionalmente tale angolo varia tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$  per punti nell'emisfero nord (o *boreale*), tra  $-90^\circ$  e  $0^\circ$  in quello sud (o *australe*).

Un punto  $P$  in tale sistema di coordinate terrestri viene in definitiva individuato dalla coppia di angoli  $(\lambda, \phi)$ .

# ESAME 2007 PNI

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

## • Problema n. 1

1) Sia  $a$  un numero reale maggiore di zero e sia  $g$  la funzione definita, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , da:  $g(x) = a^x + a^{-x}$ .

1. Si dimostri che, se  $a \neq 1$ ,  $g$  è strettamente crescente per  $x > 0$  e strettamente decrescente per  $x < 0$ .
2. Posto  $a = e$ , si disegni il grafico della funzione  $f(x) = e^x + e^{-x}$  e si disegni altresì il grafico della funzione  $\frac{1}{f(x)}$ .
3. Si calcoli  $\int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$ ; successivamente, se ne trovi il limite per  $t \rightarrow \infty$  e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è  $\frac{\pi}{4}$ , si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

Soluzione

## • Problema n. 2

2) Si considerino i triangoli la cui base è  $AB = 1$  e il cui vertice  $C$  varia in modo che l'angolo  $\widehat{CAB}$  si mantenga doppio dell'angolo  $\widehat{ABC}$ .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico  $\gamma$  descritto da  $C$ .
2. Si rappresenti  $\gamma$ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\widehat{ABC}$  che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati  $AC$  e  $BC$  e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se  $\widehat{ABC} = 36^\circ$  allora è  $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Soluzione

2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione  $y = \ln x$  e l'asse  $x$ , con  $1 \leq x \leq e$ , è base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di  $S$  e se ne dia un valore approssimato a meno di  $10^{-2}$ .

Soluzione

3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro  $O$  fissato è un *gruppo*.

Soluzione

4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  e come tali parametri influenzino il grafico di  $f(x)$ .

Soluzione

5. Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

Soluzione

6. Si scelga a caso un punto  $P$  all'interno di un triangolo equilatero il cui lato

ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di  $P$  da ogni vertice sia maggiore di 1.

Soluzione

7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola  $y = x^2 + 1$  nel punto  $(1, 2)$ .

Soluzione

8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: « Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».

Soluzione

9. Si dimostri che l'equazione  $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$  ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

Soluzione

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera  $S$  e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta  $r$  passante per il centro di  $S$ , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. La funzione proposta dal problema è

$$g(x) = a^x + a^{-x} \quad \text{con} \quad a > 0 \wedge a \neq 1$$

e il suo dominio è l'insieme  $\mathbb{R}$  (il caso che sia  $a = 1$  si riduce all'equazione  $y = 1$  rappresentativa di una retta parallela all'asse  $x$ ). Per dimostrare la sua

monotonia strettamente crescente per  $x > 0$  (e decrescente per  $x < 0$ ), osserviamo innanzitutto le proprietà di simmetria di tale funzione. Poiché vale l'identità

$$g(-x) = a^{-x} + a^{-(-x)} = a^{-x} + a^x = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la funzione  $g$  è una funzione pari e, in un sistema cartesiano, il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Segue che, se per  $x > 0$  è strettamente crescente dovrà, per  $x < 0$ , essere strettamente decrescente.

La dimostrazione del primo assunto si ottiene con lo studio del segno della derivata prima  $g'(x)$ ,

$$g'(x) = a^x \cdot \ln a + a^{-x} \cdot (\ln a) \cdot (-1) = \ln a (a^x - a^{-x}).$$

Da  $g'(x) > 0$  discende

$$\ln a (a^x - a^{-x}) > 0, \quad (1)$$

e le soluzioni di tale disequazione dipendono dal valore della base  $a$ . Se quindi  $a > 1$  è  $\ln a > 0$  per cui

$$a^x - a^{-x} > 0 \quad \implies \quad a^x > a^{-x}$$

e, ricordando la monotonia strettamente crescente della funzione esponenziale a base maggiore di 1, abbiamo

$$x > -x \quad \implies \quad 2x > 0 \quad \implies \quad x > 0.$$

Quindi con  $a > 1$  la funzione  $g$  è strettamente crescente in  $x > 0$ .

Nel caso  $0 < a < 1$  il primo fattore di (1) è  $\ln a < 0$  per cui l'altro dovrà essere  $a^x - a^{-x} < 0$  da cui

$$a^x < a^{-x} \quad \implies \quad x > -x \quad \implies \quad 2x > 0 \quad \implies \quad x > 0$$

e dove, nel passaggio dagli esponenziali agli esponenti, si è considerata la monotonia decrescente della funzione esponenziale di base  $a \in ]0, 1[$ . Ancora quindi per  $x > 0$  abbiamo una derivata prima positiva e quindi una funzione crescente strettamente. Per la simmetria pari di  $g$ , come detto, la funzione  $g$  dovrà essere in  $x < 0$  strettamente decrescente.

2. Posto  $a = e$  la funzione di cui studiare il grafico è ora

$$f(x) = e^x + e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tale funzione è, per quanto dimostrato nel punto precedente, simmetrica pari, crescente per  $x > 0$ , decrescente per  $x < 0$  ed essendo somma di esponenziali è, a sua volta, positiva nel dominio  $\mathbb{R}$ .

Il calcolo dei limiti agli estremi del dominio fornisce

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty \quad (2)$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad (3)$$

e quindi per la simmetria pari è anche  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ . Per il risultato (2) la funzione  $f$  può presentare un asintoto: conviene pertanto risolvere l'ulteriore limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$$

che, manifestamente, porta ad un caso di indeterminazione del tipo  $\infty/\infty$ . Studiamo allora il limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore della funzione ad argomento e cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty,$$

in quanto valgono, ancora, i limiti (3). Esistendo il limite del rapporto delle derivate sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di De L'Hôpital e quindi possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x} = +\infty$$

dimostrando pure l'assenza di asintoti obliqui.

Il segno della derivata prima  $f'(x) = e^x - e^{-x}$  risulta

$$f'(x) \geq 0 \quad e^x - e^{-x} \geq 0 \quad \implies \quad e^x \geq e^{-x}$$

che per la monotonia si riduce a  $x \geq -x$  da cui  $x \geq 0$ . La rappresentazione grafica di tale segno (fig. 1) evidenzia la crescita/decrecenza di  $f$  che, come aspettato, possiede un minimo in corrispondenza di  $x = 0$  il cui valore è  $f(0) = 2$ .

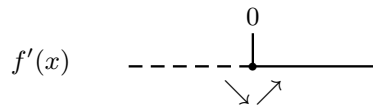
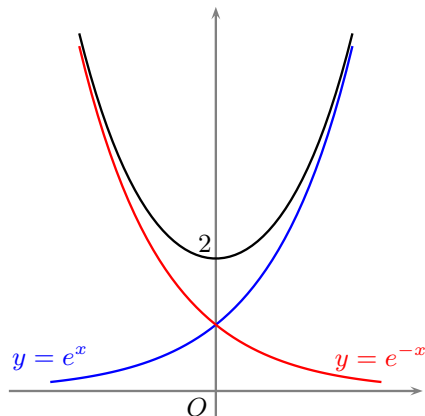


Fig. 1.

Il calcolo della derivata seconda fornisce

$$f''(x) = e^x - (e^{-x}) \cdot (-1) = e^x + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



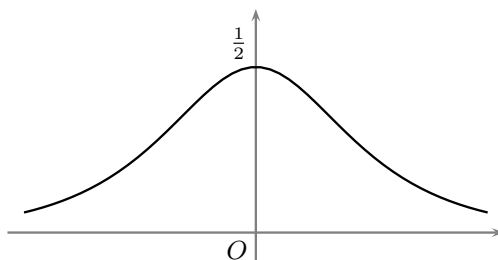
**Fig. 2.** Grafico di  $f(x) = e^x + e^{-x}$ .

cosicché  $f(x)$  volge la concavità nella direzione positiva dell'asse  $y$ . Il suo grafico è riportato in fig. 2 assieme a quelli di  $e^x$  e  $e^{-x}$  di cui è somma.

Lo studio di  $1/f(x)$  cioè di

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

si può affrontare inizialmente anche in termini informali e sintetici sfruttando la conoscenza acquisita su  $f(x)$  e il fatto che  $h(x)$  si può interpretare come una funzione composta non appena si ponga  $t = f(x)$ : in tal caso diviene  $h(t) = 1/t$ . Poiché l'andamento della funzione reciproca  $h(t) = 1/t$  è pure conosciuto in quanto, all'aumentare di  $t > 0$ , tale funzione decresce (il suo grafico è un ramo di iperbole equilatera), possiamo di conseguenza osservare che, negli intervalli in cui la funzione originaria  $t = f(x)$  appare crescente, la funzione  $h(x)$  dovrà invece essere decrescente e viceversa. In corrispondenza del punto di minimo  $x = 0$  per  $f(x)$ , la  $h(x)$  presenterà pertanto un massimo il cui valore è, evidentemente,  $h(0) = \frac{1}{2}$ . Inoltre sarà per  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $h(x) \rightarrow 0^+$  e il grafico di  $h(x)$  potrà essere approssimativamente rappresentato dalla fig. 3.



**Fig. 3.** Grafico approssimativo di  $h(x) = 1/(e^x + e^{-x})$ .

Lo studio formale del grafico di  $h(x)$  inizia invece osservando la sua simmetria pari in quanto, come già visto,  $f(-x) = f(x)$  e quindi

$$h(-x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)} = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre  $h(x) > 0$  nel suo dominio  $\mathbb{R}$  così come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Il calcolo della  $h'(x)$  porta all'espressione

$$h'(x) = \frac{-(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

e la condizione di positività  $h(x) \geq 0$  implica  $e^{-x} - e^x \geq 0$  cioè  $e^{-x} \geq e^x$  da cui  $-x \geq x$  risolta per i valori di  $x \leq 0$ . Pertanto  $h(x)$  sarà crescente per  $x < 0$  e decrescente per  $x > 0$  ammettendo un punto di massimo assoluto in  $x = 0$  (fig. 4).

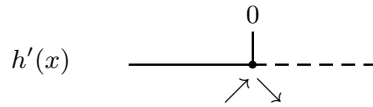


Fig. 4.

La derivata seconda è

$$h''(x) = \frac{(-e^{-x} - e^x)(e^x + e^{-x})^2 - (e^{-x} - e^x) \cdot 2 \cdot (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^4}$$

espressione che si semplifica in

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{1}{(e^x + e^{-x})^3} \cdot [-e^{2x} - e^{-2x} - 2 + 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 4] \\ &= \frac{1}{(e^x + e^{-x})^3} \cdot (e^{2x} + e^{-2x} - 6) \end{aligned}$$

per cui la condizione  $h''(x) \geq 0$  comporta lo studio del fattore

$$e^{2x} + e^{-2x} - 6 = e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} - 6 \geq 0.$$

Posto  $t = e^{2x}$  e moltiplicati entrambi i membri per  $t > 0$ , l'ultima espressione si riduce alla disequazione di II grado

$$t^2 - 6t + 1 \geq 0 \quad t = 3 \pm \sqrt{9 - 1} = 3 \pm \sqrt{8}$$

che è risolta dai valori degli intervalli  $t \leq 3 - \sqrt{8} \vee t \geq 3 + \sqrt{8}$ . Queste ultime disequazioni si riportano alla variabile  $x$  come

$$e^{2x} \leq 3 - \sqrt{8} \quad \vee \quad e^{2x} \geq 3 + \sqrt{8}$$

da cui, passando ai logaritmi,

$$2x \leq \ln(3 - \sqrt{8}) \quad \vee \quad 2x \geq \ln(3 + \sqrt{8})$$

ossia

$$x \leq \frac{1}{2} \ln(3 - \sqrt{8}) \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{8}).$$

Data la simmetria della funzione ci si aspetta che tali punti (di flesso) siano simmetrici rispetto allo zero e difatti la loro somma è nulla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln(3 - \sqrt{8}) + \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{8}) &= \frac{1}{2} [\ln(3 - \sqrt{8}) + \ln(3 + \sqrt{8})] \\ &= \frac{1}{2} [\ln(3 - \sqrt{8})(3 + \sqrt{8})] \\ &= \frac{1}{2} \ln(9 - 8) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

La funzione  $h(x)$  possiede le concavità disposte come sintetizzato dalla figura 5 e dove si è posto  $\alpha = \frac{1}{2} \ln(3 - \sqrt{8})$  e  $\beta = \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{8})$ .

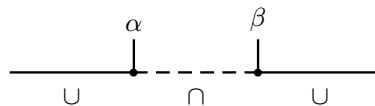


Fig. 5.

In definitiva il grafico di  $h(x)$  conferma quanto dedotto sinteticamente all'inizio e appare quello di fig. 6.

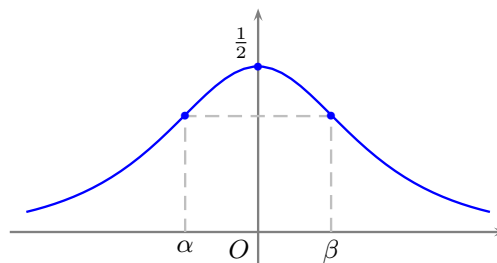


Fig. 6. Grafico di  $h(x) = 1/(e^x + e^{-x})$  (sistema non isometrico).

3. Innanzitutto si chiede di calcolare l'integrale definito

$$I(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx. \quad (4)$$

Riscritta quindi la funzione integranda come

$$\int_0^t \frac{1}{e^x + (1/e^x)} dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx,$$

poniamo  $w = e^x$  il cui differenziale è  $dw = e^x dx$ . Sostituendo questi elementi nell'integrale indefinito si giunge all'integrale

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{dw}{1 + w^2}$$

che risulta noto in quanto

$$\int \frac{dw}{1 + w^2} = \operatorname{arctg}(w) + c = \operatorname{arctg}(e^x) + c.$$

Pertanto l'integrale definito originario  $I(t)$  diviene

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \frac{1}{f(x)} dx = [\operatorname{arctg}(e^x)]_0^t \\ &= \operatorname{arctg}(e^t) - \operatorname{arctg} e^0 \\ &= \operatorname{arctg}(e^t) - \operatorname{arctg} 1 \\ &= \operatorname{arctg}(e^t) - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Il suo limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad (5)$$

che, per la definizione di integrale improprio su intervalli illimitati, si può pure scrivere formalmente come

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, \quad (6)$$

diventa quindi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \operatorname{arctg}(e^t) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Utilizzando ancora la sostituzione  $w = e^t$  e ricordato che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$ , ci si riduce a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{w \rightarrow +\infty} \left[ \operatorname{arctg}(w) - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

in quanto  $\lim_{w \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} w = \frac{\pi}{2}$ . Tale risultato è in accordo con quanto stabilito nel punto 4 successivo.

Poiché l'integrale  $I(t)$  fornisce geometricamente l'area della regione (finita)  $\mathcal{R}$  compresa tra la funzione  $h(x)$ , il semiasse positivo delle  $x$  e le rette  $x = 0$  e  $x = t$  (in giallo in fig. 7), l'interpretazione geometrica del limite consiste nel rappresentare l'area della regione illimitata compresa nel primo quadrante tra la curva  $h(x)$  e gli assi  $x$  e  $y$  (regione in colore in fig. 7). Tale regione illimitata si può considerare come il limite, all'aumentare dell'estremo superiore  $t$ , dei trapezoidi  $\mathcal{R}$  definiti sugli intervalli  $[0, t]$ . Dal risultato del calcolo, l'area di tale regione illimitata è, nel nostro caso, finita.

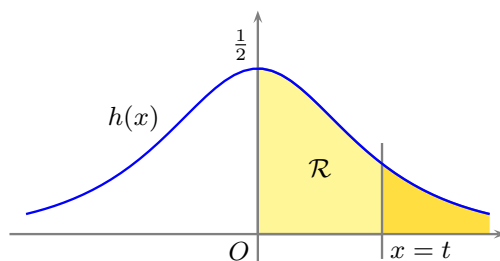


Fig. 7. Trapezoidi collegati al grafico di  $h(x)$ .

4. Per fornire un'approssimazione di  $\pi$  dovremo stimare numericamente il valore dell'integrale (5) (o (6)) fissando un valore di  $t$  sufficientemente grande in modo che l'area della regione che si trascura (in arancione in fig. 7) sia relativamente piccola. A tal fine notiamo che la funzione  $h(x) = 1/f(x)$  per  $x = 5$  assume il valore

$$h(5) = \frac{1}{f(5)} = \frac{1}{e^5 + e^{-5}} \approx 0,0067$$

che si può considerare sufficientemente prossimo allo zero. L'integrale definito avente estremo superiore  $t = 5$  potrà quindi fornire una sufficiente approssimazione a  $\frac{\pi}{4}$  ossia porremo

$$\frac{\pi}{4} \approx \int_0^5 h(x) dx. \quad (7)$$

Dobbiamo ora stimare il II membro della precedente applicando uno dei metodi di integrazione numerica, per esempio il metodo dei rettangoli o quello dei trapezi. Procederemo con quest'ultimo per cui si tratta di applicare la formula discussa nel quesito 10 dell'Esame 2006 PNI

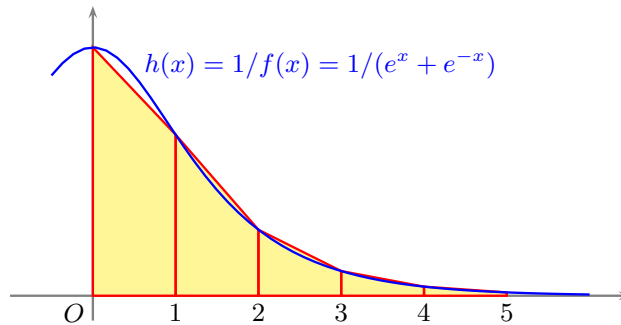
$$\mathcal{A} = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \{f[h(i+1) + a] + f(hi + a)\}. \quad (8)$$

dove

- $\mathcal{A}$  rappresenta l'area del trapezoide di cui si vuole fornire una stima,
- $h$  l'ampiezza di ciascun intervallino in cui viene suddiviso l'intervallo di integrazione di estremo inferiore  $a$ ,
- $n$  il numero di intervallini in cui viene suddiviso l'intervallo di integrazione e
- $f(x)$  la funzione positiva che delimita il trapezoide.

Scegliamo quindi di dividere l'intervallo  $[0, 5]$  (per cui  $a = 0$ ) in  $n = 5$  intervallini, ciascuno di ampiezza  $h = 1$  e identifichiamo la funzione con quella nota  $h(x) = 1/f(x)$  (fig. 8). Ne segue che il II membro di (7) verrà calcolato tramite

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{5-1} \left\{ \frac{1}{f[0 + 1(i + 1)]} + \frac{1}{f(1 \cdot i)} \right\}$$



**Fig. 8.** Stima dell'area di un trapezoide (sistema non isometrico).

In modo più esteso l'espressione precedente diventa

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(0)} \right] + \left[ \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} \right] + \left[ \frac{1}{f(3)} + \frac{1}{f(2)} \right] + \left[ \frac{1}{f(4)} + \frac{1}{f(3)} \right] + \left[ \frac{1}{f(5)} + \frac{1}{f(4)} \right] \right\}$$

cioè

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{f(0)} + \frac{2}{f(1)} + \frac{2}{f(2)} + \frac{2}{f(3)} + \frac{2}{f(4)} + \frac{1}{f(5)} \right]$$

e numericamente

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\approx 0,5 \cdot (0,5 + 0,6481 + 0,2658 + 0,0993 + 0,0366 + 0,0067) \\ &= 0,5 \cdot 1,5565 = 0,7783 \end{aligned}$$

da cui discende la stima  $\pi \approx 4 \cdot 0,7783 = 3,1130$ .

Alcune righe di programmazione (non richieste dal quesito) nella sintassi del software *Mathematica* permettono di definire la funzione `area[f_,a_,b_,n_]` che restituisce la stima dell'area del trapezoide con il metodo dei trapezi non appena si siano dati la funzione `f`, gli estremi inferiore `a`, e superiore `b`, e il numero `n` degli intervallini. Trascritta quindi la relazione (8) come

$$\text{area}[f_,a_,b_,n_] := (b-a)/(2 n) \text{Sum}[f[(b-a)/n (i+1) + a] + f[(b-a)/n i + a], \{i, 0, n-1\}]$$

dove  $(b-a)/n$  dà l'ampiezza comune degli intervallini, e definita la funzione

$$h[x_] := 1/(\text{Exp}[x] + \text{Exp}[-x]),$$

se riutilizziamo i valori precedenti ( $a = 0$ ,  $b = n = 5$ ) *Mathematica* restituisce

$$4 \text{ area}[h,0,5,5] \rightarrow 3.11308$$

che conferma quanto ottenuto sopra con una calcolatrice tascabile. L'approssimazione ovviamente migliora se scegliamo un intervallo più ampio ( $a = 0$ ,  $b = 10$ ) suddiviso più finemente ( $n = 15$ ): si ottiene in tal caso

$$4 \text{ area}[h,0,10,15] \rightarrow 3.14141$$

valore che differisce da  $\pi$  per meno di 2 decimillesimi.

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

Il problema è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del problema n. 1.

### Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

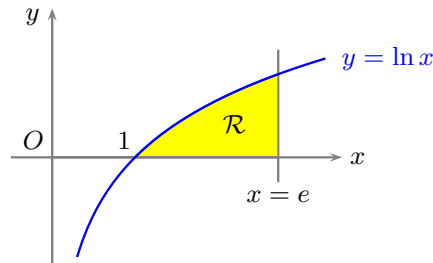
Il quesito riprende il quarto punto del problema n. 2 dell'esame di Ordinamento cui si rimanda.

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

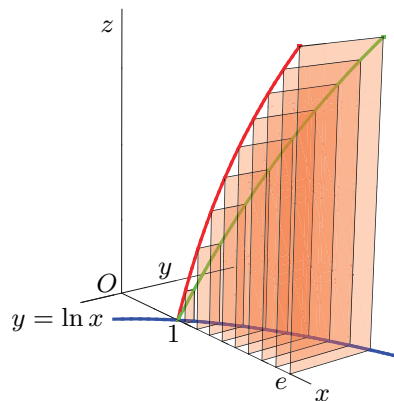
Il quesito ricalca quanto richiesto nel n. 1 dell'esame di Ordinamento ma procediamo comunque indipendentemente. La funzione  $y = \ln x$  è ben conosciuta per cui la regione  $\mathcal{R}$  avente ascisse  $x \in [1, e]$  e base del solido  $S$ , è rappresentata dal grafico di fig. 1. Se si aggiunge pure una terza dimensione perpendicolare agli assi  $x$  e  $y$  possiamo rappresentare il solido  $S$  come in fig. 2 dove si riportano alcune sue sezioni rettangolari.

Supposta nota e continua l'area di una sezione  $\mathcal{A}(x)$  ottenuta dall'intersezione del solido  $S$  con un piano perpendicolare all'asse delle ascisse compreso tra gli estremi 1 ed  $e$ , il volume  $\mathcal{V}$  del solido è dato dall'integrale

$$\mathcal{V} = \int_1^e \mathcal{A}(x) \cdot dx. \quad (1)$$



**Fig. 1.** Grafico di  $\ln x$  e regione  $R$ .



**Fig. 2.** Alcune sezioni rettangolari del solido  $S$ .

Poiché le sezioni di  $S$  sono dei rettangoli di base  $y = \ln x$  con altezza tripla della base  $h = 3y = 3 \ln x$ , la funzione che fornisce la loro area è  $\mathcal{A}(x) = y \cdot h = (\ln x)(3 \ln x) = 3 \ln^2 x$  cosicché l'integrale (1) diviene

$$\mathcal{V} = \int_1^e 3 \ln^2 x \, dx = 3 \int_1^e \ln^2 x \, dx. \quad (2)$$

Dobbiamo pertanto cercare una primitiva dell'integrale indefinito

$$\int \ln^2 x \, dx$$

che risolviamo applicando due volte il metodo per parti. Considerato quindi  $dx$  il fattore differenziale in entrambe le applicazioni, nella prima si ha

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x \, dx &= x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx \end{aligned}$$

mentre nella seconda si ottiene

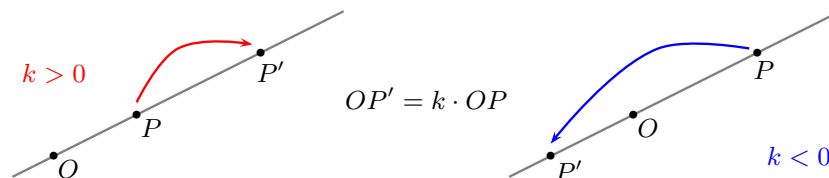
$$\begin{aligned}\int \ln^2 x \, dx &= x \ln^2 x - 2 \left[ x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right] \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int dx \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c.\end{aligned}$$

Ripresa la (2), la differenza dei valori di una funzione primitiva negli estremi fornisce il volume

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= 3 [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_1^e \\ &= 3(e \ln^2 e - 2e \ln e + 2e) - 3(1 \ln^2 1 - 2 \ln 1 + 2) \\ &= 3(e - 2e + 2e) - 6 \\ &= 3e - 6 \approx 2,15485.\end{aligned}$$

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Una omotetia di centro  $O$  fissato è una trasformazione  $t_k$  del piano che associa al punto  $P$  il punto  $P'$  appartenente alla retta  $OP$  e tale che  $OP' = k \cdot OP$  ossia tale che la distanza (con segno) tra  $P'$  e il punto fisso  $O$  sia un multiplo (positivo o negativo) della distanza di  $P$  da  $O$  (fig. 1). Il numero reale  $k$  è detto il *rapporto di omotetia*.



**Fig. 1.** Omotetie di centro  $O$ .

Un insieme dotato di un'operazione binaria *interna* è un gruppo se

- vale la proprietà associativa,
- esiste l'elemento neutro rispetto a tale operazione,
- esiste l'elemento simmetrico (o inverso) rispetto all'operazione.

Se quindi  $Om(O)$  rappresenta l'insieme delle omotetie di centro  $O$ ,  $t_k$  un'omotetia di rapporto  $k$  e l'operazione (simbolo  $\circ$ ) definita su  $Om(O)$  è quella di composizione di trasformazioni, dimostriamo innanzitutto che tale composizione è intera ad  $Om(O)$ : siano quindi

$$\begin{aligned}t_{k_1} : P &\rightarrow P' \quad \text{tale che} \quad OP' = k_1 \cdot OP \\ t_{k_2} : P' &\rightarrow P'' \quad \text{tale che} \quad OP'' = k_2 \cdot OP' .\end{aligned}$$

La trasformazione composta  $t_{k_2} \circ t_{k_1}$  consiste nell'applicare una dopo l'altra le due trasformazioni (a partire da  $t_{k_1}$ ) cosicché formalmente

$$t_{k_2} \circ t_{k_1} : P \xrightarrow{t_{k_1}} P' \xrightarrow{t_{k_2}} P''$$

e in termini più espliciti, poiché  $OP'' = k_2 \cdot OP'$  e  $OP' = k_1 \cdot OP$ , risulta

$$OP'' = k_2 \cdot OP' = k_2(k_1 \cdot OP) = (k_1 k_2)OP = k \cdot OP. \quad (1)$$

con  $O, P, P'$  e  $P''$  punti allineati. La trasformazione composta  $t_k = t_{k_2} \circ t_{k_1}$  associa quindi al punto  $P$  il punto  $P''$  tale che  $OP'' = k \cdot OP$  e ciò dimostra come questa trasformazione sia un'omotetia rientrando nella definizione ricordata sopra. Dalla (1), discende che il rapporto dell'omotetia composta  $k$  è pari al prodotto dei rapporti di ciascuna componente per cui si potrà porre

$$t_{k_1 \cdot k_2} = t_{k_2} \circ t_{k_1}.$$

Aggiungiamo inoltre che è immediato notare la commutatività della composizione per cui è anche  $t_{k_2} \circ t_{k_1} = t_{k_1} \circ t_{k_2}$ .

a) Tenendo conto di ciò la proprietà associativa

$$t_{k_1} \circ (t_{k_2} \circ t_{k_3}) = (t_{k_1} \circ t_{k_2}) \circ t_{k_3}. \quad (2)$$

si dimostra considerando che il primo membro rappresenta l'omotetia composta da

$$t_{k_2} \circ t_{k_3} = t_{k_2 \cdot k_3} \quad \text{con} \quad t_{k_1}$$

per cui

$$t_{k_1} \circ (t_{k_2} \circ t_{k_3}) = t_{(k_3 \cdot k_2) \cdot k_1} = t_{k_1 k_2 k_3} \quad (3)$$

e dove, nell'ultima uguaglianza, si sono utilizzate le proprietà associative e commutativa della moltiplicazione tra numeri reali. Il secondo membro di (2) invece è la composizione di

$$t_{k_3} \quad \text{con} \quad t_{k_1} \circ t_{k_2} = t_{k_2 \cdot k_1},$$

per cui l'omotetia risultante è

$$(t_{k_1} \circ t_{k_2}) \circ t_{k_3} = t_{k_3 \cdot (k_2 \cdot k_1)}$$

che si riduce a  $t_{k_1 k_2 k_3}$  e quindi alla (3) non appena si sfruttino le proprietà della ordinaria moltiplicazione tra numeri.

b) Esistenza dell'elemento neutro. Se  $k = 1$ , l'omotetia

$$t_1 : P \longrightarrow P' \quad \implies \quad OP' = 1 \cdot OP = OP$$

si riduce alla trasformazione identica. Difatti considerando la composizione di  $t_1$  con una generica omotetia  $t_k$  risulta

$$t_1 \circ t_k = t_{k \cdot 1} = t_k \quad \text{così come} \quad t_k \circ t_1 = t_{1 \cdot k} = t_k :$$

l'omotetia di rapporto unitario rappresenta quindi l'elemento neutro in  $Om(O)$ .

c) Esistenza dell'elemento simmetrico. Supposto  $k \neq 0$  consideriamo l'omotetia  $t_{1/k}$  di rapporto  $1/k$  che associa al punto  $P$  il punto  $P'$  in modo che

$$t_{1/k} : P \longrightarrow P' \quad \Longrightarrow \quad OP' = \frac{1}{k} \cdot OP.$$

Ne segue che la composizione di questa con la trasformazione  $t_k$  risulta

$$t_{1/k} \circ t_k = t_{k \cdot (1/k)} = t_1$$

e quindi fornisce l'elemento neutro di  $Om(O)$ . Poiché vale pure la

$$t_k \circ t_{1/k} = t_{(1/k) \cdot k} = t_1$$

possiamo in definitiva concludere che l'insieme  $Om(O)$  è un gruppo (abeliano) rispetto all'operazione di composizione.

#### Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

rappresenta la distribuzione (detta *gaussiana*) di una variabile casuale continua  $x$  che può assumere qualsiasi valore reale. Pertanto  $f(x)$  è una densità di probabilità.

Tale densità di probabilità riveste un ruolo fondamentale nell'ambito della teoria degli errori casuali, errori che si riscontrano nella misura ripetuta di una grandezza fisica. Difatti, in tale teoria, la misura di una grandezza fisica può essere considerata come una variabile casuale continua in quanto misure ripetute ottenute nelle medesime (per quanto possibile) condizioni sperimentali, forniscono in genere valori diversi.

In base all'analisi introdotta per la prima volta da Gauss, gli errori che si commettono nell'eseguire più misure di una stessa grandezza sono determinati da diverse cause che non sono individualmente controllabili e che quindi non possono essere eliminate. In tal modo si incorre nei cosiddetti *errori casuali* o *accidentali*. Nelle ipotesi che

- a) questi errori possano assumere qualsiasi valore,

- b) sia più probabile commettere errori piccoli in valore assoluto,  
 c) il valore più probabile sia quello nullo (e che in tal caso, grandezza misurata e valore vero coincidano),

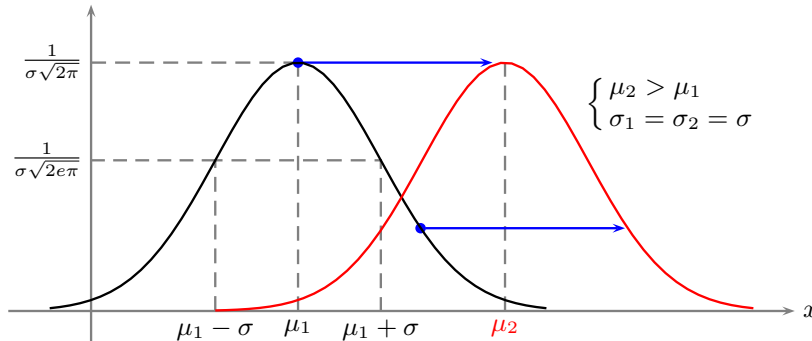
si può dedurre la distribuzione (1). Questa dipende dal parametro  $\mu$ , il valor medio, e da  $\sigma^2$  che ne è la varianza e possiede le seguenti caratteristiche generali:

- assume il valore massimo in corrispondenza del valor medio  $x = \mu$  ed è simmetrica rispetto alla retta  $x = \mu$ .
- $f(x)$  possiede due punti di flesso in corrispondenza dei valori  $x_{1,2} = \mu \pm \sigma$ , simmetrici rispetto al valor medio,
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  ossia la densità di probabilità si annulla asintoticamente per valori di  $x$  molto grandi in valore assoluto.

Il parametro  $\mu$ , del quale si può fornire una stima numerica calcolando la media aritmetica delle misure, oltre a definire il punto di massimo cui corrisponde il valore

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

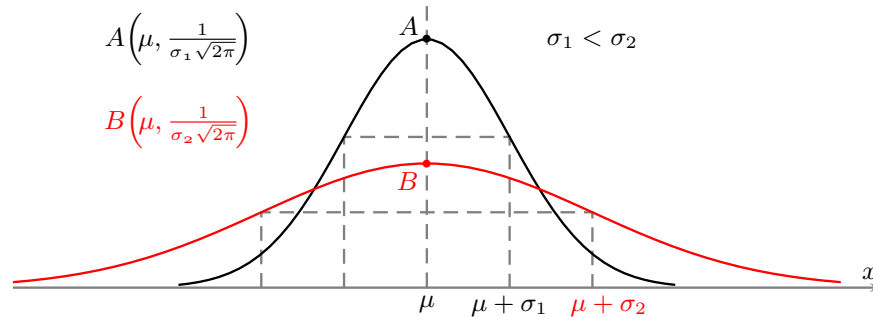
influisce sul grafico di  $f(x)$  trasladandolo parallelamente all'asse  $x$  verso valori di  $x$  maggiori se  $\mu$  aumenta, mentre nel caso  $\mu$  diminuisca, il grafico subisce una traslazione verso sinistra (fig. 1).



**Fig. 1.** Gaussian relative a valori di  $\mu$  diversi.

Il parametro varianza  $\sigma^2$  della distribuzione o la sua radice quadrata  $\sigma$  detto *scarto quadratico medio* o *deviazione standard*, caratterizza il grado di variabilità delle misure attorno alla media  $\mu$ . Difatti al diminuire di  $\sigma$ , il valore del massimo  $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$  aumenta in modo inverso mentre i punti di flesso si restringono attorno a  $\mu$  (fig. 2). Ciò accade in quanto vale la condizione di normalizzazione di una distribuzione di probabilità

$$P(-\infty < x < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



**Fig. 2.** Gaussian relative a diversi valori di  $\sigma$ .

ossia la probabilità  $P$  di ottenere un qualsiasi valore di  $x$  è, in ogni caso, pari ad 1. In termini geometrici questo fatto impone che l'area della regione illimitata al di sotto della gaussiana abbia valore unitario.

Il seguente integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx = P(a \leq x \leq b)$$

esprime invece la probabilità che si ottenga un valore della variabile  $x$  compreso tra  $a$  e  $b$  e, pur non potendosi eseguire analiticamente, si può sulla base di valori tabulati standard ottenerne una approssimazione numerica. In particolare, si trova che

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} f(x) dx \approx 0,68$$

così come

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95, \quad P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997,$$

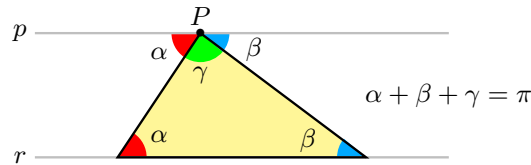
e tali valori rappresentano le probabilità dei cosiddetti *intervalli tipici* di scostamento dal valor medio  $\mu$ .\*

### Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

La dimostrazione nell'ambito della geometria euclidea del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo si ottiene tracciando una parallela da un suo vertice al lato opposto e quindi osservando la congruenza di angoli alterni interni di rette parallele. La dimostrazione utilizza il quinto postulato ossia l'asserzione

---

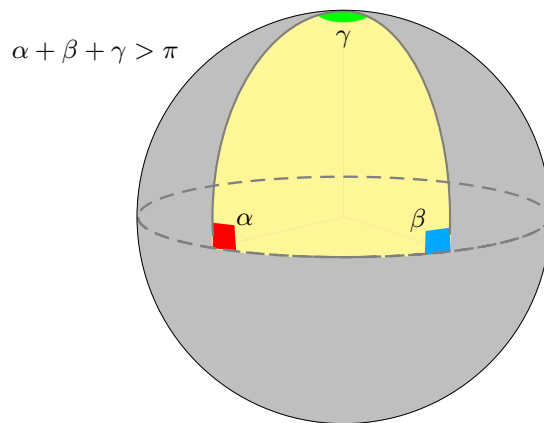
\* Per un'ulteriore discussione sulla gaussiana si veda il problema 1 dell'esame 2004 PNI.



**Fig. 1.** Angoli in un triangolo e loro somma nella geometria euclidea.

che da un punto  $P$  non appartenente ad una retta  $r$  ( $P \notin r$ ) esiste una ed una sola parallela  $p$  ad  $r$  (fig. 1).

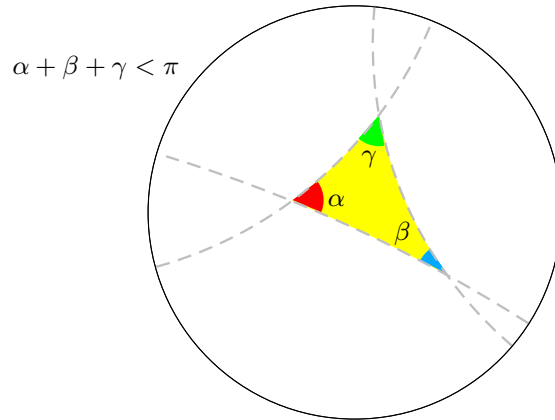
Sostituendo tale postulato con altri si ottengono altri tipi di geometrie. In particolare se si postula che da un punto  $P$  non appartenente alla retta  $r$ , non esistano parallele ad  $r$ , si ottiene la geometria ellittica il cui modello fisico è la geometria su una superficie sferica. Difatti in tale modello una retta viene rappresentata da una circonferenza massima ossia dalla circonferenza che si ottiene intersecando la sfera con un piano passante per il suo centro. Ne segue che per un punto  $P$  non appartenente ad una circonferenza massima  $r$ , non è possibile trovare altre circonferenze massime che non incontrino  $r$  cioè che siano ad essa parallele. Inoltre in questa geometria la somma degli angoli interni di un triangolo può essere maggiore dell'angolo piatto. In fig. 2 ciò appare evidente in quanto il triangolo in giallo possiede gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  retti cosicché la misura dell'angolo  $\gamma$  fornisce di quanto la somma degli angoli interni del medesimo triangolo eccede  $\pi$ .



**Fig. 2.** Geometria ellittica su una superficie sferica.

Nella geometria iperbolica dato un punto  $P$  ed una retta  $r$  con  $P \notin r$ , esistono almeno due rette parallele a  $r$  passanti per  $P$  (e quindi, si può dimostrare, ne esistono infinite). La fig. 3 rappresenta un triangolo nel piano di Poincaré come intersezione di tre rette. Difatti in questo “piano”, tutto confinato entro l'orizzonte della circonferenza limite, le rette sono rappresentate dagli archi di circonferenze

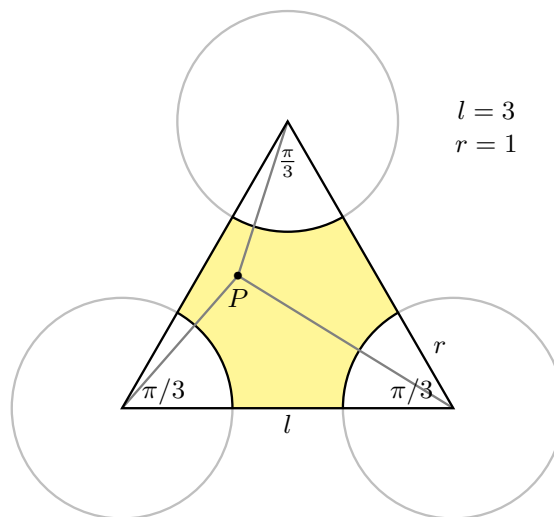
che intersecano ortogonalmente la circonferenza limite. In tale contesto la somma degli angoli di un triangolo è minore di  $\pi$ .



**Fig. 3.** Un triangolo nella geometria iperbolica del piano di Poincaré.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Tracciate le circonferenze di raggio unitario e con centri sui vertici del triangolo equilatero, l'insieme dei punti  $P$  del triangolo  $\mathcal{T}$  di lato  $l = 3$  aventi una distanza maggiore di 1 dai vertici è evidenziato in colore in fig. 1 assieme alle tre circonferenze: sia  $\mathcal{R}$  tale regione.



**Fig. 1.** Punti di  $\mathcal{T}$  con distanza maggiore di 1 dai vertici.

Per giungere alla probabilità  $p$  richiesta, si utilizza la sua definizione classica ossia la si intende come rapporto tra i casi favorevoli ad un dato evento sui casi possibili. Poiché i punti  $P$  sono presi a caso nel triangolo, il numero  $n$  di casi favorevoli è proporzionale all'area della regione  $\mathcal{R}$  cioè  $n = k \cdot \mathcal{A}(\mathcal{R})$  mentre quelli possibili  $N$  sono proporzionali all'area del triangolo  $\mathcal{T}$ ,  $N = k \cdot \mathcal{A}(\mathcal{T})$ . Segue allora che

$$p = \frac{n}{N} = \frac{k \cdot \mathcal{A}(\mathcal{R})}{k \cdot \mathcal{A}(\mathcal{T})} = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{R})}{\mathcal{A}(\mathcal{T})}, \quad (1)$$

per cui si conoscerà  $p$  non appena noto il rapporto tra le aree di  $\mathcal{R}$  e di  $\mathcal{T}$ . L'area di  $\mathcal{R}$  si ottiene sottraendo all'area del triangolo equilatero di lato  $l = 3$  ed altezza  $h = l \sin \frac{\pi}{3}$ ,

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}\sqrt{3},$$

quella dei tre settori circolari, ciascuno con angolo al centro pari a  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Ne segue che

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}) - 3 \cdot \mathcal{A}(\text{sett})$$

con

$$\mathcal{A}(\text{sett}) = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Si ottiene quindi

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}) - 3 \cdot \mathcal{A}(\text{sett}) = \frac{9}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{9}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

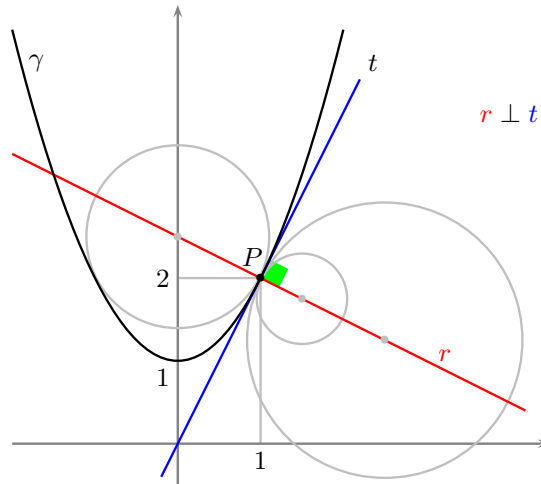
e la probabilità cercata risulta per (1)

$$p = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{R})}{\mathcal{A}(\mathcal{T})} = \frac{\left(\frac{9}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{9}{4}\sqrt{3}} = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{9}{4}\sqrt{3}} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \approx 0,5969.$$

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Sia  $\gamma$  la parabola assegnata di equazione  $y = x^2 + 1$  e  $P$  il suo punto di coordinate  $(1, 2)$ .  $\gamma$  possiede inoltre vertice appartenente all'asse delle  $y$ ,  $V(0, 1)$  e la concavità è rivolta verso l'alto (fig. 1).

Considerando che due curve sono vicendevolmente tangenti in un punto se nello stesso punto condividono la medesima retta tangente, il luogo richiesto dev'essere la retta normale  $r$  nel punto  $P$  di  $\gamma$  (fig. 1). Difatti se  $t$  è la retta tangente in  $P$  a  $\gamma$ , la medesima retta dev'essere pure la tangente comune alle circonferenze tangenti alla parabola. E poiché il raggio avente come estremi il punto  $P$  di



**Fig. 1.** Parabola  $\gamma$  e circonferenze ad essa tangenti in  $P(1, 2)$ .

tangenza e il centro delle circonferenze è perpendicolare alla tangente, i centri di tale fascio di circonferenze apparterranno alla retta  $r$  perpendicolare a  $t$  in  $P$ . Determinato il coefficiente angolare  $m_t$  di  $t$  tramite la derivata prima

$$y' = 2x \implies y'(1) = 2 \implies m_t = 2,$$

e ricordata la condizione di perpendicolarità tra rette  $m_r = -1/m_t$ , l'equazione della normale  $r$  discende immediata dalla formula che dà l'equazione del fascio proprio di centro  $P$  cioè

$$r : y - 2 = m_r(x - 1) \implies y - 2 = -\frac{1}{m_t}(x - 1)$$

da cui

$$r : y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Schematizziamo il problema e supponiamo che  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sia il denaro posseduto rispettivamente dal giocatore 1, 2 e 3. Evidentemente l'ammontare complessivo in denaro rimane costante per cui, a scopo di controllo, si avrà sempre  $x + y + z = \text{costante}$ . Dopo la fine della prima partita il primo giocatore perde una quantità di denaro pari al denaro posseduto complessivamente dal secondo e terzo: questa quantità è pari a  $y + z$ . I giocatori 2 e 3 vincono invece una cifra pari a quella posseduta inizialmente e pertanto raddoppiano il loro denaro. Potremo riassumere la situazione con la tabella 1 seguente:

Tabella 1

giocatore	inizio partita 1	fine partita 1
1	$x$	$x - (y + z) = x - y - z$
2	$y$	$2y$
3	$z$	$2z$

All'inizio della seconda partita la situazione è ovviamente quella finale della precedente (nella colonna -inizio partita 2- della tabella 2 si sono assegnati dei nomi alle rispettive quantità iniziali di denaro) mentre alla fine il giocatore 2 perde una quantità di denaro pari alla somma di quanto posseduto inizialmente dai rimanenti cioè  $a_2 + c_2$  i quali, a loro volta, raddoppiano la propria quota.

Tabella 2

giocatore	inizio partita 2	fine partita 2
1	$a_2 = x - y - z$	$2a_2 = 2(x - y - z)$
2	$b_2 = 2y$	$b_2 - (a_2 + c_2) = 2y - (x - y - z) - 2z$ $= 3y - x - z$
3	$c_2 = 2z$	$2c_2 = 2(2z) = 4z$

Infine, nel terzo gioco (tabella 3), è il terzo giocatore che perde una quantità pari a quanto posseduto complessivamente (e all'inizio della terza partita) dai giocatori 1 e 2 ossia  $a_3 + b_3$  mentre, questi ultimi, raddoppiano il proprio denaro.

Tabella 3

giocatore	inizio partita 3	fine partita 3
1	$a_3 = 2(x - y - z)$	$2a_3 = 4(x - y - z)$
2	$b_3 = 3y - x - z$	$2b_3 = 6y - 2x - 2z$
3	$c_3 = 4z$	$c_3 - (a_3 + b_3) = 4z - 2(x - y - z)$ $- (3y - x - z)$ $= 7z - x - y$

In definitiva l'ammontare finale di ciascuno è dato in termini delle quantità iniziali dalle espressioni

Tabella 4

giocatore	fine partita 3
1	$4(x - y - z)$
2	$6y - 2x - 2z$
3	$7z - x - y$

per cui trovandosi ciascuno con 24 *luigi* si dovrà porre

$$\begin{cases} 4(x - y - z) = 24 \\ 6y - 2x - 2z = 24 \\ 7z - x - y = 24. \end{cases}$$

Semplificate le prime due equazioni dividendole rispettivamente per 4 e per 2 e riordinate le incognite

$$\begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24, \end{cases}$$

risolviamo tale sistema lineare con il metodo di Cramer per cui, individuato il determinante dei coefficienti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 1(21 - 1) + 1(-7 - 1) - 1(1 + 3) = 8$$

si ha

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 12 & 3 & -1 \\ 24 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 12 & -1 \\ -1 & 24 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 24 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Sviluppando i determinanti secondo la prima riga si ottiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{8}[6(21 - 1) + 1(12 \cdot 7 + 24) - 1(-12 - 72)] = \frac{312}{8} = 39 \\ y &= \frac{1}{8}[1(12 \cdot 7 + 24) - 6(-7 - 1) - 1(-24 + 12)] = \frac{168}{8} = 21 \\ z &= \frac{1}{8}[1(3 \cdot 24 + 12) + 1(-24 + 12) + 6(1 + 3)] = \frac{96}{8} = 12. \end{aligned}$$

In conclusione il denaro iniziale era per il primo giocatore pari a  $x = 39$  *luigi*, per il secondo  $y = 21$  *luigi* e per il terzo  $z = 12$  *luigi* ed evidentemente il perdente di questa serie di partite è il primo giocatore mentre il terzo è quello che ha vinto di più.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $f : y = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$ , osserviamo che tale equazione rappresenta una parabola cubica  $f$  che diverge all'infinito come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) = \pm\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) = 2.$$

Inoltre, nel suo dominio  $\mathbb{R}$ , la derivata prima  $y' = 6x^2 - 6x + 6$  risulta sempre positiva in quanto

$$6x^2 - 6x + 6 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x + 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 1 - 4 < 0.$$

La funzione  $f$  è pertanto strettamente crescente in  $\mathbb{R}$  e poiché dal calcolo diretto risulta

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0 \\ y(-1) &= -2 - 3 - 6 + 6 = -5 < 0, \end{aligned}$$

essa assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo  $[-1, 0]$ . Per quanto sopra,  $f$  nel medesimo intervallo è strettamente crescente e per l'esistenza della derivata (o perché è un polinomio) essa è pure continua. Possiamo quindi applicare il teorema degli zeri che assicura l'esistenza di un valore  $\alpha$  in corrispondenza del quale risulta  $y(\alpha) = 0$ . Tale valore inoltre è unico a causa della monotonia di  $f$ .

Dimostrata l'esistenza e l'unicità di  $\alpha$ , possiamo ottenere una sua stima numerica per mezzo del metodo di bisezione. Osserviamo quindi che in corrispondenza del punto medio di  $[-1, 0]$  si ha  $y(-0,5) = 2$  per cui, data la crescenza di  $f$ , si dovrà avere  $-1 < \alpha < -0,5$ . Procedendo calcolando  $f$  nei punti medi degli intervalli individuati nella iterazione precedente e caratterizzati da ampiezze via via minori, si ottiene

$$\begin{array}{ll} y(-0,75) = -1 & -0,75 < \alpha < -0,5 \\ y(-0,625) \approx 0,58 & -0,75 < \alpha < -0,625 \\ y(-0,6875) \approx -0,19 & -0,6875 < \alpha < -0,625. \end{array}$$

Osserviamo che gli estremi dell'ultimo intervallo presentano già due cifre significative, lo 0 e il 6 (evidenziate in rosso): pertanto possiamo fermare l'iterazione e concludere che  $\alpha \approx -0,6$ . Una stima più precisa di  $\alpha$  ottenuta automatizzando tale processo fornisce  $\alpha \approx -0,672496$ .

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

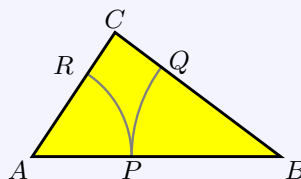
Si veda l'identico **decimo** quesito nell'esame di Ordinamento 2007.

# ESAME 2008

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 dei 10 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

- 1) Il triangolo rettangolo  $ABC$  ha l'ipotenusa  $AB = a$  e l'angolo  $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$ .
- a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in  $B$  e raggio  $x$ , l'arco di circonferenza di estremi  $P$  e  $Q$  rispettivamente su  $AB$  e su  $BC$ . Sia poi  $R$  l'intersezione con il cateto  $CA$  dell'arco di circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AP$ . Si specifichino le limitazioni da imporre ad  $x$  affinché la costruzione sia realizzabile.



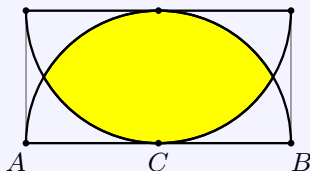
- b) Si esprima in funzione di  $x$  l'area  $S$  del quadrilatero mistilineo  $PQCR$  e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di  $S(x)$ .
- c) Tra i rettangoli con un lato su  $AB$  e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.
- d) Il triangolo  $ABC$  è la base di un solido  $W$ . Si calcoli il volume di  $W$  sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad  $AB$ , sono tutti quadrati.

Soluzione

## • Problema n. 2

- 2) Assegnato nel piano il semicerchio  $\Gamma$  di centro  $C$  e diametro  $AB = 2$ , si affrontino le seguenti questioni:
- a) Si disegni nello stesso semipiano di  $\Gamma$  un secondo semicerchio  $\Gamma_1$  tangente ad  $AB$  in  $C$  e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano inter-

sezione dei due semicerchi  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ .



- b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in  $\Gamma$ .
- c) Sia  $P$  un punto della semicirconferenza di  $\Gamma$ ,  $H$  la sua proiezione ortogonale su  $AB$ . Si ponga  $\widehat{PCB} = x$  e si esprimano in funzione di  $x$  le aree  $S_1$  e  $S_2$  dei triangoli  $APH$  e  $PCH$ .  
Si calcoli il rapporto  $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$ .
- d) Si studi  $f(x)$  e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

Soluzione

### Questionario

1. Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

Soluzione

2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che  $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

Soluzione

3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie  $S$  (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

Soluzione

4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661–1704) e la si applichi

per dimostrare che è:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$ .

Soluzione

5. Si determini un polinomio  $P(x)$  di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{12}.$$

Soluzione

6. Se  $\binom{n}{1}$ ,  $\binom{n}{2}$ ,  $\binom{n}{3}$  con  $n > 3$  sono in progressione aritmetica, qual è il valore di  $n$ ?

Soluzione

7. Si determini, al variare di  $k$ , il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

Soluzione

8. Sia  $f$  la funzione definita da  $f(x) = \pi^x - x^\pi$ . Si precisi il dominio di  $f$  e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto  $x = \pi$ .

Soluzione

9. Sia  $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ ; esiste  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

10. Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%.



Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare nel segnale?

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

a) Posto  $\overline{AB} = a$ ,  $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$  gli elementi principali di  $\triangle ABC$  rettangolo in  $C$  (fig. 1) sono

$$\angle ABC = \frac{\pi}{6}, \quad \overline{CB} = \overline{AB} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{AC} = \overline{AB} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}. \quad (1)$$

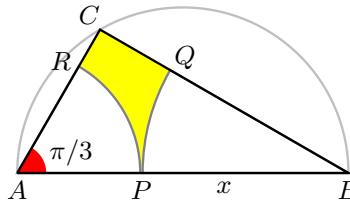


Fig. 1.

Detto  $x = \overline{PB}$ , il valore massimo della lunghezza di tale segmento viene raggiunto quando  $Q \equiv C$  dove

$$\overline{PB}_{max} = x_{max} = \overline{QB}_{max} = \overline{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

mentre il valore minimo si raggiunge quando  $R \equiv C$  cioè

$$\overline{AR}_{max} = \overline{AC} = \frac{a}{2} = \overline{AP} = a - x_{min}$$

da cui  $x_{min} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ . Pertanto l'intervallo di variabilità di  $x$  è  $\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

b) L'area  $\mathcal{A}(PQCR)$  del quadrilatero mistilineo si ottiene sottraendo all'area di  $\triangle ABC$  quella dei due settori circolari di centro  $B$  e, rispettivamente,  $A$ . È quindi

$$\mathcal{A}(PQCR) = \mathcal{A}(\triangle ABC) - \mathcal{A}(\widehat{PBQ}) - \mathcal{A}(\widehat{PAR})$$

e poiché l'area di un settore circolare con angolo  $\alpha$  in radianti è data dalla  $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\alpha r^2$ , risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(PQCR) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CB} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \overline{PB}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \overline{AP}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} x^2 - \frac{\pi}{6} (a-x)^2 \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} x^2 - \frac{\pi}{6} a^2 - \frac{\pi}{6} x^2 + \frac{\pi}{3} ax \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{A}(PQCR) = -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{3}ax + \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\right)a^2. \quad (2)$$

Quest'ultima relazione, nel piano cartesiano avente per ascissa  $x$  e ordinata l'area  $\mathcal{A}$  rappresenta una parabola con concavità rivolta verso il basso: l'ascissa del vertice, se compresa nell'intervallo di variabilità già **stabilito**, fornisce quindi il valore di  $x$  in corrispondenza del massimo dell'area. Risulta

$$x_{max} = \frac{-(\pi/3)a}{2[-(\pi/4)]} = \frac{2}{3}a.$$

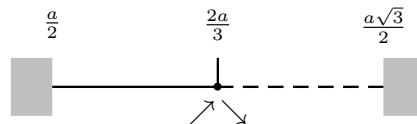
In alternativa, calcolata la derivata prima

$$\mathcal{A}'(PQCR) = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}a,$$

questa è positiva quando

$$-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}a \geq 0 \implies \frac{x}{2} \leq \frac{a}{3} \implies x \leq \frac{2}{3}a$$

per cui appare evidente dalla rappresentazione grafica della crescita/decrecenza della funzione area (fig. 2) l'esistenza di un massimo assoluto in  $x = \frac{2}{3}a$ .



**Fig. 2.**

Poiché  $\frac{a}{2} < \frac{2}{3}a < \frac{a\sqrt{3}}{2}$  in quanto, moltiplicando queste disuguaglianze per  $6/a$  si ha  $3 < 4 < 3\sqrt{3}$ , il valore  $x_{max}$  è accettabile e il valore dell'area massima corrispondente si ottiene sostituendo in (2) tale valore

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{max} &= -\frac{\pi}{4} \left(\frac{4}{9}a^2\right) + \frac{\pi}{3}a \left(\frac{2}{3}a\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\right)a^2 \\ &= -\frac{\pi}{9}a^2 + \frac{2}{9}\pi a^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{6}a^2 \\ &= a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{18}\right). \end{aligned}$$

Per il minimo vanno confrontati i valori di (2) agli estremi dell'intervallo: si ha nell'estremo inferiore

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\frac{a}{2}\right) &= -\frac{\pi}{4}\left(\frac{a^2}{4}\right) + \frac{\pi}{3}a\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{6}a^2 \\ &= \pi a^2\left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}\right)a^2\end{aligned}$$

mentre nell'estremo superiore si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) &= -\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{4}a^2\right) + \frac{\pi}{3}a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{6}a^2 \\ &= \pi a^2\left(-\frac{3}{16} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 + \pi a^2\left(\frac{8\sqrt{3} - 17}{48}\right).\end{aligned}$$

Per confrontare tali valori supponiamo che sia

$$\mathcal{A}\left(\frac{a}{2}\right) > \mathcal{A}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right):$$

segue

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}\right)a^2 > \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 + \pi a^2\left(\frac{8\sqrt{3} - 17}{48}\right)$$

da cui discende

$$-\frac{\pi}{16}a^2 > \pi a^2\left(-\frac{17}{48} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

Moltiplicando per  $48/(\pi a^2)$ , si giunge alla

$$-3 > -17 + 8\sqrt{3} \quad \implies \quad 14 > 8\sqrt{3}$$

cioè, elevando al quadrato,  $196 > 192$ . La correttezza di quest'ultima conferma l'ipotesi fatta per cui il minimo è raggiunto nell'estremo inferiore  $x = \frac{a}{2}$  e l'area corrispondente è

$$\mathcal{A}_{min} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}\right)a^2.$$

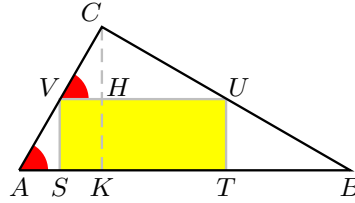


Fig. 3.

c) Posto  $x = \overline{ST} = \overline{VU}$  con  $0 \leq x \leq a$  (fig. 3), determiniamo l'altezza  $\overline{CH}$  di  $\triangle CVU$ . Poiché  $\overline{VC} = \overline{VU} \cos \angle CVU$  e  $\overline{VC} = x \cos \frac{\pi}{3} = \frac{x}{2}$ , allora

$$\overline{CH} = \overline{VC} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4}.$$

Segue che

$$\overline{VS} = \overline{UT} = \overline{CK} - \overline{CH} = \overline{CK} - \frac{x\sqrt{3}}{4},$$

ma

$$\overline{CK} = \overline{AC} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \tag{3}$$

dove si è tenuto conto della (1). Allora

$$\overline{VS} = \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a - x)$$

e l'area del rettangolo è quindi

$$\mathcal{A}(STUV) = \overline{ST} \cdot \overline{VS} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a - x)x = \frac{\sqrt{3}}{4}(ax - x^2).$$

Passando allo studio del segno della derivata prima (oppure calcolando, come fatto in precedenza, l'ascissa del vertice visto che la relazione è quadratica)

$$\mathcal{A}' = \frac{\sqrt{3}}{4}(a - 2x) \geq 0 \implies a - 2x \geq 0 \implies x \leq \frac{a}{2}$$

appare (fig. 4) un massimo assoluto in corrispondenza del valore  $\frac{a}{2}$ .

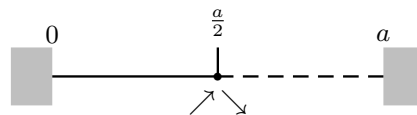


Fig. 4.

Il valore dell'area massima del rettangolo studiato è quindi

$$A_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

d) Il solido  $W$  è composto dall'unione di due piramidi aventi la base quadrata  $CKK'C'$  in comune (in giallo nella fig. 5), altezze  $AK$  e  $BK$ , e vertici rispettivamente,  $A$  e  $B$ .

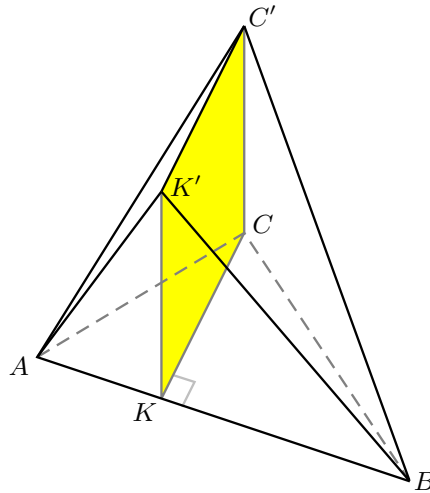


Fig. 5.

Il volume di  $W$  è quindi somma del volume  $\mathcal{V}(A)$  della piramide di vertice  $A$ , base  $CKK'C'$  ed altezza  $AK$ ,

$$\mathcal{V}(A) = \frac{1}{3} \cdot \overline{CK}^2 \cdot \overline{AK},$$

con quello della piramide di vertice  $B$ , base  $CKK'C'$  ed altezza  $BK$

$$\mathcal{V}(B) = \frac{1}{3} \cdot \overline{CK}^2 \cdot \overline{BK}.$$

Poiché per la (3) è  $\overline{CK} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$  e

$$\overline{AK} = \overline{AC} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}a, \quad \overline{BK} = a - \overline{AK} = a - \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a,$$

risulta

$$\mathcal{V}(A) = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{16}a^2 \right) \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^3}{64}, \quad \mathcal{V}(B) = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{16}a^2 \right) \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3a^3}{64}$$

e quindi il volume totale richiesto è

$$\mathcal{V}(W) = \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B) = \frac{a^3}{64} + \frac{3a^3}{64} = \frac{4a^3}{64} = \frac{a^3}{16}.$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

a) Tracciati i due semicerchi  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  aventi lo stesso diametro (pari a 2), rispettivamente di centri  $C$  ed  $F$  (fig. 1), osserviamo come tale costruzione geometrica presenti una simmetria assiale rispetto alla retta passante per i punti  $D$  ed  $E$ , intersezioni delle due semicirconferenze di raggio unitario che delimitano i semicerchi.

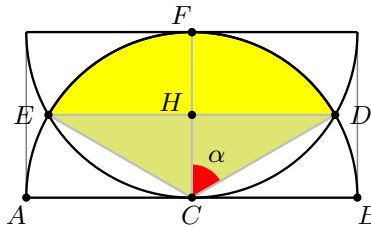


Fig. 1.

Ne segue che il punto  $H$  appartenente al raggio  $CF$  perpendicolare all'asse  $ED$  è il punto medio di  $CF$  per cui  $\overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{CF} = \frac{1}{2}$ . Poiché è pure  $\overline{CD} = 1$  in quanto raggio, il triangolo  $HCD$ , rettangolo in  $H$ , presenta l'angolo in  $C$  di ampiezza  $\angle HCD = \alpha = \frac{\pi}{3}$  dato che  $\cos \alpha = \overline{CH}/\overline{CD} = \frac{1}{2}$ . L'ampiezza dell'angolo al centro  $ECD$  che insiste sull'arco  $DFE$  è di conseguenza pari a  $\angle ECD = 2\alpha = \frac{2}{3}\pi$  e l'area del segmento circolare  $\mathcal{A}(\text{seg. } EDF)$  (in giallo in fig. 1) è data dalla

$$\mathcal{A}(\text{seg. } EDF) = \mathcal{A}(\text{sett. } CDFE) - \mathcal{A}(\triangle ECD)$$

essendo  $\mathcal{A}(\text{sett. } CDFE)$  l'area del settore circolare collegato all'angolo  $\angle ECD$ . Poiché

$$\mathcal{A}(\text{sett. } CDFE) = \frac{1}{2}(2\alpha) \cdot \overline{CD}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3}\pi \right) \cdot 1^2 = \frac{\pi}{3}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle ECD) &= \frac{1}{2} \overline{ED} \cdot \overline{CH} = \overline{HD} \cdot \overline{CH} \\ &= 1 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

allora

$$\mathcal{A}(\text{seg. } EDF) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

e l'area della regione richiesta  $\mathcal{A}(\Gamma \cap \Gamma_1)$ , per la simmetria già notata, è il doppio di tale valore ossia

$$\mathcal{A}(\Gamma \cap \Gamma_1) = 2 \cdot \mathcal{A}(\text{seg. } EDF) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,22837.$$

b) Inserito il semicerchio  $\Gamma$  in un sistema cartesiano di origine in  $C$  e con gli assi disposti parallelamente e perpendicolarmente al diametro  $AB$  (figura 2), si dovrà determinare l'area massima del rettangolo  $PQRH$  inscritto in  $\Gamma$ .

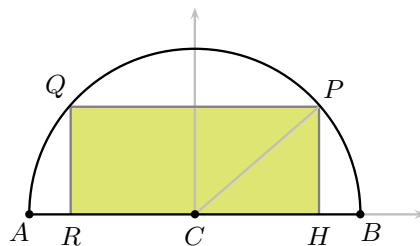


Fig. 2.

Posto quindi  $P(x, y)$  con  $0 \leq x \leq 1$ , l'appartenenza di  $P$  alla circonferenza di raggio unitario centrata in  $C$  e di equazione  $x^2 + y^2 = 1$  comporta che sia  $y = \sqrt{1 - x^2} = \overline{HP}$ . Pertanto dato che  $\overline{RH} = 2 \cdot \overline{CH} = 2x$  l'area in funzione di  $x$  è

$$\begin{cases} \mathcal{A}(PQRH) = \overline{RH} \cdot \overline{HP} = 2x\sqrt{1 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Per la ricerca del massimo dobbiamo studiare il segno della derivata prima

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= 2 \left[ 1 \cdot \sqrt{1 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right] = 2 \left( \frac{1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \\ &= \frac{2(1 - 2x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

e quindi la condizione  $\mathcal{A}' \geq 0$  implica la disequazione  $1 - 2x^2 \geq 0$ . Poiché quest'ultima è risolta dai valori dell'intervallo  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

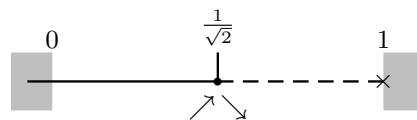


Fig. 3.

il grafico del segno di  $\mathcal{A}'$  (fig. 3) mostra che l'area in  $[0, 1[$  raggiunge il massimo assoluto in corrispondenza del valore  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Pertanto il rettangolo di area massima ha dimensioni

$$\overline{RH} = 2\overline{CH} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}, \quad \overline{HP} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e il valore dell'area è

$$\mathcal{A}_{max} = \overline{RH} \cdot \overline{HP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1.$$

• In alternativa alla variabile lineare si può scegliere una variabile angolare quale  $x = \angle PCH$ , fig. 2 (coerente anche con le richieste del quesito successivo dove si pone pari ad  $x$  lo stesso angolo, fig. 4). In tal caso  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e risulta

$$\overline{HP} = \overline{CP} \cdot \sin x = \sin x, \quad \overline{CH} = \overline{CP} \cdot \cos x = \cos x.$$

Segue che l'area richiesta è

$$\mathcal{A}(PQRH) = \overline{RH} \cdot \overline{HP} = 2\overline{CH} \cdot \overline{HP} = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$$

e, data la semplicità dell'espressione trovata, il massimo si determina evitando il calcolo della derivata in quanto è noto che il seno raggiunge il suo valore massimo quando  $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  cioè in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  se  $x = \frac{\pi}{4}$ . Le lunghezze dei lati del rettangolo e l'area sono

$$\overline{RH} = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \overline{HP} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{A}_{max} = 1.$$

c) Posto  $\angle PCB = x$ , in questo caso con  $x \in [0, \pi]$ , le coordinate di  $P$  nel sistema cartesiano scelto si possono esprimere in funzione dell'angolo: risulta in valore e segno

$$CH = x_P = \overline{CP} \cos(\angle PCB) = \cos x, \quad HP = y_P = \overline{CP} \sin(\angle PCB) = \sin x.$$

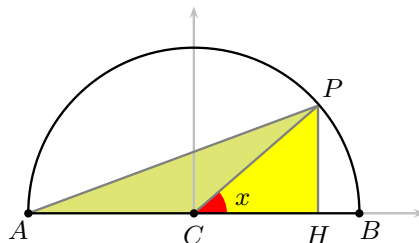


Fig. 4.

Le aree di  $\triangle APH$  e  $\triangle PCH$  (fig. 4) sono evidentemente date dai prodotti

$$\mathcal{S}_1(\triangle APH) = \frac{1}{2} \overline{AH} \cdot \overline{HP}, \quad \mathcal{S}_2(\triangle PCH) = \frac{1}{2} \overline{CH} \cdot \overline{HP}$$

dove  $\overline{AH}$ ,  $\overline{HP}$  e  $\overline{CH}$  rappresentano misure di lunghezze e quindi grandezze positive o nulle. Al variare dell'angolo  $x$  nell'intervallo  $[0, \pi]$  solo  $\sin x \geq 0$  per cui queste lunghezze si potranno esprimere come

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= |x_P - x_A| = \cos x - (-1) = 1 + \cos x, \\ \overline{HP} &= |y_P - y_H| = |\sin x - 0| = \sin x, \\ \overline{CH} &= |x_P - x_C| = |\cos x - 0| = |\cos x|. \end{aligned}$$

Le aree corrispondenti risultano

$$\mathcal{S}_1(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \sin x, \quad \mathcal{S}_2(x) = \frac{1}{2} |\cos x| \sin x$$

e il rapporto richiesto è espresso da

$$f(x) = \frac{\mathcal{S}_1(x)}{\mathcal{S}_2(x)} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \cos x) \sin x}{\frac{1}{2} |\cos x| \sin x} = \frac{1 + \cos x}{|\cos x|} \quad (1)$$

con  $0 < x < \pi$  e  $x \neq \frac{\pi}{2}$  dovendo essere  $\mathcal{S}_2(x) \neq 0$ .

d) Poiché viene esplicitamente chiesto di prescindere dalle limitazioni geometriche sotto le quali si è dedotto il precedente rapporto (1), studieremo nel seguito la funzione  $f$  di equazione

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{|\cos x|}$$

rispettando l'unica condizione di origine algebrica,  $\cos x \neq 0$ . Il dominio di tale funzione è pertanto  $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ .

Poiché  $f$  è periodica con periodo  $T = 2\pi$  in quanto vale l'identità

$$f(x + 2\pi) = \frac{1 + \cos(x + 2\pi)}{|\cos(x + 2\pi)|} = \frac{1 + \cos x}{|\cos x|} = f(x) \quad \forall x \in D$$

e pure simmetrica pari essendo

$$f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{|\cos(-x)|} = \frac{1 + \cos x}{|\cos x|} = f(x) \quad \forall x \in D,$$

ci si potrà limitare all'intervallo  $[0, \pi]$  escludendo il valore  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Il segno di  $f$  risulta

$$f(x) > 0 \quad \forall x \neq \pi + 2k\pi, \quad f(x) = 0 \quad x = \pi + 2k\pi$$

mentre agli estremi di  $[0, \pi]$  assume i valori  $f(0) = 2$ ,  $f(\pi) = 0$ .

Lo studio dei limiti comporta nel punto  $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = +\infty$$

in quanto numeratore e denominatore di  $f$  assumono i valori

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} 1 + \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} |\cos x| = 0^+.$$

La presenza di un valore assoluto nell'espressione di  $f$  consiglia di eseguire la derivata separando la  $f(x)$  nei sottoinsiemi

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ f_1(x) = \frac{1 + \cos x}{\cos x} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ f_2(x) = \frac{1 + \cos x}{(-\cos x)} \end{cases}$$

e le rispettive derivate sono

$$f_1'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \cos x - (-\operatorname{sen} x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$f_2'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad \text{se} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

Il segno di  $f'(x)$  dipende esclusivamente dal numeratore delle ultime due espressioni e risulta

$$f_1'(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

mentre per il secondo ramo

$$f_2'(x) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad -\operatorname{sen} x \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

Unendo a livello grafico tali risultati (fig. 5) concludiamo che la  $f$  è crescente in  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , decrescente in  $] \frac{\pi}{2}, \pi[$  mentre possiede derivata nulla in  $x = 0$  e  $x = \pi$ .

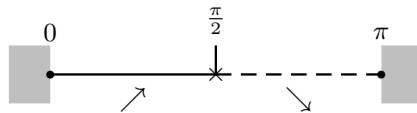


Fig. 5.

Il calcolo della derivata seconda fornisce

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= \frac{\cos x(\cos^2 x) - \sin x(2 \cos x)(-\sin x)}{\cos^4 x} \\ &= \frac{\cos x(\cos^2 x + 2 \sin^2 x)}{\cos^4 x} \end{aligned}$$

e certamente vale

$$f_1''(x) > 0 \quad \text{in} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

Allo stesso modo la derivata seconda del secondo ramo

$$f_2''(x) = -\frac{\cos x(\cos^2 x + 2 \sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

risulta  $f_2''(x) > 0$  quando  $-\cos x > 0$  ossia  $\cos x < 0$  e quest'ultima disequazione appare soddisfatta in  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ . Il grafico della  $f$  volge quindi la concavità della nella direzione positiva dell'asse delle ordinate (fig. 6).

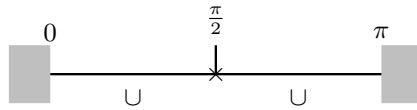


Fig. 6.

Per la simmetria rispetto all'asse delle ordinate possiamo estendere quanto finora studiato anche in  $[-\pi, 0]$  cosicché il grafico di  $y = f(x)$  nel piano cartesiano  $Oxy$  e in  $[-\pi, \pi]$  è quello rappresentato in figura 7.

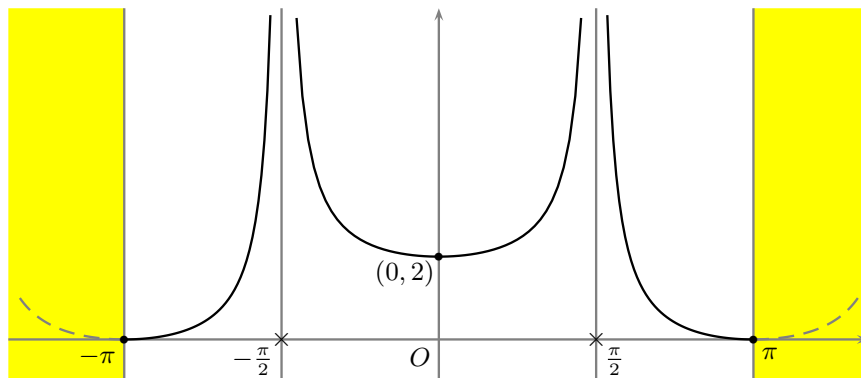


Fig. 7. Grafico della funzione  $y = f(x)$  (sistema non isometrico).

Infine, all'esterno di tale intervallo, il grafico va esteso per la già **notata** periodicità di  $f$ .

- Dato che  $f(x)$  possiede nel suo dominio un **segno** positivo o nullo, vale l'uguaglianza

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{|\cos x|} = \left| \frac{1 + \cos x}{\cos x} \right|$$

per cui lo studio del suo grafico si può ricondurre a quello della sola funzione

$$g(x) = \frac{1 + \cos x}{\cos x}.$$

Là dove questa risulta negativa, nel nostro caso in  $]\frac{\pi}{2}, \pi]$  il grafico di  $f(x)$  si deduce da quello di  $g(x)$  considerandone il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

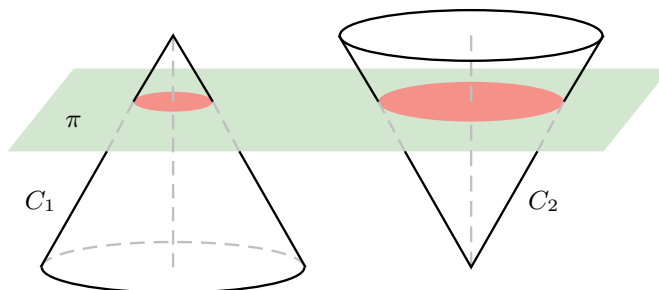
#### Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

L'affermazione riportata nel quesito rappresenta l'inversa della proposizione geometrica:

*se due o più solidi, compresi tra piani paralleli, sono tali che le sezioni determinate su di essi da un fascio di piani paralleli siano equivalenti, allora i due solidi sono tra loro equivalenti.*

Questo enunciato rappresenta il *Principio delle sezioni equivalenti* anche detto, *Principio di Cavalieri* e costituisce solo una condizione sufficiente per l'equivalenza tra solidi ma che non è necessaria. L'affermazione del quesito è quindi falsa e non può costituire un teorema. Difatti due solidi di ugual volume tagliati da un fascio di piani paralleli *possono* intercettare sezioni di area diversa e a tal fine è sufficiente proporre un esempio.

Si considerino quindi due coni equivalenti  $C_1$  e  $C_2$  disposti come in figura 1 e sezionati da un piano  $\pi$  parallelo alle rispettive basi e in prossimità del vertice di  $C_1$  e, a sua volta, prossimo alla base del secondo.



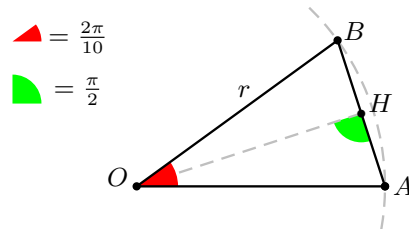
**Fig. 1.** Coni equivalenti con sezioni piane di area diversa.

Appare evidente come le aree delle rispettive sezioni piane siano sensibilmente diverse smentendo quindi l'affermazione del quesito.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito riprende parzialmente quanto chiesto nel quesito 1 dell'esame 2005 e nel punto 4 del problema 1 dell'esame 2007. In questo caso si presuppone nota la relazione tra lato del decagono regolare e raggio della circonferenza in cui questo è inscritto.

In riferimento alla figura 1 sia quindi  $\angle AOB = \frac{2\pi}{10}$ ,  $\overline{OA} = \overline{OB} = r$  e  $\overline{AB} = l$ , essendo  $r$  il raggio del cerchio in cui è inscritto il decagono ed  $l$  il lato di quest'ultimo.



**Fig. 1.** Lato  $AB$  del decagono regolare e triangolo isoscele.

La relazione che lega  $l$  ed  $r$  è

$$\frac{l}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (1)$$

(per la dimostrazione, qui non richiesta, si veda il quesito 1/2005) per cui si potrà fornire la soluzione non appena si esprimerà  $\sin \frac{\pi}{10}$  in termini di questo rapporto. Notato che  $\triangle AOB$  è isoscele con vertice in  $O$  sia  $OH$  l'altezza (e bisettrice) rispetto alla base  $AB$ : è quindi

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{l}{2}, \quad \angle AOH = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{2\pi/10}{2} = \frac{\pi}{10}.$$

La definizione goniometrica della funzione seno applicata a  $\triangle AOH$  implica ora

$$\sin \angle AOH = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}} = \frac{l/2}{r} = \frac{l}{2r}$$

per cui sostituendo la (1)

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

come richiesto.

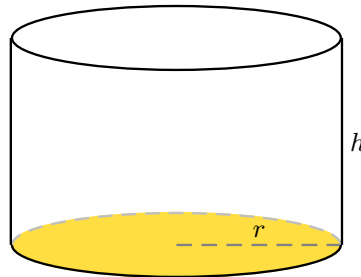


Fig. 1. Casseruola di forma cilindrica e sue dimensioni

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Detto  $r$  il raggio di base e  $h$  l'altezza della casseruola cilindrica (fig. 1) è costante, per ipotesi, l'area della superficie laterale più quella di base, cioè

$$\mathcal{S} = (2\pi r) \cdot h + \pi r^2 \quad (1)$$

con  $r > 0$  e  $h > 0$ .

Il volume  $\mathcal{V}$  è dato da  $\mathcal{V} = (\pi r^2) \cdot h$ , espressione che dipende da due grandezze  $r$  e  $h$  entrambe variabili. Dobbiamo pertanto esplicitare una di esse dalla (1) per ottenere una funzione ad una variabile. Scelta  $h$  in quanto appare di primo grado in entrambe le espressioni di  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{V}$ , dalla (1) si ha

$$h = \frac{\mathcal{S} - \pi r^2}{2\pi r}$$

che descrive correttamente il significato di  $h$  non solo se  $r \neq 0$  ma pure quando sia  $\mathcal{S} - \pi r^2 > 0$ . Quest'ultima impone che valga ( $r > 0$ )

$$r^2 < \frac{\mathcal{S}}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad r < \sqrt{\frac{\mathcal{S}}{\pi}}.$$

Pertanto il volume diventa

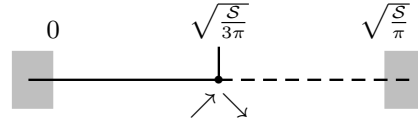
$$\mathcal{V} = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \left( \frac{\mathcal{S} - \pi r^2}{2\pi r} \right) = \frac{\mathcal{S}r - \pi r^3}{2} \quad \text{con} \quad 0 < r < \sqrt{\frac{\mathcal{S}}{\pi}}$$

Il calcolo della derivata prima  $\mathcal{V}'$  fornisce

$$\mathcal{V}' = \frac{1}{2}(\mathcal{S} - 3\pi r^2)$$

e  $\mathcal{V}'$  è positiva se

$$\mathcal{S} - 3\pi r^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad r^2 \leq \frac{\mathcal{S}}{3\pi} \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{\frac{\mathcal{S}}{3\pi}} \leq r \leq \sqrt{\frac{\mathcal{S}}{3\pi}}.$$

Fig. 2. Segno di  $\mathcal{V}'$ .

Considerando le limitazioni per la variabile  $r$ , il segno di  $\mathcal{V}'$  riassunto in fig. 2 mette in luce un massimo assoluto della funzione volume in corrispondenza del valore del raggio pari a  $r = \sqrt{\mathcal{S}/3\pi}$ .

Pur non richiesto calcoliamo l'altezza corrispondente a tale raggio. Risulta

$$\begin{aligned} h &= \frac{\mathcal{S} - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mathcal{S} - \pi(\mathcal{S}/3\pi)}{2\pi \sqrt{\mathcal{S}/3\pi}} = \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}/3}{2\pi \sqrt{\mathcal{S}/3\pi}} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\mathcal{S}}{2\pi \sqrt{\mathcal{S}/3\pi}} = \frac{\mathcal{S}}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{S}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mathcal{S}}{3\pi}} \end{aligned}$$

che mostra come l'altezza della casseruola debba essere pari al raggio di base della stessa.

#### Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

Il teorema di *De L'Hôpital* afferma:

Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni

- derivabili in un intervallo illimitato  $I$  con
- $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$ , e se
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ ,
- se esiste

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora è pure

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poiché le due funzioni proposte  $f(x) = x^{2008}$  e  $g(x) = 2^x$  soddisfano alle ipotesi del teorema in quanto definite in  $\mathbb{R}^+$ , con  $g'(x) \neq 0$  e limiti infiniti per  $x \rightarrow +\infty$ , si tratta di analizzare l'esistenza del limite del rapporto delle rispettive derivate. Comunque tale rapporto si mostra essere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(x^{2008})}{D(2^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2008 \cdot x^{2007}}{(\ln 2) \cdot 2^x} \quad (1)$$

e quindi si ripresenta la medesima indeterminazione, questa volta a causa dei limiti di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2008 \cdot x^{2007} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2) \cdot 2^x = +\infty.$$

Notato che, a parte fattori costanti al numeratore e al denominatore, il grado della funzione al numeratore di (1) è diminuito di una unità, si può comunque considerare la derivata del rapporto di queste due ultime funzioni e, per l'indeterminazione che ogni volta si ripropone, procedere per altre 2007 volte. Si ottiene infine il limite del rapporto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2008 \cdot 2007 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(\ln 2)^{2008} \cdot 2^x}$$

che si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2008!}{(\ln 2)^{2008} \cdot 2^x}. \quad (2)$$

Ora, poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2)^{2008} \cdot 2^x = +\infty$$

mentre il limite del numeratore è la costante 2008!, il limite (2) esiste ed è nullo cosicché si può applicare il teorema di *De L'Hôpital* per 2008 volte e risalire al limite originario concludendo come richiesto con

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0.$$

### Quesito n. 5: soluzione. (testo del quesito)

Il polinomio  $P(x)$  da determinare è di terzo grado per cui assumerà la forma  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  con  $a \neq 0$ . Imponendo che sia  $P(0) = 0$  discende immediatamente  $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0$  da cui  $d = 0$ . Per imporre  $P'(0) = 0$  dobbiamo calcolare la derivata prima

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

e quindi

$$P'(0) = 0 \implies 3a \cdot 0 + 2b \cdot 0 + c = 0 \implies c = 0.$$

Ne segue che dovrà essere  $P(x) = ax^3 + bx^2$ : applicando a quest'ultima espressione le due condizioni rimaste

$$P(1) = 0 \implies a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \implies a + b = 0 \quad (1)$$

$$\int_0^1 ax^3 + bx^2 dx = \frac{1}{12} \implies a \int_0^1 x^3 dx + b \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{12}$$

da cui

$$\left[ a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \implies \frac{a}{4} + \frac{b}{3} = \frac{1}{12}$$

Sostituendo per la (1)  $a = -b$  in quest'ultima, discende

$$-\frac{b}{4} + \frac{b}{3} = \frac{1}{12} \implies -3b + 4b = 1 \implies b = 1 \quad a = -1.$$

Il polinomio richiesto è allora  $P(x) = -x^3 + x^2$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Posto

$$a_1 = \binom{n}{1}, \quad a_2 = \binom{n}{2}, \quad a_3 = \binom{n}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \wedge n > 3 \quad (1)$$

e ricordato che in una progressione aritmetica la differenza tra un elemento ed il precedente è una costante (la cosiddetta *ragione*  $d$ ) ossia

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

gli elementi (1) dovranno soddisfare le condizioni

$$a_3 - a_2 = d \quad \wedge \quad a_2 - a_1 = d$$

che, per transitività, si riducono all'unica condizione

$$a_3 - a_2 = a_2 - a_1.$$

Riscritta esplicitamente come

$$\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = \binom{n}{2} - \binom{n}{1},$$

la definizione di coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

implica

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} - \frac{n!}{1!(n-1)!}. \quad (2)$$

Per la proprietà del fattoriale  $n! = n(n-1)!$ , i singoli termini si possono riscrivere come

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \\ \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{3} &= \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\end{aligned}$$

cosicché la (2) diventa

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - n.$$

Risolviamo questa equazione nell'incognita  $n$  considerando che questa dev'essere intera e maggiore di 3. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per 6 si ottiene

$$n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) = 3n(n-1) - 6n$$

e quindi

$$\begin{aligned}n(n^2 - 3n + 2) - 6n(n-1) + 6n &= 0 \\ n^3 - 3n^2 + 2n - 6n^2 + 6n + 6n &= 0 \\ n(n^2 - 9n + 14) &= 0.\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione è risolta da  $n = 0$  e dalla soluzioni dell'equazione

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \quad n = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow 7 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

ma, di questi valori, solo  $n = 7$  è accettabile in quanto unico valore maggiore di 3.

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

L'equazione fornita dal quesito rientra nella classe delle equazioni parametriche di terzo grado. Per determinare, al variare del parametro  $k$ , il numero delle soluzioni cioè discuterne le soluzioni, conviene separare il parametro in un membro e riscriverla nella forma

$$k = -x^3 + 3x^2.$$

Posto  $y = k$  tale equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 \\ y = k \end{cases}$$

e in tal modo diviene possibile reinterpretare la ricerca del numero delle soluzioni come la ricerca delle intersezioni del fascio di rette orizzontali di equazione  $y = k$  con la cubica  $y = -x^3 + 3x^2$  della quale, nel seguito, studiamo il grafico.

Lo studio della sua positività comporta

$$y = -x^3 + 3x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2(3-x) \geq 0$$

per cui  $x^2 > 0$  se  $x \neq 0$  mentre  $x^2 = 0$  se  $x = 0$ . Poiché il segno del secondo fattore è  $3-x \geq 0$  per  $x \leq 3$ , è  $y > 0$  quando  $x < 3$  e  $x \neq 0$ , mentre si ha  $y = 0$  quando  $x = 0$  oppure  $x = 3$  (fig. 1).

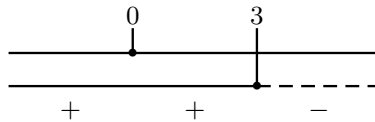


Fig. 1.

Dato che una cubica è continua in  $\mathbb{R}$ , i limiti da svolgersi sono quelli agli estremi del dominio ossia per  $x \rightarrow \pm\infty$ . In tal caso si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^3 + 3x^2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( -1 + \frac{3}{x} \right) = \mp\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -1 + \frac{3}{x} = -1 + 0 = -1.$$

La derivata prima  $y' = -3x^2 + 6x$  assume segno positivo nell'intervallo  $[0, 2]$  in quanto

$$-3x^2 + 6x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad -3x(x-2) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x \leq 2$$

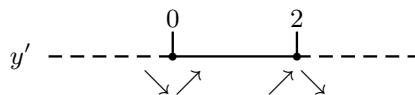
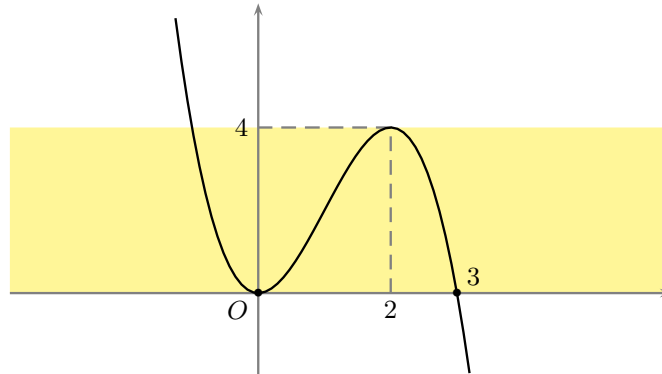


Fig. 2.



**Fig. 3.** Grafico della cubica  $y = -x^3 + 3x^2$ .

per cui la cubica presenta un minimo in corrispondenza di  $x = 0$  ed un massimo in  $x = 2$  (fig. 2).

Tralasciando lo studio della derivata seconda in quanto inutile ai fini della discussione e osservato che i valori degli estremi sono  $y(0) = 0$  e  $y(2) = -8 + 12 = 4$ , il grafico della cubica è rappresentato dalla figura 3.

Appare ora evidente che il fascio di rette orizzontali interseca in un unico punto la cubica quando  $k < 0$  oppure  $k > 4$ , mentre se  $0 \leq k \leq 4$  vi sono tre intersezioni (zona gialla di fig. 3).

Pertanto l'equazione fornita avrà una soluzione se  $k < 0 \vee k > 4$ , tre soluzioni se  $0 \leq k \leq 4$ . Agli estremi  $k = 0$  oppure  $k = 4$  delle tre soluzioni, due sono coincidenti.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il dominio della funzione  $f(x) = \pi^x - x^\pi$  è l'insieme dei reali positivi,  $\mathbb{R}_0^+$ . La derivata prima in tale dominio risulta

$$f'(x) = (\ln \pi) \cdot \pi^x - \pi \cdot x^{\pi-1}$$

e calcolata in  $x = \pi$  risulta

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= \ln \pi \cdot \pi^\pi - \pi \cdot \pi^{\pi-1} \\ &= \pi^\pi \ln \pi - \pi^\pi \\ &= \pi^\pi (-1 + \ln \pi). \end{aligned}$$

Poiché  $-1 + \ln \pi > 0$  in quanto  $\ln \pi > 1$  e  $\pi > e$ , il suo segno è positivo ossia  $f'(\pi) > 0$ .

Il calcolo di  $f''(x)$  conduce all'espressione

$$f''(x) = (\ln \pi)^2 \cdot \pi^x - \pi \cdot (\pi - 1) \cdot x^{\pi-2}$$

che permette di scrivere  $f''(\pi)$  come

$$f''(\pi) = (\ln \pi)^2 \cdot \pi^\pi - \pi(\pi - 1) \cdot \pi^{\pi-2}.$$

Cerchiamo, se possibile, di riscriverla in forma di prodotto così da facilitarne lo studio del segno. Eseguendo i prodotti nel secondo addendo

$$\begin{aligned} f''(\pi) &= (\ln \pi)^2 \cdot \pi^\pi - \pi^2 \cdot \pi^{\pi-2} + \pi \cdot \pi^{\pi-2} \\ &= \pi^\pi \cdot \ln^2 \pi - \pi^\pi + \pi^{\pi-1}, \end{aligned}$$

appare possibile fattorizzare il termine positivo  $\pi^{\pi-1}$  per cui

$$f''(\pi) = \pi^{\pi-1}(\pi \ln^2 \pi - \pi + 1).$$

Supponendo provvisoriamente che il secondo fattore sia positivo ossia nell'ipotesi

$$\pi \ln^2 \pi - \pi + 1 > 0, \quad (1)$$

segue pure

$$\pi \ln^2 \pi > \pi - 1$$

da cui dividendo per  $\pi$

$$\ln^2 \pi > 1 - \frac{1}{\pi}. \quad (2)$$

Come già notato in precedenza  $\ln \pi > 1$  per cui è pure  $\ln^2 \pi > 1$ , mentre il secondo membro di (2) è evidentemente minore dell'unità. Dalla verità di (2) segue quindi la correttezza dell'ipotesi (1) per cui possiamo concludere che  $f''(\pi) > 0$  in quanto prodotto di fattori positivi.

### Quesito n. 9: soluzione. (testo del quesito)

La funzione assegnata dal quesito contiene un valore assoluto per cui, definito il dominio come  $D = \mathbb{R} - \{1\}$ , si può rappresentarla anche in una forma alternativa come unione di due funzioni,  $f_1$  ed  $f_2$ , ciascuna definita in un suo proprio sottoinsieme di  $D$ . Pertanto

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

diviene anche

$$f : \begin{cases} f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 & \text{se } x - 1 > 0 \text{ cioè quando } x > 1, \\ f_2(x) = \frac{x^2 - 1}{-(x - 1)} = -x - 1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Il limite richiesto si suddivide quindi nel calcolo del limite destro

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

e del limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x - 1) = -1 - 1 = -2$$

e dove, per la determinazione di entrambi, si è sfruttata la continuità delle funzioni polinomiali. Essendo questi due limiti diversi, non esiste  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  e possiamo solo affermare che la funzione  $f$  presenta in  $x = 1$  una discontinuità di I specie.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Le informazioni fornite nella seconda parte del quesito definiscono, nel caso di strada rettilinea, la lunghezza dell'ipotenusa  $\overline{AC} = 1,2 \text{ km} = 1200 \text{ m}$  di un triangolo  $ABC$  rettangolo in  $B$ , mentre il dislivello che in tale percorso viene superato, si può identificare con il cateto verticale  $\overline{BC} = 85 \text{ m}$  del medesimo triangolo (fig. 1).

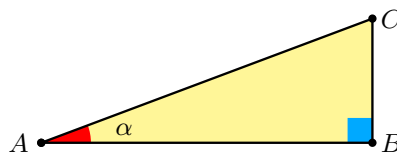


Fig. 1.

Si chiede l'inclinazione di tale percorso ossia l'angolo (in gradi sessagesimali)  $\alpha = \angle BAC$  ma, per la definizione di seno si ha

$$\text{sen } \angle BAC = \text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{85 \text{ m}}{1200 \text{ m}} = \frac{17}{240}. \quad (1)$$

Noto il seno si deduce l'angolo

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{17}{240}\right) \approx 0,070893 \text{ rad} = 4,061853^\circ = 4^\circ 3' 42,67''.$$

La pendenza di una strada ma pure quella della retta  $AC$  in un piano cartesiano con asse parallelo a  $AB$ , è invece rappresentata dal rapporto  $\overline{BC}/\overline{AB}$  cioè la tangente trigonometrica dell'angolo  $\alpha$ . Moltiplicando tale valore per 100 si ottiene la pendenza espressa da un valore percentuale ossia

$$\text{pend}\% = 100 \cdot \text{tg } \alpha = 100 \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \quad (2)$$

Non ci resta che ottenere, con il teorema di Pitagora la lunghezza del cateto  $AB$  ossia

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{1200^2 - 85^2} \approx 1196,9858$$

per cui

$$\text{pend}\% = 100 \cdot \text{tg } \alpha = 100 \cdot \frac{85}{1196,9858} \approx 7\%.$$

In alternativa, dato che è conosciuto dalla (1) il valore di  $\text{sen } \alpha$ , potremmo esprimere  $\text{tg } \alpha$  in termini di quest'ultimo sfruttando note identità goniometriche ossia

$$\text{pend}\% = 100 \cdot \text{tg } \alpha = 100 \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}}.$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$$100 \cdot \text{tg } \alpha = 100 \cdot \frac{17}{240} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{17}{240}\right)^2} = \frac{1700}{\sqrt{57311}} \approx 7\%.$$

Un'ultima osservazione onde evitare considerazioni errate ed ingenue: l'inclinazione di un pendio del 100% equivale ad un angolo rispetto all'orizzontale di  $45^\circ$  in quanto per la definizione (2)

$$\text{pend}\% = 100 \cdot \text{tg } 45^\circ = 100 \cdot 1 = 100\%.$$

# ESAME 2008 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

1) Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli  $ABC$  con  $A(1,0)$ ,  $B(3,0)$  e  $C$  variabile sulla retta d'equazione  $y = 2x$ .

1. Si provi che i punti  $(1, 2)$  e  $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$  corrispondono alle due sole posizioni di  $C$  per cui è  $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$ .
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico  $\gamma$  descritto, al variare di  $C$ , dall'ortocentro del triangolo  $ABC$ . Si tracci  $\gamma$ .
3. Si calcoli l'area  $\Omega$  della parte di piano delimitata da  $\gamma$  e dalle tangenti a  $\gamma$  nei punti  $A$  e  $B$ .
4. Verificato che è  $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$  si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di  $\ln 3$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

2) Siano  $f$  e  $g$  le funzioni definite, per ogni  $x$  reale, da  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = x^2$ .

1. Si traccino i grafici di  $f$  e di  $g$  e si indichi con  $A$  la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di  $A$  con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione  $h(x) = 2^x - x^2$ ? Si tracci il grafico di  $h$ .
4. Si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di  $h$  e l'asse  $x$  sull'intervallo  $[2, 4]$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

Soluzione

2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea dal raggio, si provi che  $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

Soluzione

3. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

Soluzione

4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661–1704) e la si applichi per dimostrare che è:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$ .

Soluzione

5. Nel piano riferito a coordinate cartesiane  $(x, y)$  si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta:  $y^2 - x^3 > 0$ .

Soluzione

6. I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

Soluzione

7. Perché è *geometria “non” euclidea*? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

Soluzione

8. Sia  $f$  la funzione definita da  $f(x) = \pi^x - x^\pi$ . Si precisi il dominio di  $f$  e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto  $x = \pi$ .

Soluzione

9. In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

Soluzione

10. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di  $y = e^{-2x}$ ? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

Soluzione

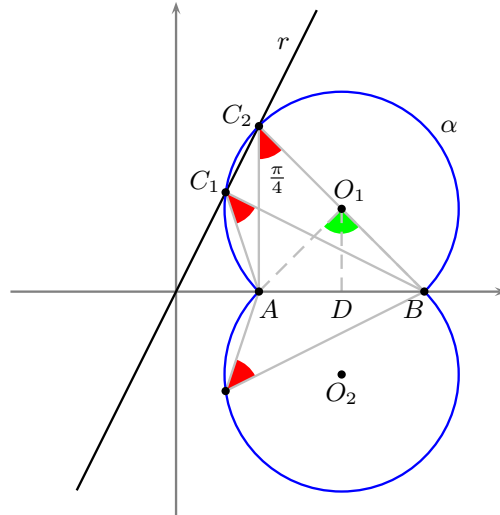
**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Tracciata la retta  $r: y = 2x$  e i punti  $A(1,0)$  e  $B(3,0)$  (fig. 1), la richiesta consiste nel determinare tutti i punti  $C$  di  $r$  che “vedono” il segmento  $AB$  sotto un angolo di  $\frac{\pi}{4}$ . Se teniamo presente una proprietà importante degli angoli alla circonferenza ossia come questi mantengano costante la loro ampiezza quando insistono su un medesimo arco o corda e quindi vedono la corda sotto un angolo costante, possiamo ritenere i punti  $C$  pure appartenenti ad una circonferenza di cui  $AB$  è una corda.

Se poi consideriamo che l'angolo al centro di una circonferenza che insiste sulla medesima corda possiede un'ampiezza pari al doppio di quella dell'angolo alla circonferenza, allora siamo in grado di determinare il centro  $O_1$  di tale circonferenza  $\alpha$  e il relativo raggio (fig. 1). Difatti poiché  $\angle AO_1B = \frac{\pi}{2}$ , il  $\triangle AO_1B$  è rettangolo ed isoscele sulla base  $AB$  per cui

$$x_{O_1} = x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \quad \text{mentre} \quad y_{O_1} = \overline{DO_1} = \overline{AD} = 1.$$

Ne segue che il raggio di  $\alpha$  è  $r_1^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DO_1}^2$  da cui  $r_1 = \sqrt{2}$  e la sua equazione



**Fig. 1.** Retta  $r: y = 2x$  e punti  $C$ .

rappresentativa è

$$\alpha : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Notato inoltre che l'arco di circonferenza simmetrico di  $\alpha$  rispetto all'asse delle ascisse è pure luogo dei punti che vedono il segmento  $AB$  sotto un angolo di  $\frac{\pi}{4}$  ma che quest'ultimo insieme appartiene per intero al IV quadrante non interessato dalla retta  $r$ , il problema è quindi ricondotto alla ricerca delle intersezioni della retta  $r$  con l'arco appartenente al I quadrante della sola circonferenza  $\alpha$ . Pertanto eliminando la variabile  $y$  dal sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2 \end{cases}$$

si ha l'equazione risolvente

$$(x - 2)^2 + (2x - 1)^2 = 2 \implies x^2 + 4 - 4x + 4x^2 + 1 - 4x - 2 = 0$$

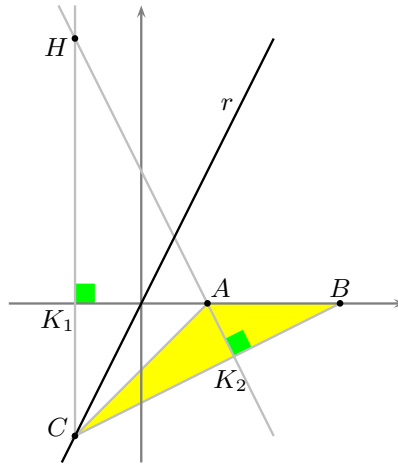
ossia

$$5x^2 - 8x + 3 = 0$$

da cui le soluzioni in  $x$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 15}}{5} = \frac{4 \pm 1}{5} = \begin{cases} 1 \\ \frac{3}{5} \end{cases}$$

e le corrispondenti ordinate dei due soli punti attesi,  $C_1(1, 2)$  e  $C_2\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ .



**Fig. 2.** Triangolo  $ABC$  e ortocentro  $H$ .

2. Per determinare il luogo geometrico  $\gamma$  che l'ortocentro  $H$  percorre al variare di  $C$  sulla retta  $r$  converrà determinare le equazioni di due altezze di  $\triangle ABC$ . In riferimento alla fig. 2, se poniamo  $C(x_0, y_0)$  con  $y_0 = 2x_0$  e  $x_0 \neq 0$  in quanto in tal caso  $\triangle ABC$  degenera in un segmento, data l'appartenenza di  $C$  ad  $r$ , l'altezza relativa al lato  $AB$  ha equazione  $x = x_0$ . Per determinare l'equazione della retta contenente l'altezza  $AK_2$  relativa al lato  $BC$  (fig. 2), determiniamo prima il coefficiente angolare della retta  $BC$ ,

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2x_0}{x_0 - 3}.$$

Nel fascio di rette per  $A$ ,  $f: y - 0 = m(x - 1)$ , sostituiamo al coefficiente angolare generico  $m$  il valore che individua la perpendicolare a  $BC$  ossia  $m' = -1/m_{BC}$  da cui l'equazione della retta  $AK_2$

$$AK_2 : y = -\frac{x_0 - 3}{2x_0}(x - 1).$$

Intersecando quest'ultima con l'altezza  $CK_1$  otteniamo le coordinate dell'ortocentro

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = -\frac{x_0 - 3}{2x_0} \cdot (x - 1) \end{cases}$$

cioè

$$y = -\frac{(x_0 - 3)(x_0 - 1)}{2x_0} = \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 3}{2x_0} = -\frac{x_0}{2} + 2 - \frac{3}{2x_0}.$$

Sostituendo ad  $x_0$  il nome generico  $x$  abbiamo che l'equazione esplicita del luogo  $\gamma$  richiesto è data da

$$\gamma : y = \frac{-x^2 + 4x - 3}{2x} = -\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x} \quad \wedge \quad x \neq 0. \quad (1)$$

L'equazione ottenuta se riscritta nella forma  $x^2 + 2xy - 4x + 3 = 0$  rientra nelle equazioni di II grado in due incognite per cui è rappresentativa di una conica. In particolare, poiché risulta  $\Delta = 2^2 - 4(1)0 = 4 > 0$ , essa rappresenta una iperbole (si veda quanto esposto nel problema n. 1/2002 PNI). In ogni caso e a livello qualitativo, la forma

$$y = -\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x} \quad (2)$$

mette in evidenza la presenza di un asintoto verticale di equazione  $x = 0$  in corrispondenza dell'annullarsi del denominatore e di un asintoto obliquo di equazione  $y = -\frac{x}{2} + 2$  ottenuto osservando che  $-3/2x \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Di seguito segue la formalizzazione di tali osservazioni.

- La funzione non è simmetrica nel suo dominio  $\mathbb{R}_0$  in quanto posto  $y = f(x)$  è

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-(-x)^2 + 4(-x) - 3}{2(-x)} \\ &= \frac{-x^2 - 4x - 3}{-2x} = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x} \neq \pm f(x). \end{aligned}$$

Ovviamente non è periodica, mentre lo studio di  $y \geq 0$  implica l'analisi delle disequazioni  $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$  e  $2x > 0$ . L'equazione associata alla prima fornisce

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{-1} = 2 \pm 1 = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix} \implies 1 \leq x \leq 3,$$

mentre la seconda è immediata  $x > 0$ . Componendo i due segni nella fig. 3 risulta  $y \geq 0$  se  $x < 0$  oppure  $1 \leq x \leq 3$ .

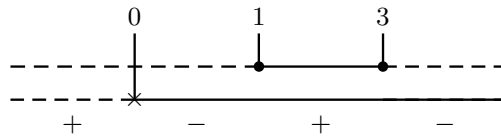


Fig. 3.

- Lo studio dei limiti conferma l'esistenza dell'asintoto verticale coincidente con l'asse delle ordinate in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} -\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x} = \mp \infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} -\frac{3}{2x} = \mp\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} -\frac{x}{2} + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Poiché inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x} = \mp\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{3}{2x} = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x}{2} + 2 = \mp\infty,$$

la conferma dell'esistenza dell'asintoto obliquo si ottiene con i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx.$$

Utilizzando la forma (2) per  $f(x)$ , il primo fornisce

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

essendo nulli i limiti del secondo e terzo addendo. Il limite per il termine noto si può riscrivere come

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x} - \left(-\frac{1}{2}\right)x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 - \frac{3}{2x} = 2$$

in quanto  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3/2x = 0$ , cosicché l'equazione rappresentativa dell'asintoto è quella aspettata,  $y_a = -\frac{1}{2}x + 2$ .

• Il confronto della funzione con l'asintoto si realizza con lo studio della disequazione  $f(x) \geq y_a$  che esplicitamente diviene

$$-\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x} \geq -\frac{x}{2} + 2 \quad \implies \quad -\frac{3}{2x} \geq 0 \quad \implies \quad x < 0 :$$

pertanto i punti con ascisse negative del grafico della funzione possiedono ordinata maggiore dei corrispondenti sull'asintoto obliquo.

• Il calcolo della derivata prima fornisce

$$y' = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2x^2} = \frac{-x^2 + 3}{2x^2}$$

per cui risulterà  $y' \geq 0$  se  $-x^2 + 3 \geq 0$  ossia  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$  e in  $[-\sqrt{3}, 0[ \cup ]0, \sqrt{3}]$  la funzione risulta monotona crescente (fig. 4).

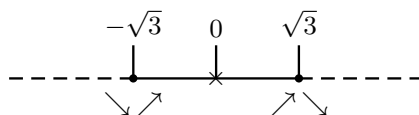
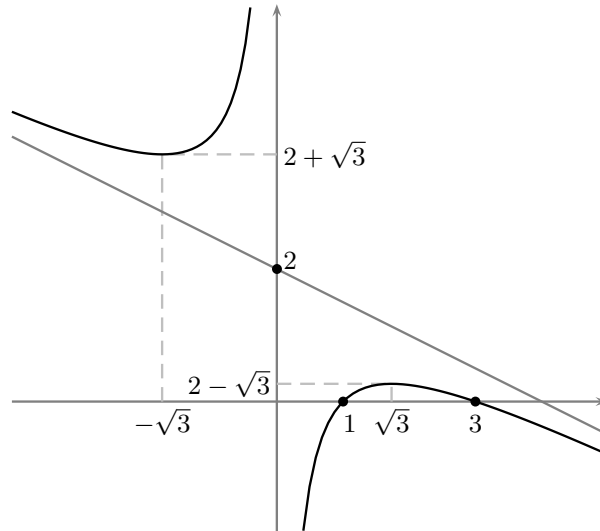


Fig. 4.



**Fig. 5.** Grafico del luogo  $\gamma$ .

• La derivata seconda è  $y'' = -3/x^3$  risulta positiva se  $-x^3 > 0$  cioè quando  $x < 0$ . In tale insieme la concavità è rivolta nella direzione positiva delle ordinate. Determinate le ordinate dei punti estremanti,  $(\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$  e  $(-\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ , il grafico di  $\gamma$  è rappresentato in fig. 5.

3. Per determinare l'area richiesta dobbiamo trovare le equazioni delle rette tangenti in  $A(1, 0)$  e  $B(3, 0)$ . I rispettivi coefficienti angolari si ottengono dal calcolo della derivata prima in tali punti ossia

$$m_A = y'(1) = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \quad m_B = y'(3) = \frac{-9 + 3}{2 \cdot 9} = -\frac{1}{3}$$

per cui le tangenti possiedono equazione

$$t_A : y - 0 = m_A(x - 1) = x - 1 \quad \text{e} \quad t_B : y - 0 = m_B(x - 3) = -\frac{1}{3}x + 1.$$

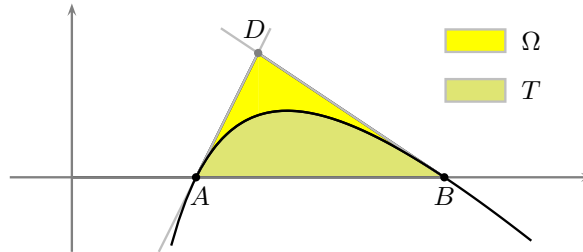
Queste si intersecano nel punto  $D$ , soluzione del sistema

$$t_A \cap t_B = \{D\} : \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$

ossia

$$x - 1 = -\frac{1}{3}x + 1 \quad \implies \quad x_D = \frac{3}{2}, \quad y_D = \frac{1}{2}.$$

La rappresentazione geometrica della regione  $\Omega$  (in giallo nella fig. 6) chiarisce come si potrà determinare la sua area: basterà sottrarre dall'area di  $\triangle ABD$



**Fig. 6.** Regione del piano  $\Omega$  e trapezoide  $T$ .

l'area del trapezoide  $T$  (in verde chiaro nella fig. 6), determinato dalla curva  $\gamma$  con l'asse delle  $x$  ossia

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\triangle ABD) - \mathcal{A}(T).$$

Poiché  $\mathcal{A}(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot |y_D| = \frac{1}{2} \cdot (3-1) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  e l'area del trapezoide  $T$  si può esprimere con un integrale definito della funzione (1), segue

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\triangle ABD) - \mathcal{A}(T) = \frac{1}{2} - \int_1^3 \left( -\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x} \right) dx. \quad (3)$$

Per la proprietà di linearità dell'integrale indefinito, questo si suddivide in integrali elementari

$$\int \left( -\frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x} \right) dx = -\frac{1}{2} \int x dx + 2 \int dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx$$

che implica

$$-\frac{1}{2} \int x dx + 2 \int dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{4} x^2 + 2x - \frac{3}{2} \ln |x| + c$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Omega) &= \frac{1}{2} - \left[ -\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{3}{2} \ln |x| \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} - \left[ -\frac{9}{4} + 6 - \frac{3}{2} \ln 3 - \left( -\frac{1}{4} + 2 - \frac{3}{2} \ln 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} - \left( 2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right) \\ &= \frac{3}{2} (\ln 3 - 1) \approx 0,1479 \end{aligned}$$

come aspettato.

4. Riprendiamo la (3) sostituendo l'ultimo risultato per  $\mathcal{A}(\Omega)$

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\triangle ABD) - \mathcal{A}(T) \implies \frac{3}{2}(\ln 3 - 1) = \frac{1}{2} - \mathcal{A}(T)$$

e ricaviamo  $\ln 3$  cioè

$$\ln 3 - 1 = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} - \mathcal{A}(T) \right)$$

da cui

$$\ln 3 = \frac{2}{3}(2 - \mathcal{A}(T)). \quad (4)$$

Se quindi forniamo una stima numerica dell'area del trapezoide  $T$  potremo, in base alla relazione (4), ottenere pure una stima di  $\ln 3$ .

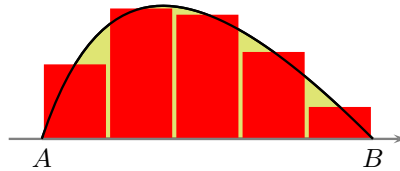


Fig. 7. Trapezoide  $T$  e plurirettangolo.

A tale scopo applichiamo il metodo dei rettangoli (si veda pure il problema 1/2002 PNI) che approssima l'area del trapezoide con la somma delle aree di un adeguato numero di rettangoli costruiti partizionando l'intervallo di integrazione  $[a, b]$ . Sia  $n$  il numero di intervallini di uguale ampiezza  $h$  con

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{e di estremi} \quad x_i = h \cdot i + a \quad \text{con} \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

intervallini che costituiranno le basi degli  $n$  rettangoli. Il punto medio dell' $i$ -esimo intervallino è dato da

$$x_{Mi} = x_i + \frac{h}{2} = hi + a + \frac{h}{2} = \frac{h}{2}(2i + 1) + a,$$

e in corrispondenza il valore della funzione, supposta positiva,  $f(x_{Mi})$  si interpreta come misura dell'altezza dell' $i$ -esimo rettangolo. Di conseguenza, l'area dell' $i$ -esimo rettangolo è

$$\mathcal{A}_i = h \cdot f(x_{Mi}) = h \cdot f \left[ \frac{h}{2}(2i + 1) + a \right]$$

cosicché una stima dell'area del trapezoide si ottiene sommando le aree di tutti i rettangoli

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(x_{Mi}) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f \left[ \frac{h}{2}(2i + 1) + a \right].$$

Nel nostro caso scegliamo  $n = 5$  per cui  $h = (x_B - x_A)/5 = 0,4$  e quindi, ripresa la funzione (1), la stima di  $\mathcal{A}(T)$  è

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(T) &= 0,4 \cdot \sum_{i=0}^4 f \left[ \frac{0,4}{2}(2i+1) + 1 \right] = 0,4 \cdot \sum_{i=0}^4 f [0,2(2i+1) + 1] \\ &= 0,4 \cdot [f(1,2) + f(1,6) + f(2) + f(2,4) + f(2,8)] \\ &= 0,4 \cdot [0,15 + 0,2625 + 0,25 + 0,175 + 0,0642857] \\ &\approx 0,360714.\end{aligned}$$

Per la (4) segue l'approssimazione per  $\ln 3$

$$\ln 3 = \frac{2}{3}(2 - 0,360714) \approx 1,0929,$$

valore che differisce per meno di 6 millesimi da quanto fornito con calcolo diretto da una calcolatrice tascabile ossia  $\ln 3 \approx 1,0986$ .

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

1. I grafici di  $f(x) = 2^x$  e di  $g(x) = x^2$  rientrano nelle conoscenze di base connesse, per la prima, alla funzione esponenziale mentre la seconda in quelle della geometria analitica.

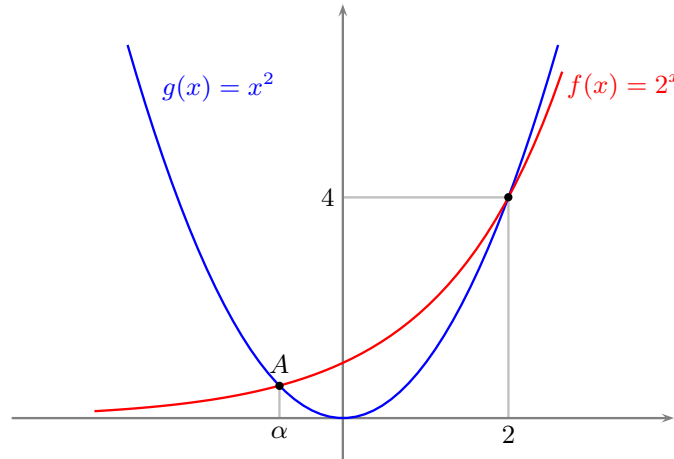
In particolare la funzione  $f(x)$  è rappresentata dal tipico grafico di una funzione esponenziale a base maggiore di 1 dove, ad un dominio coincidente con l'insieme  $\mathbb{R}$ , corrisponde un codominio  $\mathbb{R}_0^+$ . La funzione inoltre è strettamente crescente, interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata 1 e i suoi limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

La  $g(x)$  rappresenta invece una parabola con vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse  $y$  e concavità rivolta verso le ordinate positive. Riportati i rispettivi grafici nel medesimo piano cartesiano (fig. 1) appare evidente come queste si intersechino in un punto  $A$  di ascissa  $\alpha$  negativa e in un ulteriore punto di ascissa pari a 2 dove entrambe assumono il valore 4. Appare inoltre che  $2^x < x^2$  almeno in un intorno destro di 2.

2. Per calcolare l'ascissa  $\alpha$  del punto di intersezione  $A$  applichiamo il metodo numerico delle tangenti (o di Newton) che, generalmente, converge più rapidamente del, seppure più semplice, metodo di bisezione (si veda a tal fine quanto esposto nel problema 2/2005 PNI). Cercheremo quindi di stimare l'ascissa negativa di  $A$  in corrispondenza della quale si annulla la funzione  $h(x) = 2^x - x^2$  in quanto dev'essere  $2^\alpha = \alpha^2$ .

Verifichiamo dapprima le ipotesi che permettono l'applicazione del metodo:



**Fig. 1.** Grafici (parziali) di  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = x^2$ .

a) la prima stabilisce che la funzione debba assumere agli estremi di un intervallo valori di segno opposto.

Difatti, notato che  $h(0) = 2^0 - 0^2 = 1 > 0$  analizziamo il segno di  $h$  nell'estremo inferiore provando a calcolarla in  $x = -1$ . Poiché risulta

$$h(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = -\frac{1}{2} < 0$$

l'intervallo che contiene  $\alpha$  è  $[-1, 0]$ .

b) In tale intervallo non si devono inoltre annullare le derivate prima e seconda di  $h(x)$ .

Poiché

$$h'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x \quad (1)$$

risulta certamente  $h'(x) > 0$  in quanto con  $x \in [-1, 0]$  tale derivata appare somma di due termini positivi,  $\ln 2 \cdot 2^x$  e  $-2x$ . La derivata seconda

$$h''(x) = \ln^2 2 \cdot 2^x - 2$$

è in  $[-1, 0]$  una funzione monotona crescente in quanto tale è il termine variabile  $\ln^2 2 \cdot 2^x$ . Ne segue che il suo valore massimo è raggiunto in  $x = 0$  dove risulta  $h''(0) = \ln^2 2 \cdot 2^0 - 2 = \ln^2 2 - 2 \approx -1,5195$ . Nell'intervallo scelto abbiamo quindi  $h'(x) \neq 0$  e  $h''(x) \neq 0$ .

Il metodo è quindi applicabile e si basa sull'iterazione dell'espressione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

che per (1) diviene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2^{x_n} - (x_n)^2}{\ln 2 \cdot 2^{x_n} - 2x_n} = t(x_n) \quad (2)$$

dove abbiamo per brevità introdotta la funzione  $t(x)$ . Iniziamo l'iterazione di quest'ultima a partire da  $x_0 = -1$  per cui

$$\begin{aligned} x_1 &= t(-1) = -1 - \frac{2^{-1} - (-1)^2}{\ln 2 \cdot 2^{-1} - 2(-1)} \approx -0,786923 \\ x_2 &= t(-0,786923) \approx -0,766863 \\ x_3 &= t(-0,766863) \approx -0,766665 \\ x_4 &= t(-0,766665) \approx -0,766665. \end{aligned}$$

Come si vede la seconda cifra decimale corretta è raggiunta già alla seconda iterazione: pertanto  $\alpha = -0,7666$ .

3. Per determinare il numero delle intersezioni tra le due curve date oppure, in modo equivalente, il numero degli zeri di  $h(x)$  notiamo innanzitutto che, in base allo studio precedente si può finora affermare che  $h(x) < 0$  se  $x < \alpha$  mentre  $h(x) \geq 0$  se  $\alpha \leq x \leq 2$ . Data la continuità della funzione (è somma di funzioni continue) ci aspettiamo che sia  $h(x) < 0$  almeno in un intorno destro di 2 come si può dedurre dal confronto dei grafici ottenuti nel punto 1. Poiché comunque risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \left(1 + \frac{x^2}{2^x}\right) = +\infty \quad (3)$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$$

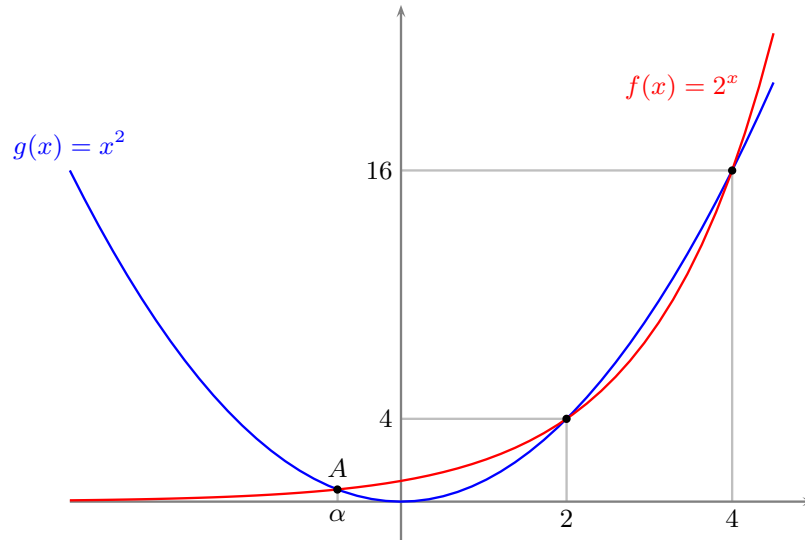
potendosi applicare per due volte il teorema di De L'Hôpital. Difatti il limite del rapporto delle derivate è ancora indeterminato

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\ln 2 \cdot 2^x},$$

ma l'ulteriore rapporto di derivate possiede invece il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln^2 2 \cdot 2^x} = 0$$

che permette di risolvere con il teorema detto il limite (3). Da un certo punto in poi  $h(x)$  dovrà perciò essere positiva per cui esiste un terzo valore  $\beta$  tale che per  $x \geq \beta$  sia pure  $h(x) \geq 0$ . D'altra parte l'esistenza di tale ulteriore intersezione



**Fig. 2.** Grafici di  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = x^2$  (sistema non isometrico).

è suggerita pure dall'osservazione che, per  $x \rightarrow +\infty$ , la funzione  $2^x$  è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza  $x^n$ , ragione per cui la sua divergenza prevarrà su quella di  $x^2$ . Il valore  $\beta$  si può determinare facilmente osservando che  $2^4 = 4^2$  cioè  $\beta = 4$  oppure lo si può ricercare con il metodo precedente già visto. Le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  si incontrano quindi in tre punti e i rispettivi grafici si possono ora rappresentare più correttamente come in figura 2.

Il segno di  $h(x)$  è in definitiva:  $h(x) \geq 0$  se  $\alpha \leq x \leq 2$  oppure  $x \geq 4$ .

Il limite a  $-\infty$  è invece

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{poiché} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty.$$

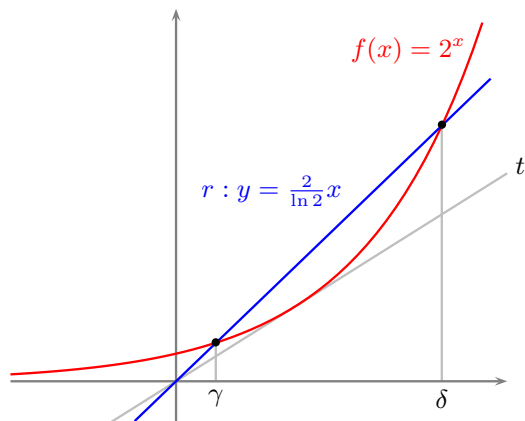
• Lo studio del segno della derivata prima  $h'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x$  comporta la ricerca delle soluzioni della disequazione  $\ln 2 \cdot 2^x - 2x \geq 0$ . Procediamo per via grafica confrontando le funzioni presenti nei due membri della disequazione una volta che si sia riscritta quest'ultima come

$$2^x \geq \frac{2}{\ln 2} x \quad \text{e posto} \quad f(x) = 2^x \quad \text{e} \quad r : y = \frac{2}{\ln 2} \cdot x.$$

Poiché la retta  $r$  passa per l'origine determiniamo la retta tangente  $t$  alla  $f(x)$  passante a sua volta per tale punto: se questa avrà un coefficiente angolare inferiore a quello di  $r$  vorrà dire che  $r$  interseca  $f$  in due punti in quanto l'andamento di  $2^x$  è noto ed è tutto contenuto nel semipiano superiore a  $t$ .

Sia quindi  $x_0$  l'ascissa di un punto qualsiasi di  $f$ : la retta tangente a  $f(x)$  in tale punto è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \implies \quad y - 2^{x_0} = \ln 2 \cdot 2^{x_0}(x - x_0)$$



**Fig. 3.** Confronto tra i grafici di  $f(x) = 2^x$  e  $y = (2/\ln 2)x$ .

e imponiamo che tale retta passi per l'origine. Discende che

$$0 - 2^{x_0} = \ln 2 \cdot 2^{x_0}(0 - x_0) \implies 2^{x_0}(1 - x_0 \ln 2) = 0$$

da cui  $x_0 = 1/\ln 2 = \lg_2 e$  e dove si è sfruttata la proprietà del cambio di base dei logaritmi. In corrispondenza il coefficiente angolare di  $t$  è

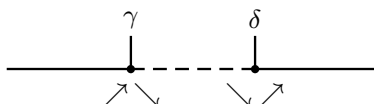
$$f'(x_0) = \ln 2 \cdot 2^{\lg_2 e} = e \ln 2.$$

Il confronto tra i coefficienti angolari di  $t$  ed  $r$  fornisce

$$e \ln 2 < \frac{2}{\ln 2} \implies e \ln^2 2 < 2$$

ed essendo  $e \ln^2 2 \approx 1,3060$  la retta  $r$  sarà secante il grafico di  $f$  dapprima in un punto di ascissa  $\gamma$  e poi, anche per la maggiore divergenza dell'esponenziale rispetto a qualsiasi potenza di  $x$ , pure in un secondo punto  $\delta$ . (fig. 3).

Pertanto il segno di  $h'$  si può riassumere in  $h'(x) \geq 0$  quando  $x \leq \gamma$  oppure  $x \geq \delta$ . Perciò in corrispondenza di  $\gamma$  la funzione  $h(x)$  presenta un massimo mentre ad  $x = \delta$  corrisponde un punto di minimo (fig. 4). Con l'applicazione del metodo di Newton già visto, si possono ottenere eventualmente le stime di  $\gamma \approx 0,48509$  e  $\delta \approx 3,21243$  e quindi le rispettive ordinate  $(\gamma, 1,16)$  e  $(\delta, -1,05)$ .

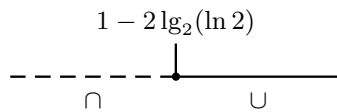


**Fig. 4.** Segno di  $h'(x)$ .

- La derivata seconda è  $h''(x) = \ln^2 2 \cdot 2^x - 2$  e risulta positiva o nulla se

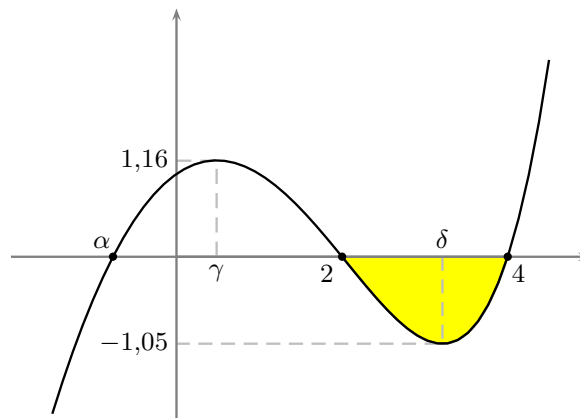
$$\ln^2 2 \cdot 2^x - 2 \geq 0 \implies 2^x \geq \frac{2}{\ln^2 2} \implies x \geq \lg_2 \left( \frac{2}{\ln^2 2} \right)$$

che si può pure scrivere come  $x \geq 1 - 2 \lg_2(\ln 2)$  (è  $1 - 2 \lg_2(\ln 2) \approx 2,0575$ ). In tale insieme la concavità di  $h(x)$  è rivolta verso l'alto (fig. 3).



**Fig. 5.** Segno di  $h''(x)$ .

Il grafico di  $h(x)$  è quindi dato dalla figura 6.



**Fig. 6.** Grafico di  $h(x) = 2^x - x^2$ .

4. Per determinare l'area della regione in colore della fig. 6 si dovrà risolvere l'integrale definito

$$\mathcal{A} = - \int_2^4 (2^x - x^2) dx$$

dove il segno negativo davanti l'integrale tiene conto del fatto che la funzione è nell'intervallo di integrazione negativa per cui il solo integrale fornirebbe un valore opposto all'area, grandezza definita come positiva. Il corrispondente integrale indefinito si spezza facilmente nei due integrali elementari

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c, \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c,$$

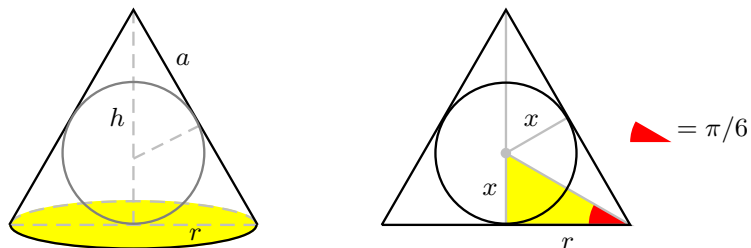
per cui in definitiva si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\int_2^4 (2^x - x^2) dx = -\left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 \\ &= -\left(\frac{2^4}{\ln 2} - \frac{4^3}{3}\right) + \left(\frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^3}{3}\right) \\ &= -\frac{16}{\ln 2} + \frac{64}{3} + \frac{4}{\ln 2} - \frac{8}{3} \\ &= -\frac{12}{\ln 2} + \frac{56}{3} \approx 1,3543. \end{aligned}$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Un cono equilatero avente raggio di base  $r$  possiede l'apotema  $a$  pari al diametro della base  $2r$  (fig. 1). Ne segue che l'altezza  $h$  è pari a  $h^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$  da cui  $h = r\sqrt{3}$ . Il suo volume è perciò

$$\mathcal{V}_c = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3. \quad (1)$$



**Fig. 1.** Cono equilatero, sfera inscritta e sezione piana.

Per determinare il raggio  $x$  della sfera inscritta consideriamo la sezione piana contenente l'altezza del cono (fig. 1) ed osserviamo che, essendo il cono equilatero come pure la sua sezione, l'angolo formato dall'apotema e dal diametro di base è  $\pi/3$ . Pertanto l'angolo di base del triangolo in colore di fig. 1 è  $\pi/6$  per cui il rapporto tra i cateti  $x$  ed  $r$  risulta

$$\frac{x}{r} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \implies x = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Il volume della sfera risulta

$$\mathcal{V}_s = \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \cdot r^3. \quad (2)$$

La probabilità  $p$  che il punto scelto a caso nel cono sia esterno alla sfera è, per la definizione classica, data dal rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili ossia dal rapporto tra il volume  $\mathcal{V}$  della regione del cono esterna alla sfera evidentemente dato da  $\mathcal{V}_c - \mathcal{V}_s$ , e il volume  $\mathcal{V}_c$  del cono stesso cioè

$$p = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_c} = \frac{\mathcal{V}_c - \mathcal{V}_s}{\mathcal{V}_c} = 1 - \frac{\mathcal{V}_s}{\mathcal{V}_c}.$$

Inserendo i risultati (1) e (2) dedotti sopra si ottiene

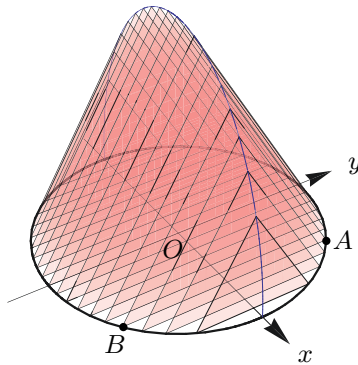
$$p = 1 - \left( \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \cdot r^3 \right) : \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3 \right) = 1 - \frac{4}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento, quesito n. 2.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

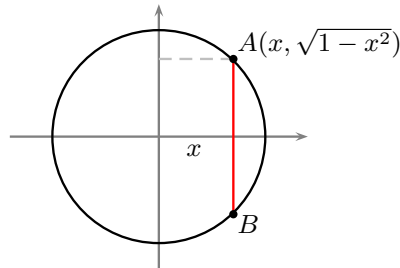
Innanzitutto la figura 1 fornisce una rappresentazione del solido  $\mathcal{S}$  dove si è scelto di far coincidere il centro della circonferenza di base con l'origine del sistema cartesiano  $Oxy$  e disponendo i piani sezione perpendicolarmente all'asse  $x$ .



**Fig. 1.** Alcune sezioni equilateri del solido  $\mathcal{S}$ .

Con tale disposizione l'equazione della circonferenza di base è  $x^2 + y^2 = 1$  per cui, definita con  $x$  la posizione del piano sezione del solido, il lato di base della sua sezione equilatera è il segmento di estremi  $A$  e  $B$  (figg. 1 e 2). Poiché è

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \implies \quad y_A = \sqrt{1 - x^2},$$



**Fig. 2.** Circonferenza di base del solido  $\mathcal{S}$  e lato di base della sezione.

il lato  $AB$  misura

$$\overline{AB} = 2y_A = 2\sqrt{1-x^2}.$$

Ne segue che l'area del corrispondente triangolo equilatero è la funzione

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2 = \sqrt{3}(1-x^2),$$

per cui il volume si ottiene con l'integrale definito

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \int_{-1}^1 \mathcal{A}(x) dx = \sqrt{3} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx.$$

Poiché

$$\int (1-x^2) dx = \int dx - \int x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} + c$$

risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{S}) &= \sqrt{3} \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \sqrt{3} \left[ 1 - \frac{1}{3} - (-1) + \frac{(-1)}{3} \right] \\ &= \sqrt{3} \left[ 2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

**Quesito n. 4: soluzione.** ([testo del quesito](#))

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento, quesito n. 4.

**Quesito n. 5: soluzione.** ([testo del quesito](#))

La disequazione  $y^2 - x^3 > 0$  si può spezzare nei due sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ y^2 > x^3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y^2 > x^3 \end{cases}$$

per cui, essendo nel primo  $x^3 < 0$  e  $x^3 \geq 0$  nel secondo, implicano per  $y$  le condizioni

$$\begin{cases} x < 0 \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y < -\sqrt{x^3} \quad \vee \quad y > +\sqrt{x^3}. \end{cases} \quad (1)$$

Il primo sistema, interpretato nel piano cartesiano  $Oxy$  descrive il semipiano delle ascisse negative mentre il secondo richiede per la sua determinazione lo studio della funzione  $f(x) = y = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$ .

Pertanto, notato che  $y \geq 0$  se  $x \geq 0$ , studiamo il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$$

in quanto

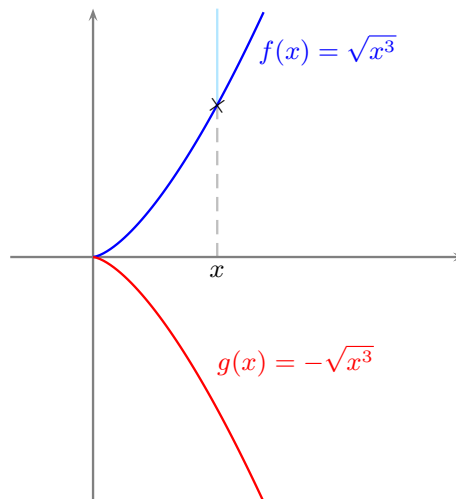
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

La funzione non possiede alcun asintoto obliquo dato che

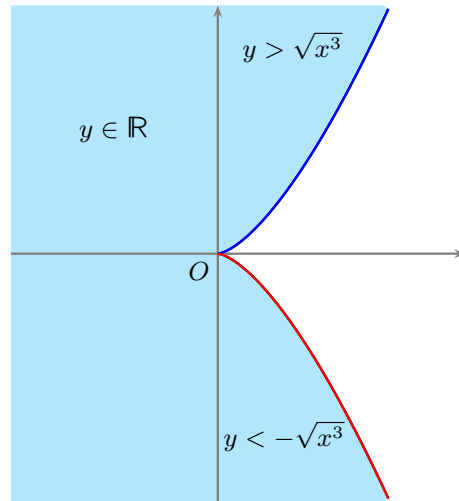
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

La sua derivata prima risulta  $y' = D(x^{3/2}) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$  cosicché è pure  $y' \geq 0$  quando  $x \geq 0$ .

Infine la derivata seconda  $y'' = \frac{3}{4}x^{-1/2} = 3/(4\sqrt{x})$  appare positiva per ogni  $x > 0$  per cui  $f(x)$  volge la concavità verso l'alto in ogni punto del suo dominio: il grafico  $\Gamma$  di  $f(x)$  è rappresentato in fig. 1 assieme a quello della  $g(x) = -\sqrt{x^3}$  che, data la validità di  $g(x) = -f(x)$ , è il simmetrico di  $\Gamma$  rispetto all'asse delle  $x$ .



**Fig. 1.** Grafici delle funzioni  $f(x) = \sqrt{x^3}$  e  $g(x) = -\sqrt{x^3}$ .

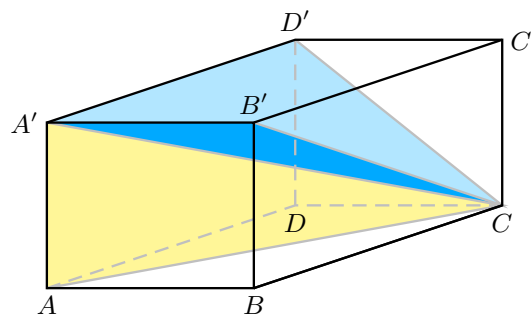


**Fig. 2.** Soluzioni di  $y^2 > x^3$  nel piano  $Oxy$ .

Ritornando al secondo sistema di (1), la disequazione  $y > \sqrt{x^3}$  rappresenta tutti i punti del I quadrante aventi ordinata maggiore di quella del punto  $(x, f(x))$  (figg. 1 e 2), mentre  $y < -\sqrt{x^3}$  i punti di ordinata inferiore ai corrispondenti punti su  $g(x)$  (fig. 2). In definitiva, l'insieme delle soluzioni della disequazione  $y^2 - x^3 > 0$  è rappresentato in colore nella fig. 2.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Siano  $A, B, C, D$ , i vertici della faccia di base del parallelepipedo e  $A', B', C', D'$  i corrispondenti dell'altra (fig. 1).



**Fig. 1.** Parallelepipedo rettangolo.

Posto  $\overline{AA'} = 8$ ,  $\overline{AB} = 9$ ,  $\overline{BC} = 12$  possiamo determinare la lunghezza della diagonale  $\overline{A'C}$  che, per il teorema di Pitagora, risulta

$$\overline{A'C}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AA'}^2 + (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) = 8^2 + 9^2 + 12^2 = 289$$

da cui  $\overline{A'C} = 17$ . Questa è pure l'ipotenusa del triangolo  $CA'A$ , rettangolo in  $A$  e rappresentato in colore giallo in fig. 1. La definizione di coseno permette ora di porre

$$\cos \angle CA'A = \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'C}} = \frac{8}{17}$$

e quindi, passando alla funzione inversa,

$$\angle CA'A = \arccos \frac{8}{17} \approx 61,9275^\circ = 61^\circ 55' 39'' \approx 61^\circ 56'.$$

Allo stesso modo si considera  $\triangle CA'B'$ , rettangolo in  $B'$  (di colore blu in fig. 1). L'angolo  $CA'B'$  si deduce dal rapporto

$$\cos \angle CA'B' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'C}} = \frac{9}{17}$$

da cui

$$\angle CA'B' = \arccos \frac{9}{17} \approx 58,0343^\circ = 58^\circ 02' 03'' \approx 58^\circ 2'.$$

Infine osservando che pure  $\triangle CA'D'$  è rettangolo in  $D'$  poniamo

$$\cos \angle CA'D' = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{A'C}} = \frac{12}{17}$$

per cui

$$\angle CA'D' = \arccos \frac{12}{17} \approx 45,0991^\circ = 45^\circ 05' 57'' \approx 45^\circ 6'.$$

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

È *geometria non euclidea* perché, dopo due millenni di tentativi tesi a dimostrare il quinto postulato di Euclide per ridurlo ad un teorema deducibile dai precedenti quattro assiomi, si prese coscienza che potevano esistere delle geometrie dove invece questa affermazione fosse negata. Data la minor evidenza del quinto postulato rispetto agli altri, si passò quindi nel XIX secolo dalla convinzione della sua deducibilità alla convinzione della sua indimostrabilità ed indipendenza dai precedenti.

Quanto viene negato della geometria euclidea è quindi l'ultimo dei seguenti cinque postulati o assiomi:

1. tra due punti qualsiasi passa una ed una sola retta;
2. una retta così tracciata si può prolungare indefinitamente;
3. è possibile tracciare un cerchio dato un punto ed un segmento;
4. tutti gli angoli retti sono uguali fra loro;

5. per un punto esterno ad una data retta passa una ed una sola parallela alla retta data.

In particolare, le geometrie non euclidee si costruiscono sostituendo al postulato 5 uno o l'altro dei seguenti:

- a) per un punto esterno ad una data retta passano almeno due rette distinte e parallele alla retta data;  
b) per il punto esterno non passa alcuna retta parallela.

Il postulato a) è stato proposto dal russo Nicolaj Lobacevskij (1793–1856) e dal matematico ungherese Janos Bolyai (1802–1860). Il secondo invece dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826–1866). Nel primo caso si ottiene la geometria dell'angolo acuto o geometria iperbolica nella quale, per esempio, la somma delle ampiezze degli angoli di un triangolo è minore di due angoli retti, nel secondo la geometria dell'angolo ottuso o geometria di Riemann o geometria ellittica dove, per esempio, la somma delle ampiezze degli angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti.

Per la geometria iperbolica si possono proporre diversi modelli rappresentativi che si dimostrano tutti equivalenti e nei quali, assieme alla validità dei postulati 1–4, a, vengono pure definite le nozioni di punto, retta ed angolo. Un **esempio** di tali modelli è il disco di Poincaré dove lo spazio è formato dai punti interni di un cerchio con le “rette” costituite da archi di circonferenze che intersecano perpendicolarmente il bordo del cerchio.

Per la geometria ellittica un suo **modello** valido localmente è quello della geometria sferica dove, in tal caso, le “rette” corrispondono a cerchi massimi.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 8.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Notiamo innanzitutto che in ciascun gruppo di 8 studenti dovranno essere presenti 4 maschi e 4 femmine. Supponendo che si sia scelto un dato gruppo di 4 maschi a questo si potrà associare un qualsiasi altro gruppo di 4 femmine per cui, il numero totale  $n$  di gruppi comprendenti 4 maschi e 4 femmine sarà dato dal prodotto del numero  $m$  di gruppi di soli 4 maschi (scelti tra i 12 presenti) con il numero  $f$  dei gruppi di sole 4 femmine (scelte tra le 8 presenti): pertanto  $n = m \cdot f$ . Osservato ciò determiniamo i numeri  $m$  ed  $f$ .

Poiché un gruppo di 4 maschi scelti tra 12 non è altro che una combinazione semplice di 12 elementi a gruppi di 4, il numero di tali gruppi è dato dal coefficiente binomiale

$$m = C_{12,4} = \binom{12}{4}.$$

Allo stesso modo il numero dei possibili gruppi di 4 femmine scelte a caso tra le 8 presenti in classe è dato da

$$f = C_{8,4} = \binom{8}{4}$$

cosicché il numero totale dei gruppi di 8 elementi contenenti 4 maschi e 4 femmine è  $n = m \cdot f = C_{12,4} \cdot C_{8,4}$ .

Poiché il numero totale dei gruppi che si possono formare a partire da  $12 + 8 = 20$  studenti e in ciascuno dei quali vi siano compresi 8 studenti indipendentemente dal sesso è dato dal binomiale

$$C_{20,8} = \binom{20}{8},$$

la probabilità che in un tale gruppo vi siano 4 studentesse è data, per la definizione classica di probabilità, dal rapporto del numero  $n$  dei casi favorevoli a tale evento con il numero dei possibili ossia

$$p = \frac{C_{12,4} \cdot C_{8,4}}{C_{20,8}} = \frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{20}{8}}.$$

Per la definizione di coefficiente binomiale si ha

$$\begin{aligned} p &= \frac{12!}{4!(12-4)!} \cdot \frac{8!}{4!(8-4)!} \cdot \frac{8!(20-8)!}{20!} \\ &= \frac{12! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 12!}{4! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 20!} \end{aligned}$$

e quindi, esplicitando i fattoriali e dopo qualche semplificazione di fattori comuni, si giunge in definitiva alla

$$p = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5}{13 \cdot 17 \cdot 19} \approx 0,2751.$$

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Data l'equazione  $y = e^{-2x}$  rappresentativa della funzione  $\alpha$ , l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine si deduce applicando la simmetria centrale di equazioni

$$\sigma_O : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$$

e, in particolare, la sua inversa

$$\sigma_O^{-1} : \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Sostituendo questa coppia nell'equazione di  $\alpha$  si ottiene

$$-y' = e^{-2(-x')} = e^{2x'} \quad \text{cioè} \quad y' = -e^{2x'}$$

Quest'ultima è l'equazione richiesta ma se omettiamo gli apici è anche,  $\beta: y = -e^{2x}$ .

La trasformazione di simmetria assiale avente come asse la bisettrice del I e III quadrante di un sistema cartesiano è rappresentata dalle equazioni

$$\sigma_{y=x} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

per cui, sostituita quest'altra coppia di equazioni nella  $y = e^{-2x}$  si ottiene

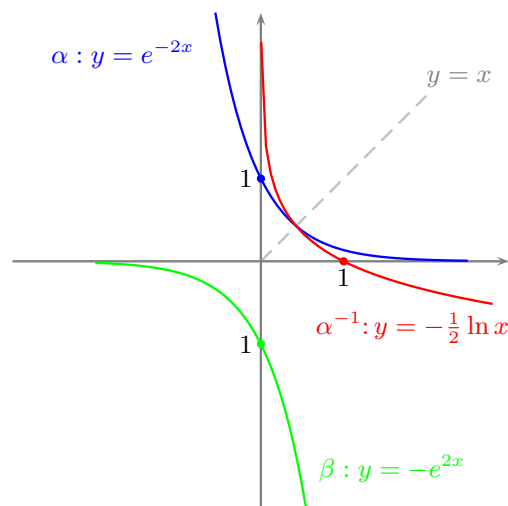
$$x' = e^{-2y'}$$

Esplicitando la variabile dipendente  $y'$  prendendo il logaritmo di entrambi i membri (positivi), si ha

$$\ln x' = -2y' \quad \text{cioè} \quad y' = -\frac{1}{2} \ln x'$$

e l'equazione richiesta è in tal caso  $y = -\frac{1}{2} \ln x$  che rappresenta pure l'equazione della funzione inversa di  $\alpha$  cioè, simbolicamente,  $\alpha^{-1}$ .

Pur non richiesti, forniamo i grafici delle curve  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha^{-1}$ . Questi si deducono immediatamente non appena sia noto quello di  $\alpha$  che appare l'immagine di quello, noto, della funzione esponenziale  $y = e^{-x}$  non appena si applichi la dilatazione lungo l'asse delle ascisse  $x' = 2x$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Grafici delle funzioni  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha^{-1}$ .

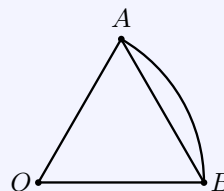
# ESAME 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

È assegnato il settore circolare  $AOB$  di raggio  $r$  e ampiezza  $x$  ( $r$  e  $x$  sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area  $S$  compresa fra l'arco e la corda  $AB$  è espressa, in funzione di  $x$ , da  $S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - \operatorname{sen} x)$  con  $x \in [0, 2\pi]$ .
2. Si studi come varia  $S(x)$  e se ne disegni il grafico (avendo posto  $r = 1$ ).
3. Si fissi l'area del settore  $AOB$  pari a  $100 \text{ m}^2$ . Si trovi il valore di  $r$  per il quale è minimo il perimetro di  $AOB$  e si esprima il corrispondente valore di  $x$  in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia  $r = 2$  e  $x = \frac{\pi}{3}$ . Il settore  $AOB$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad  $OB$  sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di  $W$ .



Soluzione

## • Problema n. 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico  $G_f$  della funzione  $f(x) = \log x$  (*logaritmo naturale*).

1. Sia  $A$  il punto d'intersezione con l'asse  $y$  della tangente a  $G_f$  in un suo punto  $P$ . Sia  $B$  il punto d'intersezione con l'asse  $y$  della parallela per  $P$  all'asse  $x$ . Si dimostri che, qualsiasi sia  $P$ , il segmento  $AB$  ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico  $G_g$  della funzione  $g(x) = \log_a x$  con  $a$  reale positivo diverso da 1?
2. Sia  $\delta$  l'inclinazione sull'asse  $x$  della retta tangente a  $G_g$  nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base  $a$  è  $\delta = 45^\circ$ ? E per quale valore di  $a$  è  $\delta = 135^\circ$ ?

3. Sia  $\mathbf{D}$  la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da  $G_f$  e dalla retta d'equazione  $y = 1$ . Si calcoli l'area di  $\mathbf{D}$ .
4. Si calcoli il volume del solido generato da  $\mathbf{D}$  nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione  $x = -1$ .

Soluzione

### Questionario

1. Si trovi la funzione  $f(x)$  la cui derivata è  $\sin x$  e il cui grafico passa per il punto  $(0, 2)$ .

Soluzione

2. Sono dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di  $A$  in  $B$ , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

Soluzione

3. Per quale o quali valori di  $k$  la curva d'equazione  $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$  ha una sola tangente orizzontale?

Soluzione

4. "Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0.$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

Soluzione

6. Si calcoli:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ .

Soluzione

7. Si dimostri l'identità  $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$  con  $n$  e  $k$  naturali e  $n > k$ .

Soluzione

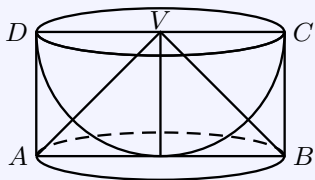
8. Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una sola radice compresa fra  $-1$  e  $0$ .

Soluzione

9. Nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio  $r$  e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice  $V$  in figura.



Soluzione

10. Si determini il periodo della funzione  $f(x) = \cos 5x$ .

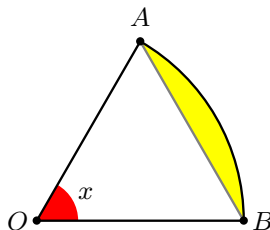
Soluzione

### Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

1. Posto  $\overline{OA} = \overline{OB} = r$  e  $\angle AOB = x$ , l'area  $\mathcal{S}$  del segmento circolare (in giallo nella fig. 1) è la differenza tra l'area del settore circolare  $AOB$  con quella del triangolo  $AOB$ . Ne segue che, per  $x \in [0, \pi]$ ,

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}(\text{sett. } AOB) - \mathcal{A}(\triangle AOB)$$

per cui, essendo l'area  $\mathcal{A}$  di un settore espressa dalla  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \alpha r^2$  con  $r$  raggio del



**Fig. 1.** Segmento circolare con  $\angle AOB < \pi$ .

settore e  $\alpha$  ampiezza in radianti dell'angolo di apertura, risulta

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{A}(\text{sett. } AOB) - \mathcal{A}(\triangle AOB) \\ &= \frac{1}{2} \overline{OB}^2 \cdot x - \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OA} \sin x \\ &= \frac{1}{2} r^2 x - \frac{1}{2} r^2 \sin x = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x). \end{aligned}$$

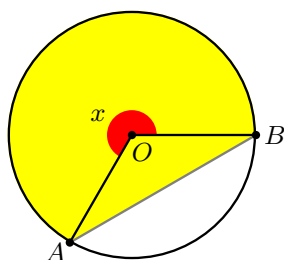
Quest'ultima espressione si dimostra valida anche quando  $x \in ]\pi, 2\pi]$  (fig. 2) in quanto per questi valori l'espressione che esprime l'area di  $\triangle AOB$

$$\mathcal{A}(\triangle AOB) = \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OA} \sin x = \frac{1}{2} r^2 \sin x < 0$$

diviene negativa (cosicché rappresenta il suo opposto), ma la presenza della differenza in

$$S = \frac{1}{2} r^2 x - \frac{1}{2} r^2 \sin x = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x) \tag{1}$$

assicura l'effettiva somma delle aree del settore e del triangolo. La (1) fornisce quindi ancora l'area del segmento circolare che, in tal caso, comprende il centro  $O$  del cerchio (fig. 2).



**Fig. 2.** Segmento circolare con  $\angle AOB > \pi$ .

2. Posto  $r = 1$  si deve studiare la funzione

$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x) = \frac{1}{2} (x - \sin x) \quad \text{con } x \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

- In base a quanto osservato nel punto precedente nel caso di un angolo  $x$  concavo dev'essere  $\mathcal{S}(x) > 0$  per  $0 < x \leq 2\pi$  mentre la funzione  $\mathcal{S}$  si annulla in corrispondenza di  $\mathcal{S}(0) = 0$ .
- La funzione  $\mathcal{S}$  è continua in  $[0, 2\pi]$  (e lo è pure in  $\mathbb{R}$ ): agli estremi risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(2\pi) = \pi.$$

- Nell'intervallo assegnato la  $\mathcal{S}(x)$  interseca il grafico della retta di equazione  $y = \frac{1}{2}x$  quando  $\sin x = 0$  ossia in  $x = 0$ ,  $x = \pi$  e in  $x = 2\pi$ , mentre la disequazione

$$\mathcal{S}(x) \geq \frac{1}{2}x \implies \frac{1}{2}(x - \sin x) \geq \frac{1}{2}x \implies -\sin x \geq 0$$

permette di confrontare i rispettivi grafici. Dato che la disequazione  $\sin x \leq 0$  è risolta per  $\pi \leq x \leq 2\pi$ , possiamo affermare che il grafico di  $\mathcal{S}(x)$  giace, in questo intervallo, al di sopra del grafico della retta  $y = \frac{1}{2}x$ .

- Lo studio della derivata prima implica  $\mathcal{S}'(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x) \geq 0$  da cui

$$1 - \cos x \geq 0, \implies \cos x \leq 1$$

risolta per  $x \in [0, 2\pi]$  ma con  $\mathcal{S}'(0) = \mathcal{S}'(2\pi) = 0$ . La funzione è quindi crescente strettamente in  $[0, 2\pi]$  con derivata nulla agli estremi (fig. 3).

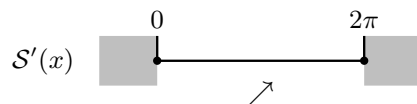
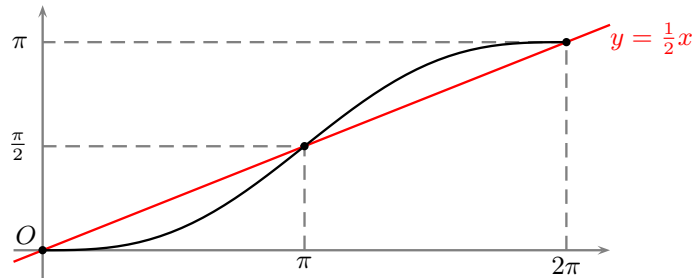


Fig. 3.

Infine il calcolo della derivata seconda fornisce l'espressione  $\mathcal{S}''(x) = \frac{1}{2} \sin x$  e la disequazione  $\mathcal{S}''(x) \geq 0$  è soddisfatta dai valori  $x \in [0, \pi]$ . La figura 4 indica come sono disposte le concavità e, in aggiunta, si può osservare come negli estremi di  $[0, 2\pi]$  tale funzione presenti dei flessi orizzontali (manifestamente la  $\mathcal{S}''(x)$  è una funzione periodica con periodicità  $2\pi$ ). Un ulteriore flesso obliquo è presente in corrispondenza di  $(\pi, \frac{\pi}{2})$ .



Fig. 4.



**Fig. 5.** Grafici di  $S(x)$  e della retta di eq.  $y = \frac{1}{2}x$ .

Il grafico che ne discende è riportato in fig. 5

3. Fissata l'area del settore  $AOB$  pari a

$$A(\text{sett. } AOB) = 100 \text{ m}^2 = a,$$

il suo perimetro è dato dalla somma

$$2p(\text{sett. } AOB) = \overline{OA} + \overline{OB} + \widehat{AB}$$

con  $\widehat{AB}$  lunghezza dell'arco. Pertanto risulta

$$2p(\text{sett. } AOB) = 2r + rx \tag{3}$$

ma poiché quest'ultima espressione contiene due grandezze variabili, dev'essere associata alla condizione che fissa l'area del settore ossia alla

$$A(\text{sett. } AOB) = \frac{1}{2}r^2x = a.$$

Da quest'ultima si ricava

$$x = \frac{2a}{r^2} \tag{4}$$

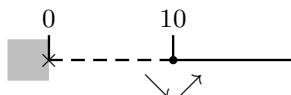
e la (3) diviene allora

$$2p = 2r + rx = 2r + r\left(\frac{2a}{r^2}\right) = 2\left(r + \frac{a}{r}\right) \quad \wedge \quad r > 0. \tag{5}$$

Passando allo studio del segno della derivata prima

$$(2p)' = 2\left(1 - \frac{a}{r^2}\right),$$

affinché sia  $(2p)' \geq 0$ , deve risultare  $r^2 - a \geq 0$ . Questa è risolta dai valori di  $r$  dell'insieme  $r \leq -\sqrt{a} \vee r \geq \sqrt{a}$  per cui, tenendo conto delle limitazioni e del valore di  $a = 100$ , abbiamo che  $(2p)' \geq 0$  se  $r \geq 10$ .



**Fig. 6.**

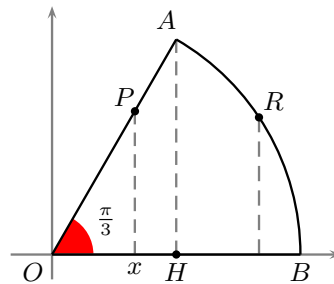
Riassunto ciò nel grafico di fig. 6 possiamo concludere che la funzione perimetro presenta un minimo (assoluto) in corrispondenza di  $r = 10$  m. Il valore dell'angolo  $x$  che discende risulta dalla (4) è

$$x = \frac{2a}{r^2} = \frac{2 \cdot 100 \text{ m}^2}{10^2 \text{ m}^2} = 2 \text{ rad}$$

cui corrisponde un angolo  $x^\circ$  in gradi sessagesimali

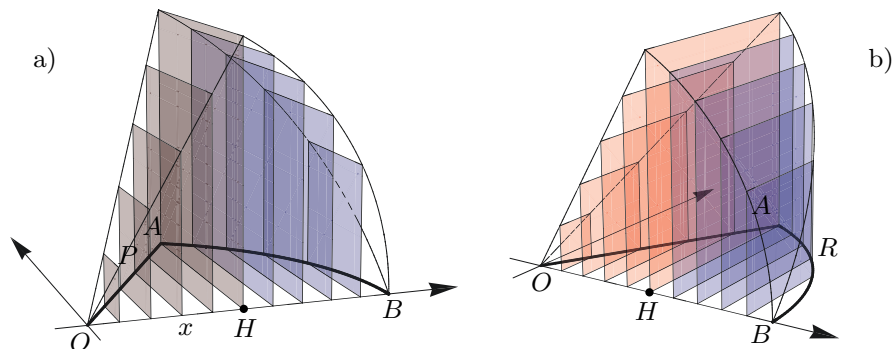
$$x^\circ = (2 \text{ rad}) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{\pi} \approx 114,5916^\circ = 114^\circ 35' 30''.$$

4. Posto  $r = 2$  e  $x = \frac{\pi}{3}$  possiamo associare al settore  $AOB$  un sistema cartesiano di origine  $O$  con l'asse  $x$  contenente il segmento  $OB$  (fig. 7). Poiché  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$  le coordinate di  $A$  sono  $A(2 \cos \frac{\pi}{3}, 2 \sin \frac{\pi}{3}) \equiv (1, \sqrt{3})$ , di  $B(2, 0)$ , mentre l'equazione della retta  $OA$  è  $OA: y = x \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}x$ .



**Fig. 7.** Settore circolare e sistema cartesiano  $Oxy$  associato.

Il solido  $\mathcal{W}$  avente come base il settore circolare è rappresentato dalle figure seguenti: in fig. 8a viene visto da un punto al di sopra del terzo quadrante mentre in fig. 8b il punto di vista sta sulla verticale di un punto del quarto quadrante.



**Fig. 8.** Alcune sezioni quadrate del solido  $\mathcal{W}$ .

Il solido si può suddividere in due parti ( $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ ) con un piano passante per il punto  $A$  e perpendicolare all'asse  $x$ . Se  $P$  è un punto del segmento  $OA$  le sue coordinate sono  $P(x, \sqrt{3}x)$  e l'area di una sezione di  $\mathcal{W}$  passante per  $P$  quando  $0 \leq x \leq 1$  è data dall'integrale definito  $\mathcal{A}_1(x) = (y_P)^2 = (\sqrt{3}x)^2 = 3x^2$ . Ricordando la **formula** che dà il volume di un solido del quale sia possibile esprimere l'area delle sue sezioni parallele in funzione di una variabile  $x$  ossia

$$\mathcal{W} = \int_a^b \mathcal{A}(x) dx,$$

segue che il volume di questa parte di  $\mathcal{W}$  è dato da

$$\mathcal{W}_1 = \int_0^1 \mathcal{A}_1(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^2 dx = 3 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1.$$

Allo stesso risultato si perviene considerando  $\mathcal{W}_1$  come la piramide a base quadrata di lato pari a  $\overline{HA} = y_A = \sqrt{3}$  e di altezza  $\overline{OH} = 1$ : in tal caso si ottiene ancora

$$\mathcal{W}_1 = \frac{1}{3} \overline{HA}^2 \cdot \overline{OH} = \frac{1}{3} (y_A)^2 \cdot \overline{OH} = \frac{1}{3} (\sqrt{3})^2 \cdot 1 = 1.$$

Per ottenere il volume della parte  $\mathcal{W}_2$ , serve l'ordinata di un punto generico  $R$  (fig. 7 e 8b) appartenente all'arco  $AB$ . Scritta pertanto l'equazione della circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r = 2$  ossia  $x^2 + y^2 = 4$  si deduce, esplicitando la  $y$  che  $y^2 = 4 - x^2$  per cui  $y_R = \sqrt{4 - x^2}$  con  $1 \leq x \leq 2$ .

Il volume corrispondente sarà

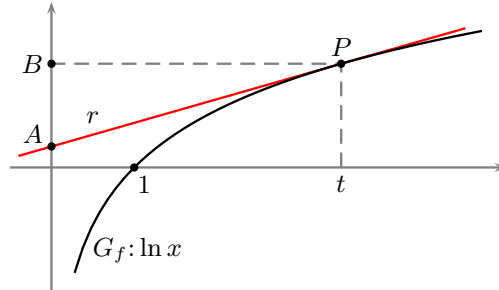
$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 &= \int_1^2 \mathcal{A}_2(x) dx = \int_1^2 (y_R)^2 dx \\ &= \int_1^2 (4 - x^2) dx = \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

e quello richiesto risulta in conclusione

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}.$$

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

1. La funzione logaritmo naturale  $f(x) = \ln x$  (utilizziamo la notazione  $\ln x$  in luogo di  $\log x$ ) con dominio  $\mathbb{R}_0^+$  possiede il grafico (noto) rappresentato in fig. 1.



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $f(x) = \ln x$ .

Se  $P(t, \ln t)$  è un suo punto qualsiasi, l'equazione della retta tangente in  $P$  risulta

$$r : y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t) \quad (1)$$

in quanto la derivata prima è  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . L'ordinata di  $A$ , punto di intersezione con l'asse  $y$  di  $r$  si ottiene ponendo  $x = 0$  in (1) cioè

$$y_A - \ln t = \frac{1}{t}(0 - t) \implies y_A = -1 + \ln t.$$

L'ordinata di  $B$  è evidentemente  $y_B = y_P = \ln t$  cosicché la lunghezza di  $AB$  risulta

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |\ln t - (-1 + \ln t)| = 1$$

ed è, come richiesto, costante in quanto non dipende dal punto  $P$  considerato. Nel caso sia  $g(x) = \log_a x$  procediamo allo stesso modo ma poiché

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (2)$$

l'equazione della retta tangente è ora

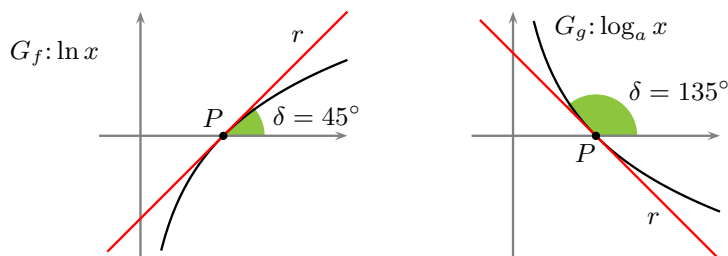
$$r : y - \log_a t = \frac{1}{t \ln a}(x - t).$$

Posto  $x = 0$  il punto  $A$  ha ordinata

$$y_A = \log_a t - \frac{1}{\ln a} \quad \text{e} \quad y_B = y_P = \log_a t.$$

La misura del segmento  $AB$  è quindi

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = \left| \log_a t - \left( \log_a t - \frac{1}{\ln a} \right) \right| = \left| \frac{1}{\ln a} \right| = |\log_a e|$$



**Fig. 2.** Grafici di  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = \log_a x$  ( $a = e^{-1}$ ).

e risulta ancora indipendente da  $P$  pur essendo il suo valore diverso dall'unità. Evidentemente se  $a = e$  si ricade nel caso precedente.

2. La derivata prima  $g'(x)$ , nella sua interpretazione geometrica più nota, rappresenta la tangente goniometrica dell'angolo che la retta tangente forma con il semiasse positivo delle  $x$ . Poiché si fornisce l'angolo  $\delta = 45^\circ$  per il punto di ascissa 1 (fig. 2), poniamo  $g'(1) = \operatorname{tg} \delta$  e per la (2) segue

$$g'(1) = \operatorname{tg} \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1 \cdot \ln a} = \operatorname{tg} 45^\circ$$

da cui

$$\frac{1}{\ln a} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln a = 1$$

ossia la base  $a$  deve valere  $a = e$ .

Se invece  $\delta = 135^\circ$ ,

$$g'(1) = \operatorname{tg} 135^\circ \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1 \cdot \ln a} = -1$$

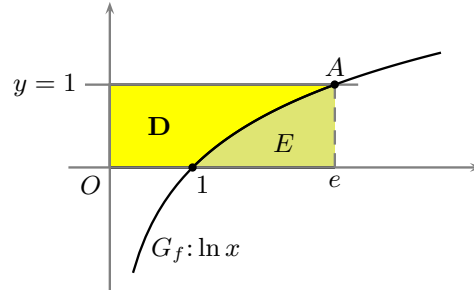
da cui  $\ln a = -1$  ossia  $a = e^{-1} = \frac{1}{e}$ . Entrambe le situazioni sono rappresentate in fig. 2.

3. Definito il punto  $A$  come il punto di  $G_f$  avente ordinata  $y_A = 1$ , l'area della regione finita  $D$  (in giallo nella fig. 3) si può ottenere come differenza tra l'area del rettangolo avente i lati paralleli agli assi coordinati e di vertici opposti  $O$  ed  $A$  e l'area del trapezoide  $E$  definito da  $G_f$  con  $x \in [1, x_A]$  (in verde chiaro nella fig. 3). Pertanto sapendo che  $y_A = 1$  si ottiene  $1 = \ln x$  da cui  $x_A = e$ , valore che costituisce la misura della base del rettangolo. Ne segue che

$$\mathcal{A}(D) = x_A \cdot y_A - \int_1^e \ln x \, dx = e - \int_1^e \ln x \, dx.$$

Applicando il metodo per parti all'integrale rimasto e individuando  $\ln x$  come il fattore finito si ha

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$



**Fig. 3.** Regione **D** e funzione logaritmo.

per cui il valore dell'integrale definito è

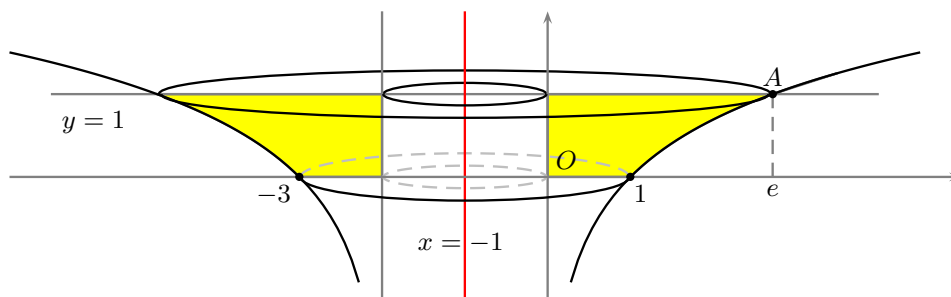
$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

e quindi  $\mathcal{A}(D) = e - 1$ .

4. Poiché viene chiesto il volume di un solido di rotazione attorno alla retta verticale  $x = -1$  (fig. 4) conviene scambiare i ruoli di  $x$  e  $y$  con la trasformazione

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

che rappresenta una simmetria assiale avente come asse la retta  $y = x$ . Risulta quindi che  $x' = \ln y'$  ossia, esplicitando  $y'$ ,  $y' = e^{x'}$ . Con tale trasformazione la retta di equazione  $x = -1$  diviene  $y' = -1$  e l'immagine della regione  $D$  risulta data dalla fig. 5.



**Fig. 4.** Sezione del solido di rotazione generato da **D**.

Infine, allo scopo di riportare questa retta a coincidere con l'asse  $x$  applichiamo la traslazione

$$\begin{cases} y'' = y' + 1 \\ x'' = x' \end{cases}$$

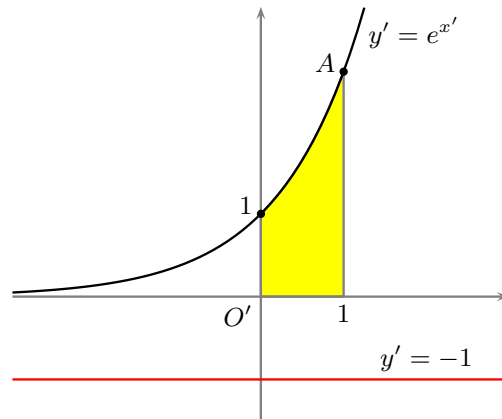


Fig. 5. Immagine della regione **D** nella simmetria assiale di asse  $y = x$ .

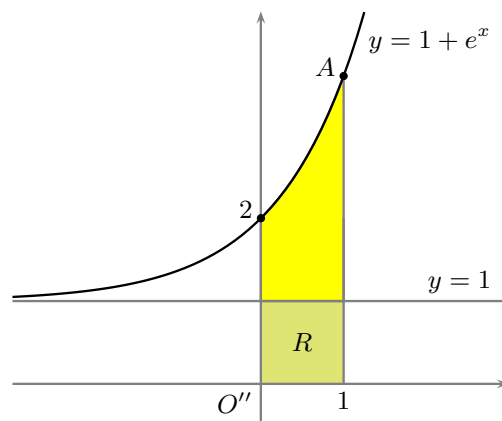


Fig. 6. Immagine finale della regione **D**.

per cui l'equazione della retta si riduce a  $y'' = 0$  mentre la funzione diviene  $y'' - 1 = e^{x''}$  ossia  $y'' = 1 + e^{x''}$ . La nuova situazione è rappresentata dalla fig. 6 dove si sono lasciati cadere gli apici identificando quindi  $x'' = x$  e  $y'' = y$ . Considerando la formula che fornisce il volume dei solidi di rotazione attorno all'asse delle  $x$  limitati dalla funzione  $f(x)$ ,

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

il volume richiesto sarà dato dall'integrale

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^1 (1 + e^x)^2 dx - \mathcal{V}_1$$

essendo  $\mathcal{V}_1$  il volume di un cilindro di altezza 1 e raggio di base unitario generato dalla rotazione della regione  $R$  (in verde chiaro nella figura 6). Svolgendo il quadrato della funzione integranda ed esplicitando  $\mathcal{V}_1 = \pi(1)^2 \cdot 1 = \pi$  si ha

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^1 (1 + 2e^x + e^{2x}) dx - \pi$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi \int_0^1 (1 + 2e^x) dx + \pi \int_0^1 e^{2x} dx - \pi \\ &= \pi [x + 2e^x]_0^1 + \pi \int_0^1 e^{2x} dx - \pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Risolti gli integrali immediati rimane l'integrazione del termine  $\int e^{2x} dx$ . Inserendo un fattore costante pari a 2 questo si può riscrivere

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} (2 dx) = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

per cui, riprendendo il calcolo (3), abbiamo in conclusione

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi(1 + 2e - 2) + \frac{\pi}{2} [e^{2x}]_0^1 - \pi \\ &= \pi(2e - 2) + \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) = \frac{\pi}{2} (4e - 4 + e^2 - 1) \\ &= \frac{\pi}{2} (e^2 + 4e - 5). \end{aligned}$$

### Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

L'insieme delle funzioni primitive che soddisfa alla condizione  $f'(x) = \sin x$  è dato dall'integrale indefinito

$$\int \sin x dx = -\cos x + c = f(x).$$

Per determinare la costante di integrazione  $c$  ossia per individuare la particolare funzione il cui grafico passa per il punto di coordinate  $(0, 2)$  basta imporre sull'insieme  $f(x) = -\cos x + c$  la condizione  $f(0) = 2$  che si esplicita in

$$-\cos 0 + c = 2 \quad \implies \quad -1 + c = 2 \quad \implies \quad c = 3.$$

La funzione che soddisfa quindi ad entrambe le condizioni è  $f(x) = -\cos x + 3$ .

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Assegnare una funzione  $f: A \rightarrow B$  con dominio  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  sull'insieme  $B = \{a, b, c\}$  significa, per la definizione di funzione, associare ad ogni elemento di  $A$  uno ed uno solo elemento di  $B$ . Necessariamente tutti gli elementi di  $A$  sono coinvolti in questa corrispondenza ma, poiché quattro sono gli elementi di  $A$  (ossia la cardinalità di  $A$  è pari a 4) e tre quelli di  $B$  (cardinalità 3) non sarà possibile l'esistenza di funzioni iniettive. Difatti queste associano ad elementi distinti,  $x_1 \neq x_2$ , elementi distinti del codominio,  $f(x_1) \neq f(x_2)$  per cui necessariamente  $B$  dovrebbe contenere almeno quattro elementi distinti. Ci dovranno pertanto essere almeno due elementi di  $A$  con la medesima immagine in  $B$ . Da ciò segue che non potranno esistere funzioni biettive per le quali la proprietà dell'iniettività è invece necessaria.

Possono invece esistere funzioni suriettive ossia tali che il codominio  $f(A)$  coincida con  $B$ : un esempio può essere la funzione seguente:  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$ ,  $f(3) = c$ ,  $f(4) = c$ . Possono altresì esistere funzioni non suriettive nelle quali qualche elemento di  $B$  non viene coinvolto nella corrispondenza per cui non è immagine di alcun elemento di  $A$ : per esempio nella seguente  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$ ,  $f(3) = b$ ,  $f(4) = b$ , l'elemento  $c$  non è immagine di alcun elemento di  $A$ .

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

La curva di equazione  $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$  è un famiglia di cubiche che rappresenta delle funzioni continue e derivabili in tutto  $\mathbb{R}$ . La derivata prima risulta

$$y' = 3x^2 + 2kx + 3,$$

e la condizione che esista una sola tangente orizzontale implica che l'equazione  $y' = 0$  abbia una sola radice. Poiché il coefficiente del termine quadratico non dipende dal parametro ed è diverso dallo zero, l'unica possibilità dev'essere la coincidenza delle due radici dell'equazione di II grado  $y' = 0$ . Dev'essere pertanto

$$3x^2 + 2kx + 3 = 0 \quad \implies \quad \frac{\Delta}{4} = k^2 - 9 = 0 \quad (1)$$

essendo  $\Delta$  il suo discriminante. La (1) è risolta dalla coppia di valori  $k^2 = 9$ ,  $k = \pm 3$  entrambi accettabili.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

L'affermazione è falsa in quanto la somma degli angoli uscenti da uno stesso vertice delle tre possibili facce sarebbe pari a  $2\pi$  quando invece la condizione per l'esistenza di poliedri regolari è che la somma degli angoli delle facce uscenti da uno stesso vertice (comunque in numero maggiore o uguale a tre) sia minore di  $2\pi$ . Si veda per una trattazione più ampia il quesito 2 dell'esame 2006.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

- Posto  $\alpha = 0/1$ , la definizione di quoziente implica che  $\alpha$  debba rappresentare quel numero tale che sia  $\alpha \cdot 1 = 0$  e questa uguaglianza è soddisfatta unicamente da  $\alpha = 0$ . La prima scrittura possiede pertanto un significato definito.
- Non si può assegnare significato alla scrittura  $1/0$  in quanto si incorre in contraddizione con la proprietà della moltiplicazione. Difatti, supposto ancora  $\alpha = 1/0$ , discenderebbe  $\alpha \cdot 0 = 1$  ma poiché  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  la definizione di moltiplicazione assicura che  $\alpha \cdot 0 = 0$ , si arriverebbe all'assurdo che  $1 = 0$ .
- Supposto ancora  $\alpha = 0/0$  segue che  $\alpha \cdot 0 = 0$ . Ma quest'ultima espressione risulta vera  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  per cui non è possibile assegnare un unico valore alla scrittura  $0/0$ .
- Infine, posto  $\alpha = 0^0$ , per le proprietà delle potenze sempre salvaguardate nei successivi loro ampliamenti verso gli esponenziali, si potrebbe scrivere

$$0^0 = 0^{1-1} = 0^1 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0 \cdot 1}{0} = \frac{0}{0}$$

e in tal modo si ricade in uno dei due casi precedenti,  $1/0$  oppure  $0/0$ . Di conseguenza non si assegna alcun significato pure a  $0^0$ .

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il limite proposto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

conduce ad un caso di indeterminazione del tipo  $\infty/\infty$  in quanto lo studio del numeratore e del denominatore comporta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \sqrt{z} = +\infty \quad \text{con} \quad z = x^2 + 1$$

e, ovviamente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ .

Cerchiamo quindi di riscrivere identicamente la funzione ad argomento del limite fattorizzando un termine  $x^2$  sotto radice

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

e quindi portiamolo a fattore fuori della radice

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Poiché  $x \rightarrow -\infty$  possiamo supporre che sia  $x < 0$  ottenendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Posto

$$t = 1 + \frac{1}{x^2}$$

è pure

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1^+$$

per cui in definitiva

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} -\sqrt{t} = -\sqrt{1} = -1.$$

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Per definizione di coefficiente binomiale, il primo membro dell'identità assegnata

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$$

è

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \quad (1)$$

con  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $n > k$ . Il secondo invece si esplicita in

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!(n-k)}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k)!}. \quad (2)$$

La proprietà del fattoriale permette di riscrivere il prodotto al denominatore di quest'ultima relazione come  $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$  e allo stesso modo scomporre  $(n-k)!$  in  $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$ . Dopo una opportuna semplificazione la relazione (2) diviene

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} &= \frac{n!(n-k)}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k)(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \end{aligned}$$

che evidentemente coincide con il primo membro della (1).

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Posto  $f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$ , notiamo che la funzione è definita per  $x \in \mathbb{R}$  ed è tale che

$$f(-1) = (-1)^{2009} - 2009 + 1 = -1 - 2009 + 1 = -2009 < 0$$

mentre nell'altro estremo di  $[-1, 0]$

$$f(0) = (0)^{2009} - 0 + 1 = 1 > 0.$$

Poiché inoltre  $f(x)$  è una somma di funzioni continue in  $\mathbb{R}$  e quindi in  $[-1, 0]$  è essa stessa continua per cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri (ossia la continuità in un intervallo chiuso  $[a, b]$  e l'assumere agli estremi valori opposti cioè  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ). L'applicazione di questo teorema assicura perciò l'esistenza di almeno un valore  $\alpha \in ]-1, 0[$  tale che  $f(\alpha) = 0$ . In aggiunta, lo studio del segno di  $f'(x)$  implica

$$f'(x) = 2009 \cdot x^{2008} + 2009 = 2009(x^{2008} + 1) > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$  in quanto l'esponente 2008 è pari per cui  $x^{2008} + 1 > 0$ . Ne segue che, per un corollario del teorema di Lagrange, la  $f(x)$  è strettamente crescente in  $[-1, 0]$  e il valore  $\alpha$  che soddisfa all'equazione  $f(\alpha) = 0$  è pertanto unico.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Notiamo innanzitutto che il cilindro ha un'altezza  $r$  pari al raggio di base. Difatti, in riferimento alla fig. 1 dove alla sinistra appare una rappresentazione tridimensionale dei solidi coinvolti mentre nella parte destra si fornisce una sua sezione piana ottenuta con un piano perpendicolare alla base e passante per il vertice del cono, si ha  $\overline{VO} = \overline{VC}$ . Il principio di Cavalieri stabilisce l'equivalenza tra due solidi (cioè l'uguaglianza dei volumi) nell'ipotesi che

*le sezioni determinate da una famiglia di piani paralleli in ciascun solido siano equivalenti (cioè abbiano la medesima area).*

Sia quindi  $\overline{VH} = h$  la distanza dal vertice  $V$  di un piano parallelo alla base comune del cilindro o del cono. In tal modo la sezione del cono è un cerchio di raggio  $\overline{HR}$  (fig. 1) pari a  $\overline{VH} = h$  in quanto  $\triangle VOB$  e  $\triangle VHR$  sono triangoli rettangoli isosceli. L'area di questa sezione è evidentemente  $\pi h^2$ .

La sezione della scodella è invece una corona circolare di raggio esterno  $\overline{HE} = r$  mentre quello interno risulta  $\overline{HF}$  (fig. 1). Quest'ultimo lo si ottiene con il teorema di Pitagora applicato a  $\triangle VHF$  rettangolo in  $H$ ,

$$\overline{HF}^2 = \overline{VF}^2 - \overline{VH}^2 = r^2 - h^2$$

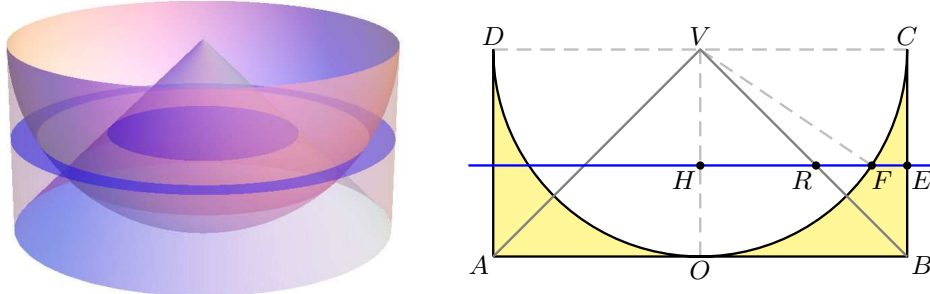


Fig. 1. Rappresentazione della scodella di Galileo e sua sezione piana assiale.

essendo  $\overline{VF} = r$  il raggio della semisfera. L'area è quindi

$$\mathcal{A}(\text{corona}) = \pi r^2 - \pi(r^2 - h^2) = \pi h^2 = \mathcal{A}(\text{cerchio})$$

che coincide con quanto già trovato per la sezione del cono. Per il principio di Cavalieri segue quindi l'equivalenza dei solidi e l'uguaglianza dei volumi.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Una funzione reale  $f$  di variabile reale  $x$  nel dominio  $D$ , si dice periodica se e solo se esiste un valore  $T \neq 0$  in corrispondenza del quale vale l'identità

$$f(x + kT) = f(x) \quad \forall x \in D \wedge k \in \mathbb{Z}.$$

Applicando tale definizione alla funzione assegnata  $f(x) = \cos 5x$ , discende che l'uguaglianza

$$\cos 5(x + kT) = \cos 5x$$

deve valere per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ossia

$$\cos(5x + 5kT) = \cos 5x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poiché la funzione coseno soddisfa all'identità  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$  e che ne stabilisce il periodo in  $2\pi$ , possiamo dedurre

$$5kT = 2k\pi \quad \text{da cui} \quad T = \frac{2\pi}{5}.$$

La periodicità richiesta è quindi  $T = 2\pi/5$ .

# ESAME 2009 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Sia  $f$  la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$$

dove  $n$  è un intero positivo e  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Si verifichi che la derivata di  $f(x)$  è  $f'(x) = -\frac{x^2}{n!}e^{-x}$ .
2. Si dica se la funzione  $f$  ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando  $n$  è dispari,  $f(x) \leq 1$  per ogni  $x$  reale.
3. Si studi la funzione  $g$  ottenuta da  $f$  quando  $n = 2$  e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli  $\int_0^2 g(x) dx$  e se ne dia l'interpretazione geometrica.

Soluzione

## • Problema n. 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ , si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^3 + kx$ , con  $k$  parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di  $f$  al variare di  $k$  ( $k$  positivo, negativo o nullo).
2. Sia  $g(x) = x^3$  e  $\gamma$  il suo grafico. Si dimostri che  $\gamma$  e la retta d'equazione  $y = 1 - x$  hanno un solo punto  $P$  in comune. Si determini l'ascissa di  $P$  approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia  $\mathbf{D}$  la regione finita del primo quadrante delimitata da  $\gamma$  e dal grafico della funzione inversa di  $g$ . Si calcoli l'area di  $\mathbf{D}$ .
4. La regione  $\mathbf{D}$  è la base di un solido  $\mathbf{W}$  le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di  $\mathbf{W}$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Siano:  $0 < a < b$  e  $x \in [-b, b]$ . Si provi che:  $\int_{-b}^b |x - a| dx = a^2 + b^2$ .

Soluzione

2. Sono dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di  $A$  in  $B$ , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

Soluzione

3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).

Soluzione

4. “Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni”. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0.$$

a quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

Soluzione

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione  $\sin x = 0$ , con punto iniziale  $x_0 = 3$ . Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

Soluzione

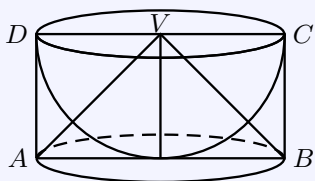
7. Si dimostri l'identità  $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$  con  $n$  e  $k$  naturali e  $n > k$ .

Soluzione

8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

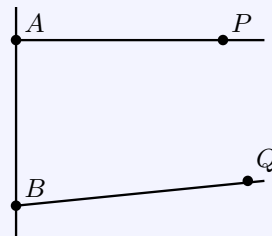
Soluzione

9. Nei “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*”, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio  $r$  e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice  $V$  in figura.



Soluzione

10. “Se due punti  $P$  e  $Q$  del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta  $AB$  e gli angoli  $\widehat{PAB}$  e  $\widehat{QBA}$  hanno somma minore di  $180^\circ$ , allora le semirette  $AP$  e  $BQ$ , prolungate adeguatamente al di là dei punti  $P$  e  $Q$ , si devono intersecare”. Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



Soluzione

### Problema n. 1: soluzione. (testo del problema)

1. Data la funzione

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} \quad n \in \mathbb{N}_0 \wedge x \in \mathbb{R},$$

la verifica richiesta si ottiene procedendo alla derivazione di  $f(x)$  utilizzando le

regole della derivazione del prodotto di funzioni e della somma

$$f'(x) = \left(0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots + \frac{(n-1)x^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right)e^{-x} + (-e^{-x})\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right):$$

raccogliendo il fattore  $e^{-x}$  si ha

$$f'(x) = e^{-x} \left[ 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \right. \\ \left. - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!} \right]$$

dove si è utilizzata la proprietà del fattoriale che stabilisce  $n! = n \cdot (n-1)!$ . Eliminando i termini opposti rimane l'espressione

$$f'(x) = e^{-x} \left( -\frac{x^n}{n!} \right) = -\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x}$$

che conferma quanto richiesto.

2. Supponendo  $n$  pari, determiniamo i limiti di  $f(x)$  agli estremi del dominio  $\mathbb{R}$ . Nel caso che sia  $x \rightarrow +\infty$ , portato a denominatore il termine esponenziale, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n!}{e^x} \quad (1)$$

risulta manifestamente indeterminato. Procedendo allo studio del limite del rapporto delle derivate delle funzioni a numeratore e denominatore di (1), il grado del primo si abbassa di una unità mentre l'esponenziale a denominatore rimane inalterato. Pertanto al primo tentativo si avrà

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0 + 1 + x + \dots + x^{n-1}/(n-1)!}{e^x}$$

che ancora risulta indeterminato mentre, dopo  $n$  derivazioni, si arriverà al limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}.$$

Poiché per questo vale  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/e^x = 0$  in quanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , si potrà applicare il teorema di De L'Hôpital per  $n$  volte giungendo alla determinazione del limite originario ossia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Per  $x \rightarrow -\infty$  il limite di  $f(x)$  non presenta indeterminazioni: difatti essendo  $n$  pari

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left( \frac{1}{x^n} + \dots + \frac{1}{(n-1)!x} + \frac{1}{n!} \right) = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty : \quad \text{poiché risulta pure} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Quest'ultimo risultato permette di escludere l'esistenza di un massimo assoluto per la  $f(x)$ .

Poiché inoltre

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} \geq 0$$

è soddisfatta solo per  $x = 0$  mentre  $\forall x \neq 0$ ,  $f'(x) < 0$ , la  $f(x)$  appare monotona strettamente decrescente e con un flesso orizzontale in  $x = 0$  cosicché non può ammettere massimi e minimi relativi. D'altronde la  $f$  non possiede minimo assoluto in quanto la monotonia decrescente con  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  assieme alla continuità in  $\mathbb{R}$ , implica che sia  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

Se  $n$  è dispari, per mezzo delle **medesime** osservazioni, la funzione si dimostra infinitesima quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , mentre si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

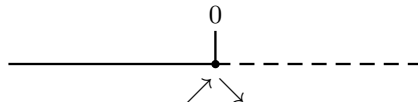
in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left[ \frac{1}{x^n} + \dots + \frac{1}{(n-1)!x} + \frac{1}{n!} \right] = -\infty$$

e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ . Inoltre lo studio del segno della derivata prima fornisce

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} \geq 0 \quad \implies \quad -x^n \geq 0$$

cioè  $x^n \leq 0$  risolta da  $x \leq 0$  ( $n$  dispari). La funzione presenta quindi in corrispondenza di  $x = 0$  un punto di massimo assoluto (fig. 1) dove assume il valore  $f(0) = 1 \cdot e^{-0} = 1$ . Ne segue che  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq 1$  come richiesto.



**Fig. 1.** Segno di  $f'(x)$  con  $n$  dispari.

3. Se  $n = 2$  la funzione  $g$  che ne deriva possiede equazione

$$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)e^{-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}.$$

Il suo segno dipende dal fattore

$$1 + x + \frac{x^2}{2} > 0 \quad \implies \quad x^2 + 2x + 2 > 0$$

disequazione sempre soddisfatta in quanto il discriminante dell'equazione associata è  $\Delta/4 = 1 - 2 < 0$ .

Come già detto, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + x^2/2}{e^x}$$

appare indeterminato per cui lo si studia determinando il limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x}{e^x}.$$

Allo stesso modo quest'ultimo si riporta al limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

e poiché tale limite esiste, le ipotesi del teorema di De L'Hôpital appaiono soddisfatte. La sua applicazione permette di risalire a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x}{e^x} = 0$$

e, riapplicando il medesimo teorema per una seconda volta, si ha pure

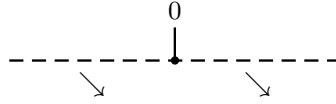
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

risultato atteso se si tiene presente la discussione già svolta nel punto 2. Poiché i due fattori che compongono la  $g(x)$  per  $x \rightarrow -\infty$  hanno limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$



**Fig. 2.** Segno di  $g'(x)$ .

risulta pure

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

e tale funzione non potrà presentare asintoti in quanto è pure

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} \right) e^{-x} = -\infty.$$

La derivata prima

$$g'(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} < 0, \quad \implies \quad \forall x \neq 0,$$

mentre è  $g'(0) = 0$  (fig. 2).

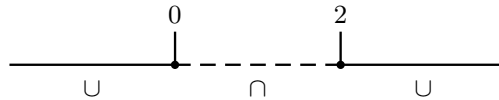
La derivata seconda risulta

$$g''(x) = -\frac{1}{2} (2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x}) = \frac{1}{2} e^{-x} (x^2 - 2x)$$

e lo studio del suo segno  $g''(x) \geq 0$  implica

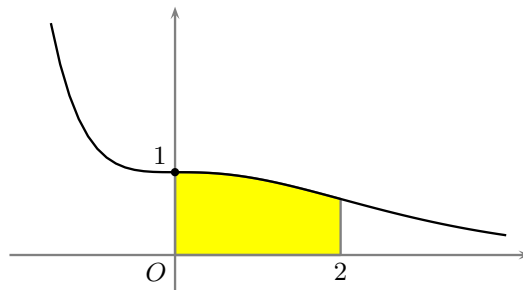
$$(x - 2)x \geq 0 \quad \implies \quad x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 2.$$

Per questi valori la funzione è convessa (fig. 3).



**Fig. 3.** Segno di  $g''(x)$ .

In particolare il punto di ascissa nulla è un punto di flesso orizzontale (si veda la discussione precedente) mentre  $x = 2$  è punto di inflessione obliquo. Il grafico di  $g$  è infine rappresentato dalla fig. 4.



**Fig. 4.** Grafico di  $g(x)$ .

4. L'interpretazione geometrica dell'integrale definito

$$\int_0^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx$$

è immediata rappresentando tale valore la misura dell'area della regione finita (trapezoide) compresa tra le rette  $x = 0$ ,  $x = 2$ , l'asse delle ascisse e il grafico di  $g$  (fig. 4). Per il suo calcolo va risolto l'integrale indefinito

$$\int \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx.$$

Notato che  $\int e^{-x} dx$  si può risolvere con una sostituzione del tipo

$$\int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -\int e^t dt = -e^{-x} + c,$$

possiamo procedere con il metodo per parti considerando  $e^{-x}$  come fattore finito. In tal caso

$$\begin{aligned} \int \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx &= (-e^{-x}) \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \int (-e^{-x})(1 + x) dx \\ &= -e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \int e^{-x}(1 + x) dx. \end{aligned}$$

Procedendo ancora per parti con l'integrale rimasto

$$\begin{aligned} \int e^{-x}(1 + x) dx &= (-e^{-x})(1 + x) - \int (-e^{-x}) dx \\ &= -e^{-x}(1 + x) - e^{-x} \\ &= e^{-x}(-1 - x - 1) \\ &= e^{-x}(-x - 2), \end{aligned}$$

l'integrale originario risulta

$$\begin{aligned} \int \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx &= -e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + e^{-x}(-x - 2) \\ &= e^{-x} \left(-3 - 2x - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

per cui, passando al calcolo dell'integrale definito, abbiamo in definitiva

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx &= \left[ e^{-x} \left(-3 - 2x - \frac{x^2}{2}\right) \right]_0^2 \\ &= e^{-2} \left(-3 - 4 - \frac{4}{2}\right) - 1 \cdot (-3) \\ &= e^{-2}(-9) + 3 = 3 - \frac{9}{e^2} \approx 1,7820. \end{aligned}$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1. La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita dall'equazione

$$y = f(x) = x^3 + kx, \quad k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

è rappresentativa di un fascio o famiglia di parabole cubiche avente alcune caratteristiche in comune. Una prima proprietà generale si ottiene osservando la validità in  $\mathbb{R}$  dell'identità

$$f(-x) = (-x)^3 + k(-x) = -x^3 - kx = -f(x)$$

a seguito della quale  $f$  risulta una funzione dispari con un grafico simmetrico rispetto all'origine  $O$  del sistema  $Oxy$ . Una seconda proprietà riguarda i punti fissi di tale fascio: difatti riscritta l'equazione (1) nella forma

$$(x^3 - y) + kx = 0,$$

le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

individuano i punti fissi del grafico di  $f$  e cioè quei punti che appartengono a qualsiasi curva del fascio e le cui coordinate non dipendono dai valori del parametro. L'unica soluzione fornita dal sistema è comunque l'origine  $O(0, 0)$  per cui tutte le curve rappresentate dovranno passare per tale punto.

a) Studiamo quindi i casi suggeriti dal testo a partire da  $k = 0$ . Ne segue che l'equazione di  $f$  risulta  $f(x) = x^3$  e questa rappresenta una parabola cubica standard le cui caratteristiche sono conosciute. In particolare poiché i limiti agli estremi di  $\mathbb{R}$  e la derivata prima risultano rispettivamente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty, \quad f'(x) = 3x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0$$

nonché  $f''(x) = 6x \geq 0$  quando  $x \geq 0$ , il suo grafico è riassunto nella fig. 1.

b) Se  $k > 0$  il segno di  $f$  dipende dal solo fattore  $x$  in

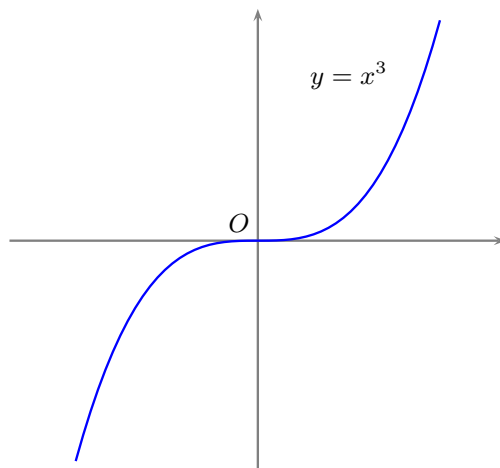
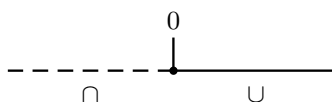
$$f(x) = x^3 + kx = x(x^2 + k) \geq 0 \quad \implies \quad x \geq 0.$$

Per i limiti agli estremi del dominio si ha ancora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + kx = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( 1 + \frac{k}{x^2} \right) = \pm\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{k}{x^2} = 1.$$

Fig. 1. Grafico di  $y = x^3$ .Fig. 2. Segno di  $f''(x)$  con  $k > 0$ .

Il grafico non può presentare asintoti obliqui per la divergenza del limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left( 1 + \frac{k}{x^2} \right) = +\infty.$$

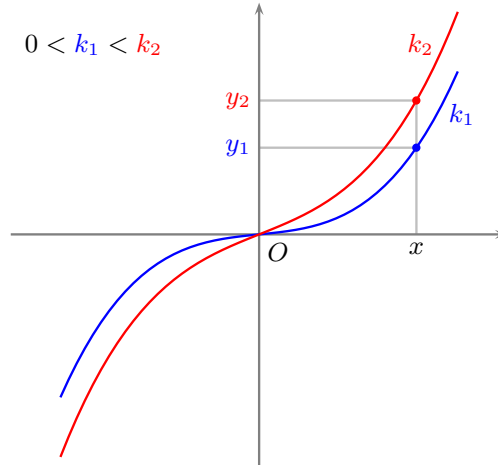
Poiché inoltre  $f'(x) = 3x^2 + k > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  è una funzione monotona strettamente crescente. Dato che  $f''(x) = 6x \geq 0$  se  $x \geq 0$  (fig. 2) il grafico di  $f$  risulta concavo per valori negativi di  $x$  mentre è convesso se  $x > 0$ . In  $x = 0$  cioè nell'origine  $O$ ,  $f$  presenta un flesso obliquo.

Supposto infine di disporre di due valori del parametro tali che  $0 < k_1 < k_2$  i grafici corrispondenti sono disposti come in figura 3 in quanto il confronto tra i valori  $y_1 = x^3 + k_1x$  e  $y_2 = x^3 + k_2x$ , interpretati come ordinate di punti su due distinte curve relativi alla medesima  $x$  implica che sia

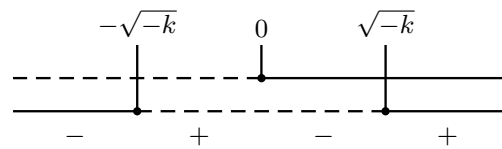
$$x^3 + k_2x > x^3 + k_1x \implies k_2x > k_1x \implies (k_2 - k_1)x > 0$$

da cui  $x > 0$ .

c) Se  $k < 0$  i limiti all'infinito sono analoghi a quelli **trattati** per  $k > 0$  e pertanto  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ . Il segno invece cambia in quanto  $f(x) = x(x^2 + k) \geq 0$  implica lo studio dei fattori  $x \geq 0$  e di  $x^2 + k \geq 0$ . Quest'ultima diviene  $x^2 \geq -k$



**Fig. 3.** Grafici di  $y = x^3 + kx$  con  $k > 0$ .



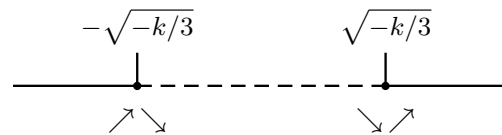
**Fig. 4.** Segno di  $f(x)$  con  $k < 0$ .

ed è risolta nell'insieme  $x \leq -\sqrt{-k} \vee x \geq \sqrt{-k}$ . Combinandoli (fig. 4), discende che  $f(x) \geq 0$  se  $-\sqrt{-k} \leq x \leq 0$  oppure  $x \geq \sqrt{-k}$ .

Passando alla derivata prima si deduce

$$f'(x) = 3x^2 + k \implies x^2 \geq -\frac{k}{3} \implies x \leq -\sqrt{\frac{-k}{3}} \vee x \geq \sqrt{\frac{-k}{3}},$$

come evidenziato in fig. 5.



**Fig. 5.** Segno di  $f'(x)$  con  $k < 0$ .

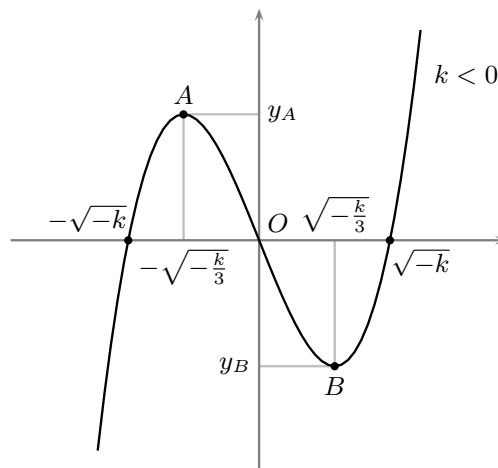
La funzione presenta quindi un massimo relativo proprio nel punto

$$A\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}}, f\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)\right) \quad \text{con} \quad f\left(\pm\sqrt{\frac{-k}{3}}\right) = \frac{\pm 2k\sqrt{-k}}{3\sqrt{3}}$$

mentre il minimo è raggiunto in

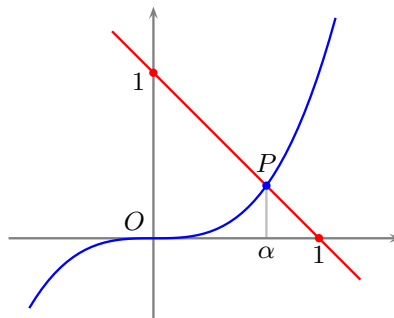
$$B\left(\sqrt{\frac{-k}{3}}, f\left(\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)\right).$$

Il grafico è invece rappresentato dalla figura 6.



**Fig. 6.** Grafico di  $f(x) = x^3 + kx$  con  $k < 0$ .

2. I grafici della cubica  $g(x) = x^3$  e della retta  $r: y = 1 - x$  sono immediati e la figura 7 mostra con evidenza che questi dovranno intersecarsi in un unico punto  $P$  avente ascissa  $\alpha \in ]0, 1[$  in quanto  $r$  interseca l'asse delle  $x$  in un punto di ascissa 1. La dimostrazione di ciò si può ottenere definendo la funzione  $h(x) = g(x) - (1 - x) = x^3 + x - 1$ .



**Fig. 7.** Grafico di  $y = x^3$  e di  $y = 1 - x$ .

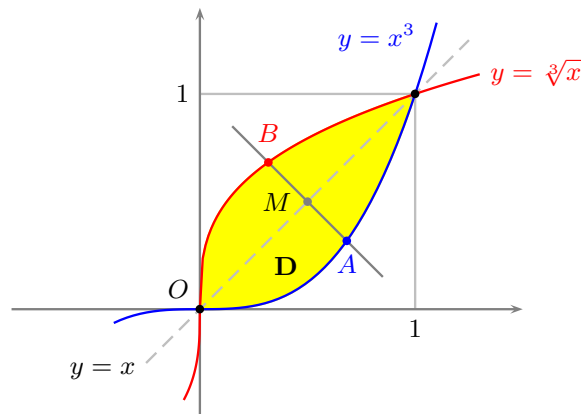
Poiché risulta  $h(0) = -1$  e  $h(1) = 2 - 1 = 1$ , il teorema degli zeri applicato alla funzione continua  $h$  assicura l'esistenza di almeno un valore  $\alpha \in ]0, 1[$  dove  $h(\alpha) =$

0 ossia dove  $g(\alpha) = 1 - \alpha$ . D'altra parte la derivata prima è  $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$   $\forall x \in \mathbb{R}$  e quindi pure in  $[0, 1]$  per cui la funzione  $h$  è monotona strettamente crescente in tale intervallo e ciò permette di concludere che il valore  $\alpha$  sia unico. Isolata la radice, applichiamo il metodo di bisezione a partire dall'intervallo  $[0, 1]$  calcolando inizialmente la funzione  $f$  nel punto medio  $x_M = 0,5$ : si trova  $f(x_M) = -0,375 < 0$  per cui potremo ridurre l'insieme cui  $\alpha$  appartiene all'intervallo  $[0,5, 1]$ . Procedendo secondo questo schema si ottengono via via i valori dati nella tabella seguente e dalla quale si può osservare che, a meno di 0,1, debba essere  $\alpha \approx 0,6$  in quanto dalla quinta iterazione la prima cifra decimale appare definita.

$n$	$a$	$b$	$x_M$	$h(x_M)$
1	0	1	0,5	-0,375
2	0,5	1	0,75	0,17187
3	0,5	0,75	0,625	-0,130859
4	0,625	0,75	0,6875	0,0124512
5	0,625	0,6875	0,65625	-0,0611267

Un'approssimazione migliore risulta  $\alpha \approx 0,6823$ .

3. L'inversa della  $g(x) = x^3$  è evidentemente  $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  e i loro punti di intersezione coincidono con l'intersezione di  $g$  con la retta di equazione  $y = x$ , asse della simmetria che lega i grafici di  $g$  e  $g^{-1}$ . Ne segue l'equazione  $x^3 = x$  risolta da  $x = 0$  e  $x = \pm 1$ . Pertanto la regione **D** del I quadrante è quella rappresentata in fig. 8 e compresa tra l'origine del sistema cartesiano ed il punto  $(1, 1)$ .



**Fig. 8.** Grafico di  $y = x^3$  e di  $y = \sqrt[3]{x}$  e regione **D**.

L'area si ottiene dal calcolo dell'integrale

$$\mathcal{A}(\mathbf{D}) = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx$$

dove il fattore 2 è dovuto alla simmetria della regione **D** rispetto alla bisettrice. Si ottiene quindi

$$\mathcal{A}(\mathbf{D}) = 2 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[ x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. Per determinare l'area massima delle sezioni ottenute con piani perpendicolari alla bisettrice è sufficiente determinare il valore massimo raggiunto dal segmento  $\overline{AB} = 2\overline{AM}$  (fig. 8), base dei rettangoli sezione e ciò in quanto le altezze di tali rettangoli sono tutte uguali. Si tratta quindi di determinare la distanza massima del punto di  $g$ ,  $A(x, x^3)$ , dalla bisettrice  $y = x$ . La distanza di un punto  $(x_0, y_0)$  dalla retta di equazione  $y = mx + q$  è

$$d = \frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

per cui la funzione distanza  $d$  dal punto  $A$  è

$$d = \frac{|x^3 - (x)|}{\sqrt{1 + 1^2}} = \overline{AM} \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

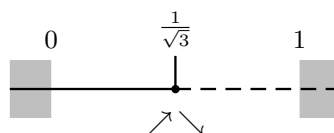
L'ultima condizione permette di valutare il segno dell'argomento del valore assoluto che risulta  $x^3 - x = x(x^2 - 1) < 0$ : la funzione distanza può quindi assumere una forma algebrica più semplice quale

$$d = \frac{-x^3 + x}{\sqrt{2}}.$$

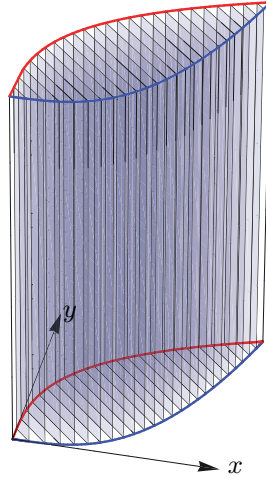
La sua derivata prima è

$$d' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 3x^2) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - 3x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \leq \frac{1}{3},$$

e il suo segno è positivo quando  $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  (fig. 9).



**Fig. 9.** Segno di  $d'$ .



**Fig. 10.** Alcune sezioni del solido  $\mathbf{W}$  (non in scala).

La sezione di area massima si ha in corrispondenza del punto

$$A_{max}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{(\sqrt{3})^3}\right) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

e la sua distanza massima dalla bisettrice è

$$\overline{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{6}}.$$

Ne segue che l'area cercata è

$$\mathcal{A}(\text{sezione max}) = 12 \cdot 2\overline{AM} = 24 \cdot \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{16}{\sqrt{6}} \approx 6,5320.$$

Poiché il solido (che si può classificare come un cilindroide, fig. 10) lo si può considerare equivalente ad un prisma avente la base equivalente alla regione  $\mathbf{D}$  e con la medesima altezza, il volume richiesto sarà espresso dalla formula  $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cdot h$  con  $\mathcal{A}$  area di base e  $h$  altezza del solido. Ne segue quindi

$$\mathcal{V}(\mathbf{W}) = \mathcal{A}(\mathbf{D}) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Si tratta di dimostrare che

$$\int_{-b}^b |x - a| dx = a^2 + b^2 \quad 0 < a < b \wedge x \in [-b, b]. \quad (1)$$

Poiché la funzione integranda si può suddividere come

$$|x - a| = \begin{cases} x - a, & \text{se } x - a \geq 0, \text{ ossia } x \geq a \\ -(x - a) = -x + a, & \text{se } x - a < 0, \text{ ossia } x < a, \end{cases} \quad (2)$$

l'integrale (1) si spezza per la proprietà additiva in

$$\int_{-b}^b |x - a| dx = \int_{-b}^a -(x - a) dx + \int_a^b (x - a) dx \quad (3)$$

essendo nel primo addendo la  $x < a$  e nel secondo  $x \geq a$ . Il calcolo di ciascun addendo comporta i risultati

$$\begin{aligned} -\int_{-b}^a (x - a) dx &= -\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_{-b}^a \\ &= -\left(\frac{a^2}{2} - a^2\right) + \left(\frac{b^2}{2} + ab\right) \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \int_a^b (x - a) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b \\ &= \left(\frac{b^2}{2} - ab\right) - \left(\frac{a^2}{2} - a^2\right) \\ &= \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - ab, \end{aligned}$$

per cui la (3) fornisce

$$\int_{-b}^b |x - a| dx = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab\right) + \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - ab\right) = a^2 + b^2$$

che costituisce il risultato atteso.

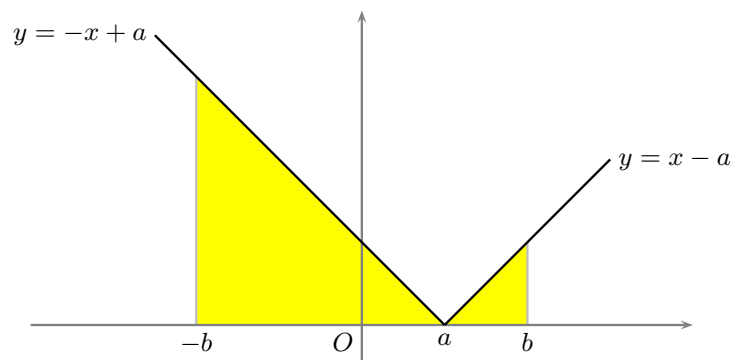


Fig. 1. Trapezoide.

L'interpretazione geometrica su un piano cartesiano  $Oxy$  si ottiene riportando il grafico della funzione integranda  $y = |x - a|$  (di equazioni (2)) e che consiste in una spezzata formata dalle semirette  $y = x - a$  e  $y = -x + a$  (fig. 1). L'integrale dà l'area della regione evidenziata e questa può ottenersi pure come somma delle aree dei due triangoli rettangoli isosceli aventi i cateti rispettivamente di lunghezza  $b - a$  e  $a - (-b) = a + b$ . L'area quindi discende semplicemente dalla

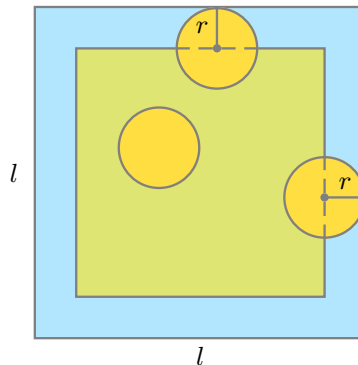
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}(b - a)(b - a) + \frac{1}{2}(a + b)(a + b) \\ &= \frac{1}{2}(b^2 + a^2 - 2ab) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2ab) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 2.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Poiché il pavimento è ricoperto da mattonelle tutte uguali, la probabilità  $p$  richiesta si può ottenere come rapporto tra le aree della regione interna di una mattonella permessa dalle condizioni del quesito e l'area totale di una mattonella.



**Fig. 1.** Mattonella quadrata e posizioni moneta.

Affinché la moneta non si disponga sopra i lati della mattonella stessa, posto  $d = 2r$  il diametro della moneta,  $d = 25,75 \text{ mm} = 2,575 \text{ cm}$  e  $l = 10 \text{ cm}$ , la regione permessa è a sua volta un quadrato di lato  $l - 2r = l - d$  (in verde chiaro nella fig. 1), in quanto il centro delle monete deve cadere ad una distanza dai lati superiore a  $r$ . Utilizzando la definizione classica di probabilità

$$p = \frac{\text{Area permessa}}{\text{Area totale}} = \frac{(l - d)^2}{l^2}$$

si ottiene

$$p = \frac{(10 - 2,575)^2}{10^2} \approx 0,5513.$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 4.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

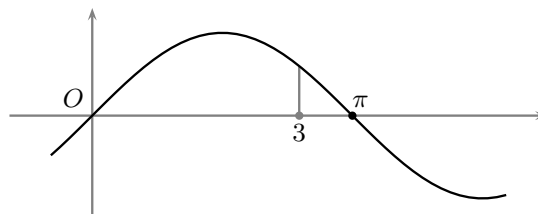
Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 5.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il procedimento di Newton o delle tangenti per determinare numericamente la soluzione dell'equazione  $f(x) = 0$  consiste nell'iterazione della funzione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a partire da un punto  $x_0$  prossimo alla radice cercata. Poiché  $x_0 = 3$  e  $f(x) = \sin x$ , tale metodo dovrà convergere necessariamente al valore  $\pi$ , essendo  $\pi$  il valore più prossimo a 3 (fig. 1) e risultando pure  $\sin(\pi) = 0$ .



**Fig. 1.** Funzione seno e punto iniziale del metodo di Newton (non in scala).

Posto quindi  $x_0 = 3$  e notato che  $f'(x) = \cos x$  si ottiene nella prima iterazione

$$x_1 = 3 - \frac{\sin 3}{\cos 3} = 3 - \operatorname{tg} 3 \approx 3,14255,$$

mentre la seconda fornisce

$$x_2 = 3,14255 - \frac{\sin(3,14255)}{\cos(3,14255)} \approx 3,14159.$$

Appare ora evidente come, dopo solo due iterazioni, si ottenga il valore aspettato con una approssimazione che differisce da  $\pi$  per un valore inferiore a  $3 \times 10^{-6}$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 7.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $u$  il numero degli uomini ed  $e_i$ , con  $i \in [1, u]$ , l'età di ciascun uomo. Analogamente con  $d$  indichiamo il numero delle donne e  $f_i$  ( $i \in [1, d]$ ) l'età di ciascuna donna. In base ai dati del problema e per la definizione di media aritmetica potremo scrivere

$$26 = \frac{\sum_{i=1}^u e_i}{u}, \quad 19 = \frac{\sum_{i=1}^d f_i}{d}. \quad (1)$$

D'altra parte è pure

$$22 = \frac{\sum_{i=1}^u e_i + \sum_{i=1}^d f_i}{u + d} \quad (2)$$

per cui, ricavando la somma delle età dei due gruppi dalle prime due di (1)

$$\sum_{i=1}^u e_i = 26 \cdot u, \quad \sum_{i=1}^d f_i = 19 \cdot d$$

e sostituendole nella (2), si ottiene

$$22 = \frac{26u + 19d}{u + d}.$$

Da questa discende facilmente il rapporto richiesto

$$22u + 22d = 26u + 19d \quad \implies \quad 3d = 4u$$

e quindi  $u/d = 3/4$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 9.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

La proposizione è una conseguenza della accettazione del V Postulato della geometria euclidea. Questo afferma che, per un punto esterno ad una retta passa un'unica retta parallela alla data ed è stato oggetto di intense discussioni in quanto si riteneva di poterlo dedurre come teorema dai precedenti quattro postulati.

Il fallimento di tali tentativi (in particolare dell'italiano Giovanni Girolamo Saccheri) condusse alla consapevolezza della sua indipendenza e quindi, assumendo come postulato una sua negazione, si poterono costruire delle nuove geometrie, le "geometrie non euclidee". In particolare J. Bolyai e N. Lobacevskij assunsero come postulato che per un punto esterno ad una data retta passino almeno due rette distinte e parallele ad una data. In tal modo costruirono la *geometria iperbolica*. B. Riemann invece assume che per un punto esterno non passi alcuna retta parallela e in tal modo fondò la *geometria ellittica*. Si veda pure il quesito 7 dell'esame 2008 PNI per altre note su tale argomento.

# ESAME 2010

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Sia  $ABCD$  un quadrato di lato 1,  $P$  un punto di  $AB$  e  $\gamma$  la circonferenza di centro  $P$  e raggio  $AP$ . Si prenda sul lato  $BC$  un punto  $Q$  in modo che sia il centro di una circonferenza  $\lambda$  passante per  $C$  e tangente esternamente a  $\gamma$ .

1. Se  $AP = x$ , si provi che il raggio di  $\lambda$  in funzione di  $x$  è dato da  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ .
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate  $Oxy$ , si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad  $x$  dal problema geometrico, il grafico di  $f(x)$ . La funzione  $f(x)$  è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia  $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di  $g(x)$  nel punto  $R(0,1)$ ? E nel punto  $S(1,0)$ ? Cosa si può dire della tangente al grafico di  $g(x)$  nel punto  $S$ ?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo  $ROS$ , ove l'arco  $RS$  appartiene al grafico di  $f(x)$  o, indifferentemente, di  $g(x)$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane  $Oxy$ , si consideri la funzione  $f$  definita da  $f(x) = b^x$  ( $b > 0$ ,  $b \neq 1$ ).

1. Sia  $G_b$  il grafico di  $f(x)$  relativo ad un assegnato valore di  $b$ . Si illustri come varia  $G_b$  al variare di  $b$ .
2. Sia  $P$  un punto di  $G_b$ . La tangente a  $G_b$  in  $P$  e la parallela per  $P$  all'asse  $y$  intersecano l'asse  $x$  rispettivamente in  $A$  e in  $B$ . Si dimostri che, qualsiasi sia  $P$ , il segmento  $AB$  ha lunghezza costante. Per quali valori di  $b$  la lunghezza di  $AB$  è uguale a 1?

3. Sia  $r$  la retta passante per  $O$  tangente a  $G_e$  ( $e =$  numero di Nepero). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta  $r$  forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse  $y$ , da  $G_e$  e dalla retta d'equazione  $y = e$ .

Soluzione

### Questionario

1. Sia  $p(x)$  un polinomio di grado  $n$ . Si dimostri che la sua derivata  $n$ -esima è  $p^{(n)}(x) = n!a_n$  dove  $a_n$  è il coefficiente di  $x^n$ .

Soluzione

2. Siano  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ ,  $r$  la retta perpendicolare in  $B$  al piano del triangolo e  $P$  un punto di  $r$  distinto da  $B$ . Si dimostri che i tre triangoli  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  sono triangoli rettangoli.

Soluzione

3. Sia  $\gamma$  il grafico di  $f(x) = e^{3x} + 1$ . Per quale valore di  $x$  la retta tangente a  $\gamma$  in  $(x, f(x))$  ha pendenza uguale a 2?

Soluzione

4. Si calcoli:  $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .

Soluzione

5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Soluzione

6. Si determini il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ .

Soluzione

7. Per quale o quali valori di  $k$  la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in  $x = 4$ ?

Soluzione

8. Se  $n > 3$  e  $\binom{n}{n-1}$ ,  $\binom{n}{n-2}$ ,  $\binom{n}{n-3}$  sono in progressione aritmetica, qual è il valore di  $n$ ?

Soluzione

9. Si provi che non esiste un triangolo  $ABC$  con  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ . Si provi altresì che se  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ , allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

Soluzione

10. Si consideri la regione limitata da  $y = \sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 4$  e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse  $y$ .

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Il punto  $P$  appartiene al lato  $AB$  del quadrato con lati di lunghezza unitaria  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 1$  (fig. 1). Posto  $\overline{AP} = x$  tale variabile deve soddisfare alle condizioni  $0 \leq x \leq 1$  mentre, detto  $F$  il punto di tangenza tra le circonferenze  $\gamma$  e  $\lambda$  ed  $r$  il raggio incognito di  $\lambda$ , si ha  $r = \overline{CE} = \overline{EF}$ .

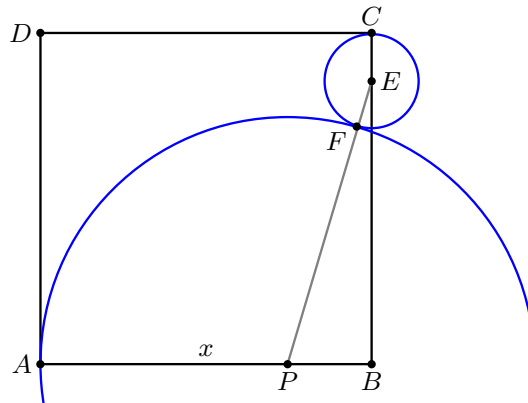
Il triangolo  $PBE$  è rettangolo in  $B$  per cui il teorema di Pitagora fornisce la relazione tra i suoi lati

$$\overline{PE}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BE}^2 \quad (1)$$

che dovremo esplicitare in termini di  $x$  ed  $r$ . Difatti, essendo  $\overline{PF} = \overline{AP}$  risulta

$$\overline{PE} = \overline{PF} + \overline{EF} = \overline{AP} + \overline{EF} = x + r$$

mentre  $\overline{PB} = \overline{AB} - \overline{AP} = 1 - x$  e  $\overline{BE} = \overline{BC} - \overline{CE} = 1 - r$ .



**Fig. 1.** Quadrato e circonferenze tangenti.

Sostituendo questi risultati nella (1) si ha

$$(x + r)^2 = (1 - x)^2 + (1 - r)^2,$$

sviluppando i quadrati e ridotti i termini simili

$$\begin{aligned} x^2 + r^2 + 2rx &= 1 + x^2 - 2x + 1 + r^2 - 2r \\ 2rx + 2r &= 2 - 2x \\ 2r(x + 1) &= 2(1 - x) \end{aligned}$$

da cui infine

$$r = \frac{1 - x}{x + 1} \quad \text{con } x + 1 \neq 0,$$

condizione che, per la positività di  $x$ , è comunque certamente soddisfatta.

2. Dato che il testo chiede di studiare la funzione ottenuta indipendentemente dalle condizioni geometriche si tratta di ottenere il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x} \tag{2}$$

con l'unica condizione  $x + 1 \neq 0$  cioè  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ . Tale funzione è comunque conosciuta in quanto rientra nell'ambito delle funzioni omografiche

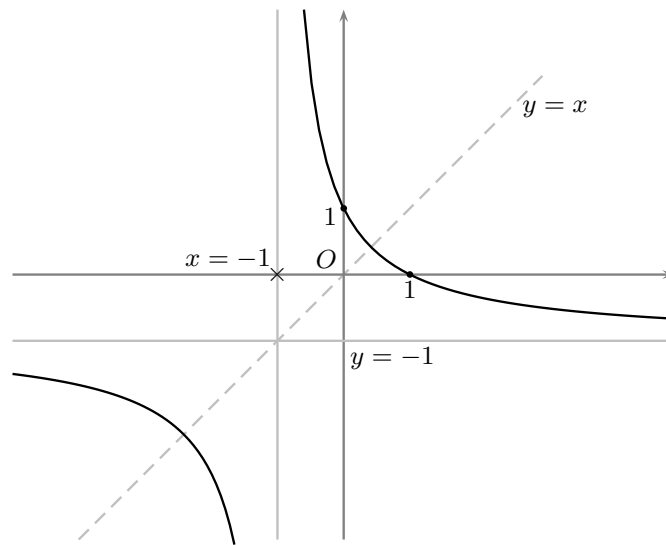
$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{3}$$

che si ottengono per traslazione di una iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Il grafico di  $f$  è pertanto un'iperbole equilatera e lo si può determinare non appena siano noti gli asintoti di  $f$  ed un suo punto. Con riferimento alla forma

generale (3) l'asintoto orizzontale ha equazione  $y = a/c$  mentre quello verticale si ottiene dalla condizione  $cx + d = 0$  che implica  $x = -d/c$ . Nel caso di  $f$  si ha, rispettivamente  $y = -1/1 = -1$  e  $x = -1$ . Poiché

$$f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

e, notato pure che  $f$  interseca l'asse delle  $x$  del sistema  $Oxy$  in  $x = 1$ , il grafico ne discende immediatamente (fig. 2).



**Fig. 2.** Grafico della funzione  $f(x) = (1-x)/(1+x)$ .

Affinché una funzione  $f: A \rightarrow B$  sia invertibile deve essere sia suriettiva che iniettiva: nel primo caso, poiché l'insieme  $B$  “di arrivo” non è stato definito esplicitamente lo si suppone coincidente con il codominio che per la funzione assegnata coincide con il dominio ossia  $A = B = \mathbb{R} - \{-1\}$ . Dimostriamo invece l'iniettività rifacendoci alla definizione stessa

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

o, più facilmente, alla sua contronominale

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Supposto quindi  $x_1, x_2 \in A$  si ha

$$f(x_1) = f(x_2) \implies \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} :$$

moltiplicando entrambi i membri per il denominatore comune  $(1+x_1)(1+x_2) \neq 0$  discende

$$\begin{aligned}(1-x_1)(1+x_2) &= (1-x_2)(1+x_1) \\ 1+x_2-x_1-x_1x_2 &= 1+x_1-x_2-x_1x_2\end{aligned}$$

per cui, dopo un facile riarrangiamento dei termini, si giunge a  $2x_2 = 2x_1$  ed infine  $x_2 = x_1$ . Essendo ciò valido  $\forall x_1, x_2 \in A$  la funzione  $f$  risulta iniettiva e suriettiva: è pertanto invertibile e il grafico della sua inversa  $f^{-1}$  si ottiene da quello studiato con una simmetria assiale di asse  $y = x$ . Poiché comunque il grafico di  $f$  è quello di un'iperbole equilatera e quest'ultima è simmetrica rispetto all'asse focale, asse che coincide nel nostro caso con la retta di equazione  $y = x$ , il grafico di  $f^{-1}$  coincide con il grafico di  $f$  rappresentato nella fig. 2.

Volendo invece ricavare esplicitamente  $x = f^{-1}(y)$  dobbiamo risolvere l'equazione (2) una volta che si sia posto  $y = f(x)$ . Segue che

$$y = \frac{1-x}{1+x} \implies y(1+x) = 1-x \implies x(1+y) = 1-y$$

e, dividendo per  $1+y$  si ottiene

$$x = \frac{1-y}{1+y} = f^{-1}(y).$$

Applicata alla precedente la simmetria di asse  $y = x$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

si giunge alla

$$y' = \frac{1-x'}{1+x'} = f^{-1}(x')$$

che, a parte il nome alle variabili, coincide con la (2).

3. Innanzitutto deduciamo il grafico  $\Gamma$  di

$$g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

in quanto in tale contesto sono applicabili le osservazioni che si possono fare al riguardo di funzioni date nella forma

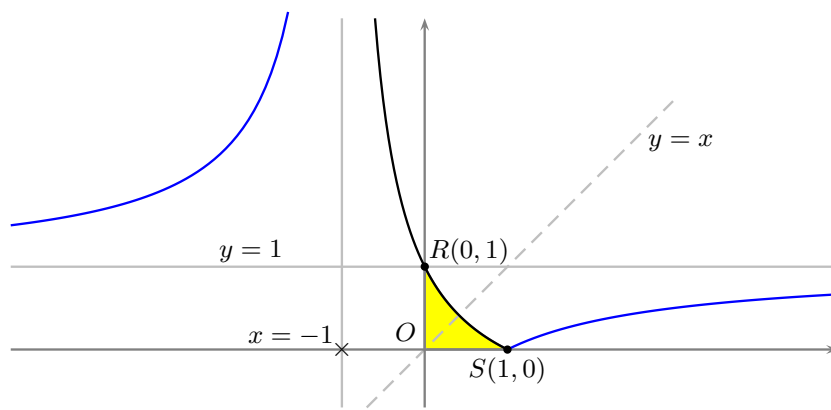
$$g(x) = |f(x)|.$$

Supposto noto il grafico di  $y = f(x)$  la  $g(x)$  si riscrive come

$$g : \begin{cases} g(x) = f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ g(x) = -f(x), & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Il suo grafico si può ottenere dall'unione del grafico di  $y = f(x)$  per i valori del dominio dove  $f(x) \geq 0$ , con il grafico di  $y = -f(x)$  quando sia  $f(x) < 0$ . Quest'ultimo si deduce ancora da quello noto eseguendo, nell'insieme che soddisfa la disequazione  $f(x) < 0$ , una simmetria assiale di asse  $x$ .

In definitiva il grafico della funzione (4) si ottiene ribaltando quello di  $f(x)$  nei punti del dominio dove  $f(x) < 0$  cioè per  $x < -1$  o  $x > 1$ , mentre coincide con quello di  $f(x)$  là dove  $f(x) \geq 0$  cioè  $-1 < x \leq 1$  (nella fig. 3 sono riportate in blu le parti del grafico di  $f(x)$  ribaltate rispetto all'asse  $x$ ).



**Fig. 3.** Grafico della funzione  $g(x) = |(1-x)/(1+x)|$ .

L'equazione della tangente  $t$  in  $R(0, 1)$  si ottiene determinandone il coefficiente angolare per cui va calcolata la derivata prima

$$g'(x) = f'(x) = \frac{-1(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} \quad -1 < x \leq 1$$

e quindi

$$t : y - f(0) = g'(0)(x - 0) \quad \implies \quad y - 1 = \frac{-2}{1+0} \cdot x$$

ossia  $t : y = -2x + 1$ .

Nel punto  $S(1, 0)$  la tangente non esiste essendo evidentemente un punto angoloso. Difatti la tangente alla funzione originaria  $f(x)$  in tale punto risulta

$$t_S : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \implies \quad y = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

coincidente con la tangente sinistra di  $g(x)$  in  $S$ . La tangente destra nel medesimo punto si ottiene applicando a  $t_S$  la simmetria assiale di asse  $x$  che collega  $f(x)$  con la  $g(x)$ , ma ciò fornisce un coefficiente angolare opposto al precedente e quindi una diversa retta tangente.

Formalmente il rapporto incrementale di  $g$  nel punto  $S(1, 0)$  risulta

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left| \frac{1-1-h}{1+1+h} \right| = \frac{|-h|}{h} \cdot \frac{1}{|2+h|}$$

per cui il suo limite sinistro risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|-h|}{h} \cdot \frac{1}{|2+h|} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} \cdot \frac{1}{|2+h|} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{|2+h|} = -\frac{1}{2}$$

mentre quello destro fornisce

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|-h|}{h} \cdot \frac{1}{|2+h|} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} \cdot \frac{1}{|2+h|} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{|2+h|} = \frac{1}{2}.$$

Il punto  $S$  è quindi un punto angoloso essendo dotato solo di derivata destra e sinistra differenti ma esso è privo di derivata e di retta tangente.

4. L'area richiesta, visualizzata in giallo nella fig. 3, si ottiene dall'integrale definito

$$\mathcal{A}(ROS) = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx. \quad (5)$$

Per risolverlo conviene riscrivere la funzione integranda scomposta in una somma eseguendo il rapporto dei due polinomi che la compongono. Ciò si può ottenere con la classica procedura di divisione dei due polinomi come mostrato sotto

$$\begin{array}{r|l} -x & +1 & x+1 \\ +x & +1 & -1 \\ \hline & +2 & \end{array}$$

oppure con il metodo di Ruffini oppure con la seguente riscrittura del numeratore

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x+(1-1)}{1+x} = \frac{(-1-x)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}.$$

Si può quindi suddividere l'integrale (5) in

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ROS) &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx = \int_0^1 \left( -1 + \frac{2}{1+x} \right) dx \\ &= -\int_0^1 dx + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \end{aligned} \quad (6)$$

e quindi risolvere gli integrali indefiniti

$$-\int dx = -x + c$$

e

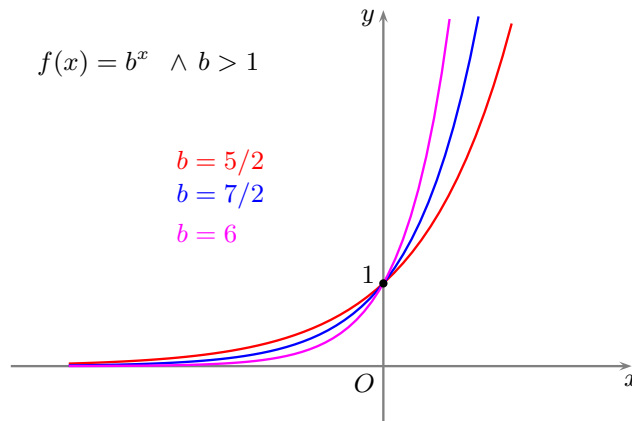
$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |1+x| + c$$

dove si è posto in quest'ultimo  $t = 1 + x$ . L'integrale (6) assume quindi il valore

$$\mathcal{A}(ROS) = -[x]_0^1 + 2[\ln |1+x|]_0^1 = -1 + 2 \ln 2 \approx 0,3863.$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1. Sia  $f(x) = b^x$  con  $b > 0 \wedge b \neq 1$ . Se  $b > 1$  il grafico  $G_b$  richiesto è quello della funzione esponenziale a base maggiore di 1 e tale grafico è noto (fig. 1).



**Fig. 1.** Grafici della funzione  $f(x) = b^x$  con  $b > 1$ .

La funzione è sempre positiva, monotona strettamente crescente e, agli estremi del dominio  $\mathbb{R}$ , possiede i limiti

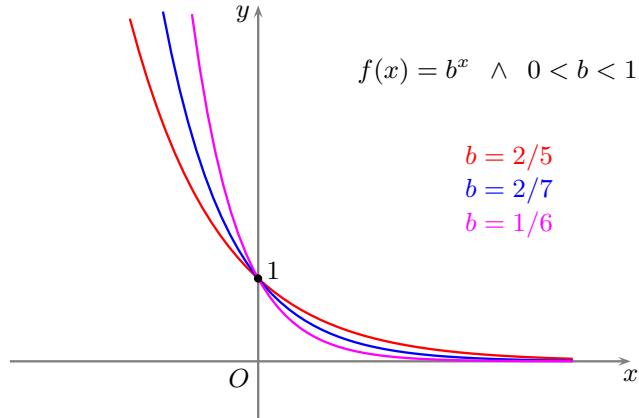
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Interseca l'asse  $y$  del sistema  $Oxy$  nel punto  $(0, 1)$  e se  $x > 0$  e  $b_2 > b_1$  risulta pure  $(b_2)^x > (b_1)^x$ . Viceversa se  $x < 0$ .

Se invece  $0 < b < 1$ , il grafico  $G_b$  è rappresentato dalla fig. 2. Da esso appare evidente la monotonia decrescente della funzione  $f(x)$ , i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

e il fatto che, nell'ipotesi che sia  $x < 0$  e  $b_1 < b_2$ , allora è anche  $(b_1)^x > (b_2)^x$  (viceversa se  $x > 0$ ).



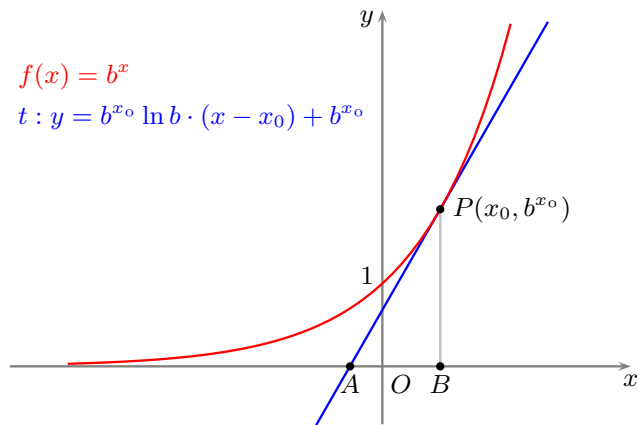
**Fig. 2.** Grafici della funzione  $f(x) = b^x$  con  $0 < b < 1$ .

2. Posto  $P(x_0, b^{x_0}) \in G_b$ , il punto  $B$  avente la medesima ascissa di  $P$  è  $B(x_0, 0)$  mentre per determinare  $A$  dobbiamo prima ottenere l'equazione della retta tangente  $t$  in  $P$  alla funzione  $f(x) = b^x$  (fig. 3). Questa si scrive come

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ma essendo  $f'(x) = b^x \cdot \ln b$  risulta

$$t : y - b^{x_0} = b^{x_0} \ln b \cdot (x - x_0). \tag{1}$$



**Fig. 3.** Grafico della funzione  $f(x) = b^x$  e retta tangente in  $P$ .

L'ascissa di  $A$  si ottiene ponendo nella precedente  $y = 0$  da cui l'equazione nell'incognita  $x$

$$0 - b^{x_0} = b^{x_0} \ln b \cdot (x - x_0).$$

Dividendo per  $b^{x_0}$  si ottiene  $-1 = x \ln b - x_0 \ln b$  ed infine

$$x = x_0 - \frac{1}{\ln b},$$

per cui le coordinate di  $A(x_A, 0)$  sono

$$A\left(x_0 - \frac{1}{\ln b}, 0\right). \quad (2)$$

La lunghezza del segmento  $AB$  risulta

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = \left| x_0 - \left( x_0 - \frac{1}{\ln b} \right) \right| = \left| \frac{1}{\ln b} \right| = \frac{1}{|\ln b|} \quad (3)$$

che, data la sua indipendenza da  $x_0$ , dimostra quanto richiesto, ossia la costanza della lunghezza del segmento  $AB$ .

Se poi  $\overline{AB} = 1$  la (3) implica

$$1 = \frac{1}{|\ln b|} \implies |\ln b| = 1.$$

Questa dà origine alle due possibilità:

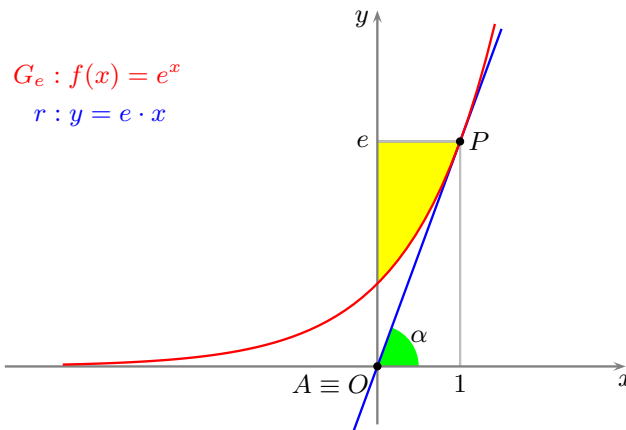
$$\begin{cases} \ln b > 0 \\ \ln b = 1 \end{cases} \implies \ln b = 1 \implies b = e$$

oppure

$$\begin{cases} \ln b < 0 \\ -\ln b = 1 \end{cases} \implies \ln b = -1 \implies b = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

entrambe compatibili con le condizioni  $b > 0 \wedge b \neq 1$ .

3. Per giungere alla retta  $r$  tangente al grafico  $G_e$  di  $f(x) = e^x$  e passante per l'origine  $O$  è sufficiente imporre la condizione  $x_A = 0$  ossia che  $A \equiv O$  (fig. 4).



**Fig. 4.** Grafico della funzione  $f(x) = e^x$  e retta tangente in  $P(1, e)$ .

Dalla (2), considerato che  $b = e$  discende

$$x_A = x_0 - \frac{1}{\ln e} = x_0 - 1$$

cosicché  $x_A = 0$  implica  $x_0 = 1$ . Ripresa l'equazione (1) della generica tangente  $t$ , per le condizioni  $b = e$  e  $x_0 = 1$  la si riporta alla

$$r : y - e^1 = e^1 \cdot \ln e(x - 1) = e \cdot x.$$

Tenuto conto che il coefficiente angolare  $m_r$  di una retta  $r$  rappresenta la tangente goniometrica dell'angolo che tale retta forma con il semiasse positivo delle  $x$ , possiamo infine scrivere

$$\operatorname{tg} \alpha = m_r \implies \operatorname{tg} \alpha = e \implies \alpha = \operatorname{arctg} e \approx 1,2183 \text{ rad.}$$

4. La regione della quale si chiede l'area è evidenziata in giallo nella fig. 4. Come già visto nel punto precedente la retta  $y = e$  interseca la funzione  $f(x) = e^x$  nel punto di ascissa unitaria: difatti  $e^x = e$  solo se  $x = 1$ . L'area richiesta è compresa tra le due funzioni  $y = e$  e  $f(x) = e^x$  per cui si deduce dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (e - e^x) dx$$

che si scompone in

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (e - e^x) dx = e \int_0^1 dx - \int_0^1 e^x dx.$$

Poiché

$$\int dx = x + c, \quad \int e^x dx = e^x + c$$

si ha in definitiva

$$\mathcal{A} = [e \cdot x - e^x]_0^1 = e - e - (0 - e^0) = 0 + 1 = 1.$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Assegnato il polinomio di grado  $n$ ,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

conviene riscriverlo nella forma più compatta utilizzando il simbolo di sommatoria

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

La sua derivata prima è

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1$$

che, in forma compatta, risulta

$$p'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$$

dove l'indice  $i$  parte ora da 1 in quanto la derivata del termine di indice nullo, cioè della costante  $a_0$ , è nulla. Allo stesso modo la derivata seconda risulta

$$\begin{aligned} p''(x) &= n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + 2 a_2 \\ &= \sum_{i=2}^n i(i-1) a_i x^{i-2} \end{aligned}$$

con l'indice  $i$  aggiornato al valore iniziale 2. Tutto ciò ci permette di riconoscere come la derivata  $k$ -esima si possa scrivere

$$p^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^n i(i-1)(i-2) \cdots (i-k+1) a_i x^{i-k}$$

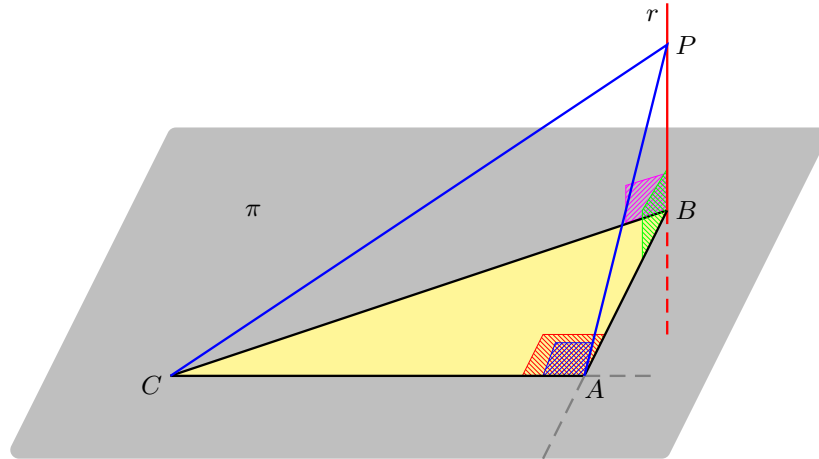
e dove la somma coinvolge  $n-k+1$  addendi. Se  $k=n$ , la precedente somma si riduce invece all'unico termine

$$p^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! a_n$$

dove, per la definizione di fattoriale, si è posto  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$ .

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Poiché la retta  $r$  (fig. 1) è perpendicolare al piano  $\pi$  nel suo punto  $B$  di incidenza, essa è perpendicolare ad ogni retta appartenente a  $\pi$  passante per il piede  $B$ , in



**Fig. 1.** Triangolo  $ABC$  e retta  $r \perp \pi$ .

particolare con le rette  $BC$  e  $BA$ . Pertanto  $\triangle PBC$  è retto in  $B$  così come  $\triangle PBA$ .

Inoltre, essendo  $\triangle ABC$  retto in  $A$ , risulta che  $CA \perp AB$  e, per quanto appena detto,  $AB \perp PB$ . Il teorema delle tre perpendicolari afferma che

*se dal piede di una retta perpendicolare ad un piano si conduce la perpendicolare ad una qualunque retta dello stesso piano, quest'ultima retta è perpendicolare al piano delle prime due*

Pertanto tracciata dal piede  $B$  di  $r$  la retta  $BA$  perpendicolare alla retta  $AC$ , quest'ultima risulta perpendicolare al piano individuato da  $r$  e  $BA$  ossia  $AC$  è perpendicolare al piano di  $\triangle PBA$ . Abbiamo quindi che pure  $\triangle PAC$  è retto nel vertice  $A$  ossia  $AC \perp AP$ .

Una dimostrazione alternativa fa invece uso del teorema di Pitagora. Difatti applicando tale teorema a  $\triangle ABC$  possiamo dedurre che

$$\triangle ABC \implies \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2. \quad (1)$$

Notata la perpendicolarità di  $r$  rispetto a qualsiasi retta del piano  $\pi$  passante per  $B$ , sono rettangoli in  $B$  pure  $\triangle PBA$  e  $\triangle PBC$ . Pertanto si ha

$$\triangle PBA \implies \overline{PB}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AB}^2 \quad (2)$$

$$\triangle PBC \implies \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2. \quad (3)$$

Sostituendo (1) e (2) in (3) si ottiene

$$\begin{aligned} \overline{PC}^2 &= (\overline{PA}^2 - \overline{AB}^2) + (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) \\ &= \overline{PA}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ &= \overline{PA}^2 + \overline{AC}^2 \end{aligned}$$

per cui vale il teorema di Pitagora pure per  $\triangle PAC$  che quindi è rettangolo in  $A$ .

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

La pendenza della retta tangente ad una funzione reale di variabile reale di dominio  $\mathbb{R}$  com'è  $f(x) = e^{3x} + 1$  in un generico punto  $(x, f(x))$  del suo grafico  $\gamma$ , è espressa dalla derivata  $f'(x)$ . Pertanto, poiché risulta

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x},$$

basta porre  $f'(x) = 2$  da cui discende l'equazione

$$3e^{3x} = 2 \quad \Longrightarrow \quad e^{3x} = \frac{2}{3}.$$

Prendendo il logaritmo di entrambi i membri si giunge al valore di  $x$  richiesto

$$3x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il limite assegnato

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \tag{1}$$

è evidentemente un caso di indeterminazione in quanto, trattate separatamente le due funzioni a fattore, risulta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{sen} t = 0$$

dove si è posto  $t = 1/x$  e considerato pure che  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ . La funzione ad argomento di (1) va quindi riscritta in altre forme identicamente equivalenti. Pertanto notata l'identità

$$4x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 4 \cdot \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x},$$

appare conveniente confermare la sostituzione  $t = 1/x$  cosicché il limite proposto si riscrive come

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t}.$$

Ricordato il limite fondamentale

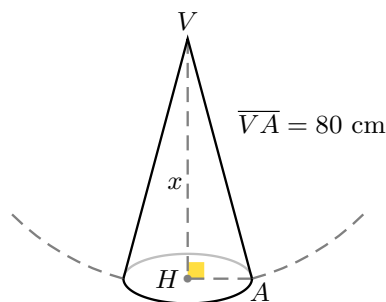
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

dove  $x$  è dato in radianti, possiamo applicare il teorema del prodotto di limiti e concludere che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 4 \cdot 1 = 4.$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Si tratta di determinare tra tutti i coni circolari retti di dato apotema, quello avente volume massimo. Riferendoci alla fig. 1, poniamo  $V$  il vertice del cono,  $H$  il piede della sua altezza e  $A$  un punto qualsiasi della circonferenza di base. L'apotema misura pertanto  $\overline{VA} = 80$  cm mentre poniamo l'altezza  $\overline{VH} = x$ . Le sue limitazioni sono quindi  $0 \leq x \leq 80$  cm.



**Fig. 1.** Cono e sue dimensioni.

Il raggio di base si ottiene facilmente con il teorema di Pitagora

$$\overline{AH}^2 = \overline{VA}^2 - \overline{VH}^2 = 80^2 - x^2$$

e quindi il volume  $\mathcal{V}$  risulta

$$\begin{cases} \mathcal{V}(x) = \frac{1}{3} (\pi \overline{AH}^2) \cdot \overline{VH} = \frac{\pi}{3} (80^2 - x^2) \cdot x = \frac{\pi}{3} (80^2 x - x^3) \\ 0 \leq x \leq 80. \end{cases} \quad (1)$$

L'individuazione del massimo di tale funzione passa attraverso lo studio del segno della sua derivata prima

$$\mathcal{V}' = \frac{\pi}{3} (80^2 - 3x^2) \geq 0$$

cioè

$$80^2 - 3x^2 \geq 0 \quad \implies \quad x^2 \leq \frac{80^2}{3}$$

le cui soluzioni sono

$$-\frac{80}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{80}{\sqrt{3}} \quad \implies \quad 0 \leq x \leq \frac{80}{\sqrt{3}}$$

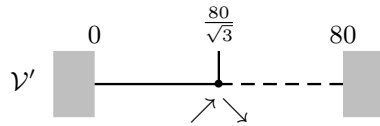


Fig. 2.

avendo considerato in quest'ultima le limitazioni di origine geometrica della variabile  $x$ . La rappresentazione grafica di tale segno (fig. 2) mette in evidenza la crescita e decrescenza del volume: questo raggiunge il massimo assoluto in corrispondenza di  $x_M = 80/\sqrt{3}$ .

Il volume corrispondente si ottiene sostituendo tale valore in (1)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x_M) &= \frac{\pi}{3} \left( 80^2 - \frac{80^2}{3} \right) \cdot \frac{80}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 80^3 = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \cdot 80^3 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \cdot 80^3 \text{ cm}^3 \\ &\approx 206.370,06 \text{ cm}^3 = 206.370 \times 10^{-3} \text{ l} = 206,37 \text{ l} \end{aligned}$$

e dove si è utilizzato il rapporto tra il litro e il  $\text{cm}^3$  ossia  $1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ l}$ . In definitiva la capacità richiesta appare essere di circa 206 litri.

#### Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Il dominio di  $f(x) = \sqrt{\cos x}$  discende immediatamente non appena si ponga la condizione di esistenza della radice quadrata che è  $\cos x \geq 0$ . Questa disequazione rientra nell'ambito delle disequazioni goniometriche standard ed è soddisfatta dai valori dell'insieme

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

che quindi costituisce pure il dominio della funzione  $f$  data. I punti della circonferenza goniometrica che la soddisfano appaiono nella fig. 1.

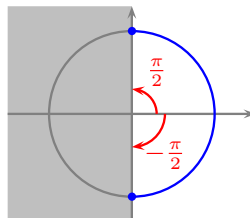


Fig. 1.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione  $h$  è definita dalla coppia di equazioni

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

e possiede evidentemente dominio coincidente con  $\mathbb{R}$  in quanto ciascun polinomio in cui appare diviso il dominio è calcolabile senza alcuna particolare restrizione. La funzione  $h$  è inoltre definita a tratti per cui conviene studiarne il comportamento in intorno dei punti di raccordo cioè, nel caso in esame, per  $x = 4$ . La richiesta di continuità implica poi che tali limiti siano uguali e pari al valore  $h(4)$ . Pertanto il limite sinistro è

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} 3x^2 - 11x - 4 = h(4) = 3 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4 - 4 = 0 \quad (1)$$

in quanto la funzione ad argomento del limite è rappresentata da un polinomio di II grado, funzione che considerata a sé stante è continua in tutto  $\mathbb{R}$ . Il limite destro invece appare

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} kx^2 - 2x - 1 = k \cdot 4^2 - 8 - 1 = 16k - 9. \quad (2)$$

Come detto la continuità richiede che

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = h(4)$$

per cui dai precedenti limiti (1) (2) discende

$$0 = 16k - 9 \quad \implies \quad k = \frac{9}{16}.$$

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Onde riportare gli elementi forniti dal testo alla scrittura canonica per le successioni poniamo

$$a_{n-1} = \binom{n}{n-1} \quad a_{n-2} = \binom{n}{n-2} \quad a_{n-3} = \binom{n}{n-3}, \quad n > 3.$$

L'essere in progressione aritmetica significa che la differenza tra un elemento della successione e il precedente (o il successivo) è un valore costante  $d$  (la cosiddetta *ragione*). Ne segue che tra i tre elementi della progressione assegnata devono sussistere le relazioni

$$a_{n-1} - a_{n-2} = d = a_{n-2} - a_{n-3}$$

e, in particolare dev'essere

$$a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-3}. \quad (1)$$

Tenuto conto delle posizioni iniziali si deduce dalla precedente l'equazione nell'incognita  $n$

$$\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-3} \quad n > 3$$

che, per la definizione di coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

si esplicita nella ( $n > 3$ )

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} - \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} \\ = \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} + \frac{n!}{(n-3)!(n-n+3)!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Poiché vale la proprietà del fattoriale tale che

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! \quad \text{e ricorsivamente} \\ n! &= n(n-1)(n-2)! \\ n! &= n(n-1)(n-2)(n-3)!, \end{aligned}$$

i numeratori della (2) diventano

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)!}{(n-1)!(+1)!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(+2)!} \\ = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(+2)!} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!(+3)!} \end{aligned}$$

e quindi semplificando là dove possibile si giunge alla

$$n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

che, dividendo per  $n$ , si riduce ulteriormente alla

$$1 - \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2} - \frac{n^2 - 3n + 2}{6}.$$

Moltiplicando per 6 e ridotti i termini simili si ottiene infine l'equazione di II grado

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \quad n > 3$$

che possiede le soluzioni

$$n = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$$

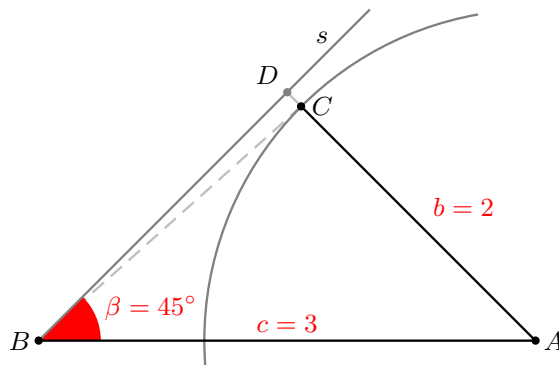
Tra questi, per la condizione  $n > 3$ , risulta accettabile solo il valore  $n = 7$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Del triangolo  $ABC$  vengono assegnate le misure di due lati,  $\overline{AB} = 3$  e  $\overline{AC} = 2$ , e l'ampiezza dell'angolo  $\widehat{ABC} = 45^\circ$  e quest'ultimo non è quello compreso tra i due lati. Tra i vari casi che si possono presentare nell'ambito della cosiddetta *risoluzione di un triangolo* riconosciamo quindi il caso LLA (Lato-Lato-Angolo), caso che può presentare due, una o nessuna soluzione.\*

Riscritte le condizioni in base alle convenzioni solite per gli elementi di un triangolo,  $c = 3$ ,  $b = 2$ ,  $\beta = 45^\circ$  (fig. 1, in rosso gli elementi assegnati), l'applicazione del teorema dei seni comporta

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \beta} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma} \implies \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$



**Fig. 1.** Elementi assegnati di un triangolo.

da cui, esplicitato il  $\text{sen } \gamma$  e sostituendo i valori dati, si ottiene

$$\text{sen } \gamma = \frac{c \text{ sen } \beta}{b} = \frac{3}{2} \cdot \text{sen } 45^\circ = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1. \quad (1)$$

\* Si veda per una trattazione completa della risoluzione del triangolo la pagina web <http://www.lorenzoroi.net/mathematica.html#risoluzione>.

Poiché tale equazione non può avere soluzioni essendo il codominio della funzione seno l'intervallo  $[-1, 1]$ , non esiste alcun triangolo con le caratteristiche assegnate.

In alternativa, la costruzione geometrica (fig. 1) della situazione prospettata mostra chiaramente come non possa esistere tale triangolo. Difatti, definito il segmento  $AB$  e tracciata una semiretta  $s$  di origine  $B$  che formi con  $AB$  un angolo  $\beta = 45^\circ$ , la circonferenza di centro  $A$  e raggio pari a 2 non interseca in alcun punto la semiretta  $s$  in quanto  $\overline{AD} > \overline{AC}$ , essendo  $D$  il piede della perpendicolare per  $A$  a tale semiretta. Il calcolo esplicito di  $\overline{AD}$  si ottiene osservando come  $AD$  sia un cateto di  $\triangle ADB$  rettangolo in  $D$ . Ne segue

$$\overline{AD} = \overline{AB} \operatorname{sen} 45^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} > 2,$$

risultato che conferma la costruzione geometrica.

Se invece  $\beta = 30^\circ$  allora dalla (1) discende che

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \implies \operatorname{sen} \gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

equazione che, date le restrizioni geometriche per gli angoli di un triangolo (le ampiezze devono essere minori di  $\pi$ ) fornisce i due valori seguenti

$$\gamma_1 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 48,59^\circ \quad \text{oppure} \quad \gamma_2 = \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 131,4^\circ$$

Esistono quindi due triangoli con le caratteristiche assegnate: in corrispondenza del primo valore l'ampiezza del terzo angolo è

$$\alpha_1 = \pi - \beta - \gamma_1 = \pi - \beta - \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 101,4^\circ,$$

mentre se  $\gamma_2 = \pi - \operatorname{arcsen}(3/4)$  abbiamo

$$\alpha_2 = \pi - \beta - \gamma_2 = -\beta + \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 18,59^\circ$$

Se  $\alpha = 30^\circ$  la costruzione geometrica si modifica: in particolare la semiretta  $s$  interseca ora la circonferenza di centro  $A$  in due punti,  $C_1$  e  $C_2$  (fig. 2) in quanto la sua distanza  $\overline{AD}$  da  $A$  è  $\overline{AD} = \overline{AB} \operatorname{sen} 30^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2$ .

In corrispondenza esistono i due triangoli:  $\triangle ABC_1$  e  $\triangle ABC_2$  con gli angoli aventi le ampiezze determinate in precedenza.

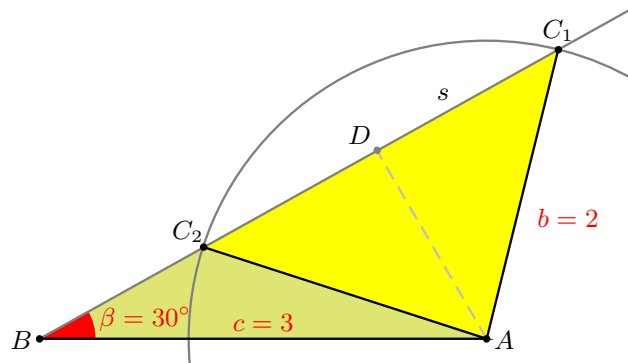


Fig. 2. Triangoli con elementi assegnati.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

L'equazione assegnata,  $y = \sqrt{x}$ , rappresenta una funzione di dominio  $\mathbb{R}^+$  il cui grafico è un arco di parabola. Difatti, posto  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  ed elevando al quadrato entrambi i membri, l'equazione è equivalente alla  $x = y^2$  che rientra nelle equazioni canoniche delle parabole con asse di simmetria orizzontale e coincidente con  $x$  e con vertice nell'origine del sistema  $Oxy$  (fig. 1).

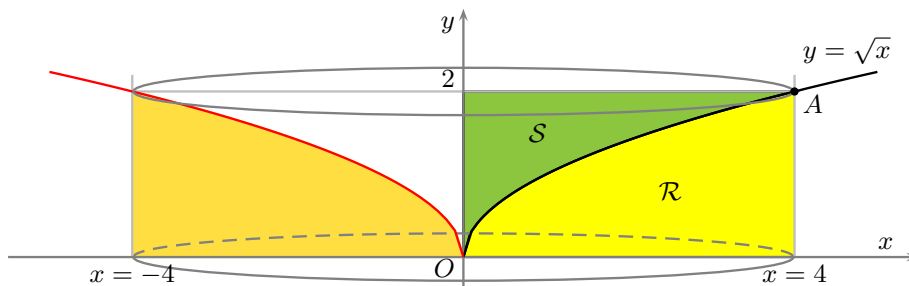


Fig. 1. Grafico di  $y = \sqrt{x}$ .

La regione  $\mathcal{R}$  delimitata da quest'arco, dalla retta di equazione  $x = 4$ , retta che lo interseca nel punto  $A(4, \sqrt{4}) \equiv (4, 2)$  e dall'asse  $x$  è evidenziata in giallo nel primo quadrante del sistema  $Oxy$ . Essa genera nella sua rotazione completa attorno all'asse  $y$  un solido il cui volume si può ottenere come differenza tra il volume di un cilindro  $\mathcal{V}_{cil}$  avente raggio di base  $r = 4$  ed altezza pari all'ordinata di  $A$ ,  $y_A = 2$ , e il volume  $\mathcal{V}_S$  del solido di rotazione della regione  $\mathcal{S}$  (in verde nella fig. 1) compresa tra l'asse  $y$ , l'arco di parabola di equazione  $x = y^2$  e la retta  $y = 2$ . Si ha pertanto

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{cil} - \mathcal{V}_S. \tag{1}$$

Il primo termine è immediato e fornisce il valore

$$\mathcal{V}_{cil} = (\pi r^2)y_A = \pi(4)^2 \cdot 2 = 32\pi \tag{2}$$

mentre il volume  $\mathcal{V}_S$  si ottiene con la formula che fornisce i volumi dei solidi di rotazione una volta che si consideri come asse di integrazione l'asse delle ordinate. Poiché nel nostro caso è  $x = f(y) = y^2$  discende che

$$\mathcal{V}_S = \pi \int_0^{y_A} [f(y)]^2 dy = \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy,$$

ed essendo il corrispondente integrale indefinito

$$\int y^4 dy = \frac{y^5}{5} + c,$$

si ottiene

$$\mathcal{V}_S = \pi \left[ \frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left( \frac{32}{5} \right).$$

Ripresa la relazione tra i volumi (1) e il risultato (2), otteniamo in conclusione

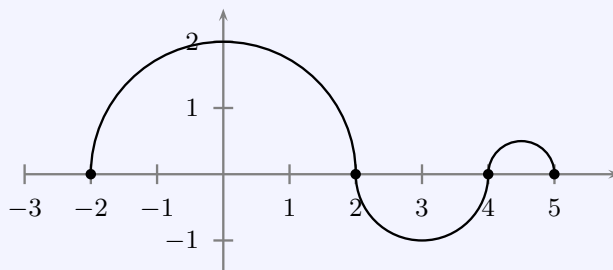
$$\mathcal{V} = 32\pi - \pi \cdot \frac{32}{5} = 32\pi \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = 32\pi \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{128}{5}\pi.$$

# ESAME 2010 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di  $g(x)$  per  $-2 \leq x \leq 5$  essendo  $g$  la derivata di una funzione  $f$ . Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in  $(0,0)$ ,  $(3,0)$ ,  $(\frac{9}{2},0)$  e raggi rispettivi  $2$ ,  $1$ ,  $\frac{1}{2}$ .



- Si scriva un'espressione analitica di  $g(x)$ . Vi sono punti in cui  $g(x)$  non è derivabile? Se sì, quali sono? E perché?
- Per quali valori di  $x$ ,  $-2 < x < 5$ , la funzione  $f$  presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.
- Se  $f(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$ , si determini  $f(4)$  e  $f(1)$ .
- Si determinino i punti in cui la funzione  $f$  ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di  $f(x)$ ? Qual è l'andamento qualitativo di  $f(x)$ ?

Soluzione

## • Problema n. 2

Nel piano riferito ad un sistema  $Oxy$  di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni:  $y^2 = 2x$  e  $x^2 = y$ .

- Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con  $A$  il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine  $O$ .

- b) L'ascissa di  $A$  è  $\sqrt[3]{2}$ ; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di  $10^{-2}$ .
- c) Sia  $\mathbf{D}$  la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi  $O$  e  $A$ . Si determini la retta  $r$ , parallela all'asse  $x$ , che stacca su  $\mathbf{D}$  il segmento di lunghezza massima.
- d) Si consideri il solido  $\mathbf{W}$  ottenuto dalla rotazione di  $\mathbf{D}$  intorno all'asse  $x$ . Se si taglia  $\mathbf{W}$  con piani ortogonali all'asse  $x$ , quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di  $\mathbf{W}$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Sia  $p(x)$  un polinomio di grado  $n$ . Si dimostri che la sua derivata  $n$ -esima è  $p^{(n)}(x) = n!a_n$  dove  $a_n$  è il coefficiente di  $x^n$ .

Soluzione

2. Siano  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ ,  $r$  la retta perpendicolare in  $B$  al piano del triangolo e  $P$  un punto di  $r$  distinto da  $B$ . Si dimostri che i tre triangoli  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  sono triangoli rettangoli.

Soluzione

3. Sia  $r$  la retta d'equazione  $y = ax$  tangente al grafico di  $y = e^x$ . Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta  $r$  forma con il semiasse positivo delle ascisse?

Soluzione

4. Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$ . Come si può essere certi che esiste un unico zero?

Soluzione

5. Sia  $G$  il grafico di una funzione  $x \rightarrow f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Si illustri in che modo è possibile stabilire se  $G$  è simmetrico rispetto alla retta  $x = k$ .

Soluzione

6. Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto  $P$  di coordinate  $(3 \cos t, 2 \sin t)$  al variare di  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Soluzione

7. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

Soluzione

8. Se  $n > 3$  e  $\binom{n}{n-1}$ ,  $\binom{n}{n-2}$ ,  $\binom{n}{n-3}$  sono in progressione aritmetica, qual è il valore di  $n$ ?

Soluzione

9. Si provi che non esiste un triangolo  $ABC$  con  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ . Si provi altresì che se  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ , allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

Soluzione

10. Si consideri la regione  $R$  delimitata da  $y = \sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 4$ .

L'integrale  $\int_0^4 2\pi x (\sqrt{x}) dx$  fornisce il volume del solido:

- generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $x$ ;
- generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $y$ ;

- c) di base  $R$  le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse  $x$  sono semicerchi di raggio  $\sqrt{x}$ ;  
 d) nessuno di questi.  
 Si motivi esaurientemente la risposta.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

a) Indicati con  $O \equiv C_1(0,0)$ ,  $C_2(3,0)$ ,  $C_3(\frac{9}{2},0)$  i centri delle tre circonferenze di raggi rispettivamente  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 1$  e  $r_3 = \frac{1}{2}$  (fig. 1), le equazioni delle circonferenze  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  sono

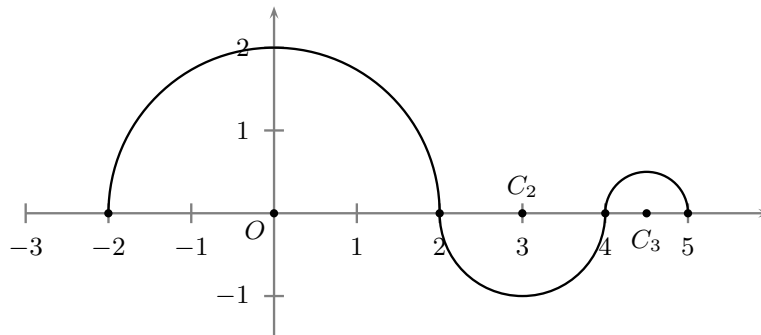
$$\gamma_1 : x^2 + y^2 = 4, \quad \gamma_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1, \quad \gamma_3 : \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Onde ottenere le equazioni delle semicirconferenze rappresentate nella fig. 1, dalla prima e dalla terza equazione esplicitiamo la variabile  $y$  considerando che, delle due soluzioni dell'equazione, va tenuta quella positiva. Abbiamo quindi che

$$s_1 : y = \sqrt{4-x^2} \quad s_3 : y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{9}{2}\right)^2}, \quad (1)$$

mentre per la seconda semicirconferenza sono i punti con ordinata negativa quelli che la descrivono

$$s_2 : y = -\sqrt{1 - (x-3)^2}. \quad (2)$$



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $g(x)$ .

Tenuto conto degli intervalli di esistenza delle singole funzioni e deducibili dalla figura stessa, l'espressione per la  $g(x)$  risulta

$$g : \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2}, & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ y = -\sqrt{1 - (x-3)^2}, & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{9}{2}\right)^2}, & \text{se } 4 < x \leq 5. \end{cases}$$

Tale funzione è manifestamente continua nell'intervallo  $[-2, 5]$  mentre non potrà avere la derivata nei punti interni corrispondenti ad  $x = 2$  e  $x = 4$  in quanto qui la tangente è verticale e, per lo stesso motivo, non potrà esistere la derivata destra in  $x = -2$  e quella sinistra in  $x = 5$ . La dimostrazione di tale affermazione discende dal calcolo dei rapporti incrementali: difatti il rapporto incrementale destro in  $x = -2$  risulta

$$\frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \frac{\sqrt{4 - (-2+h)^2} - 0}{h} = \frac{\sqrt{4h - h^2}}{h}.$$

Il suo limite per  $h \rightarrow 0^+$  è quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4h - h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{4h - h^2}{h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{4}{h} - 1} = +\infty$$

in quanto  $\lim_{h \rightarrow 0^+} 4/h = +\infty$  e dove si è tenuto conto che, per  $h > 0$ , è pure  $h = \sqrt{h^2}$ . Non esistendo finito il limite del rapporto incrementale non può esistere la derivata.

Nello stesso modo il limite del rapporto incrementale di  $g$  nell'intorno sinistro di  $x = 2$  vale

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-4h - h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -\sqrt{-\frac{4}{h} - 1} = -\infty$$

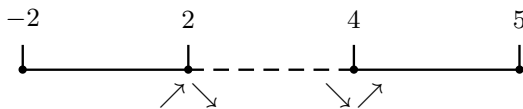
in quanto, per  $h < 0$ , è  $h = -\sqrt{h^2}$ . Nemmeno in  $x = 2$  esiste quindi la derivata dato che non esiste già la derivata sinistra. Con osservazioni analoghe, nell'intorno sinistro di  $x = 4$  si ha ( $-h = \sqrt{h^2}$ )

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{1 - (4+h-3)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-2h - h^2}}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} = +\infty$$

e, ancora, nell'intorno sinistro di 5 si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - (5+h-\frac{9}{2})^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-h - h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -\sqrt{-\frac{1}{h} - 1} = -\infty.$$

b) Poiché si chiedono i valori di  $x$  in corrispondenza dei quali la funzione  $f$  assume valori estremi (e  $g(x)$  è la sua derivata), è sufficiente, in base al teorema sulla monotonia delle funzioni derivabili studiare il segno della derivata prima ossia il segno di  $g(x)$ . Siccome in  $] -2, 5[$  e in base al grafico proposto risulta  $g(x) \geq 0$  per  $-2 \leq x \leq 2$  o  $4 \leq x \leq 5$  mentre  $g(x) < 0$  se  $2 < x < 4$  (fig. 2), la funzione  $f$  presenta un massimo relativo in  $x = 2$  ed un minimo relativo in corrispondenza dell'ascissa  $x = 4$ .



**Fig. 2.** Segno di  $g$ , derivata della funzione  $f$ .

c) Definita la  $f$  come la funzione integrale di  $g(x)$  ossia

$$f(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$$

il calcolo di  $f(4)$  e di  $f(1)$  si può eseguire ricordando il significato geometrico dell'integrale definito e senza dover passare attraverso l'integrazione esplicita delle varie funzioni componenti la  $g(x)$ . Quest'ultima comunque, comporterebbe il calcolo di integrali indefiniti del tipo

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

già trattati in **altri** contesti.

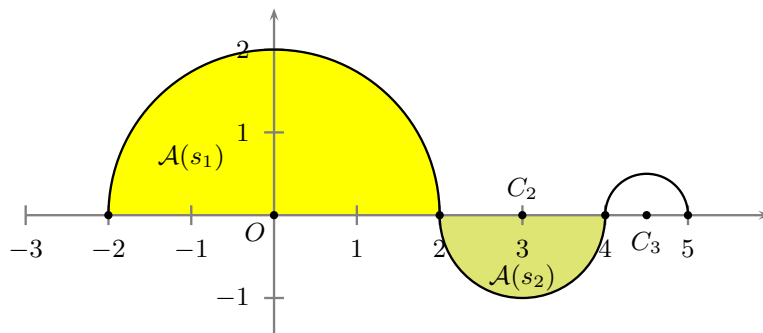
In base alla proprietà additiva dell'integrale definito, il calcolo di

$$f(4) = \int_{-2}^4 g(t) dt$$

si può scomporre nella somma

$$f(4) = \int_{-2}^2 g(t) dt + \int_2^4 g(t) dt.$$

È ora sufficiente ricordare che l'integrale definito esprime l'area (o il suo opposto) della regione compresa tra il grafico di una funzione sempre positiva (o negativa), l'asse  $x$  e le rette parallele all'asse  $y$  corrispondenti agli estremi di integrazione. Nel caso in esame il primo addendo fornisce l'area  $\mathcal{A}(s_1)$  (fig. 3) del semicerchio di raggio 2 e centro  $O$  delimitato dalla semicirconferenza  $s_1$ : il secondo addendo dà invece l'opposto dell'area  $\mathcal{A}(s_2)$  del semicerchio di centro  $C_2$  e raggio unitario e ciò in quanto la funzione è negativa. Abbiamo quindi



**Fig. 3.** Aree delle semicirconferenze  $s_1$  e  $s_2$ .

$$f(4) = \mathcal{A}(s_1) - \mathcal{A}(s_2) = \frac{1}{2}\pi r_1^2 - \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{3}{2}\pi. \quad (3)$$

Il calcolo di  $f(1)$  si riporta a quello dell'area della regione evidenziata in fig. 4 e si può ottenere come somma delle aree del triangolo rettangolo in colore verde chiaro e del settore circolare giallo. Poiché il triangolo ha base unitaria e ipotenusa pari a  $r_1 = 2$ , l'ampiezza dell'angolo corrispondente al vertice  $O$  è di  $\frac{\pi}{3}$  e la sua area risulta  $\mathcal{A}(\Delta) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

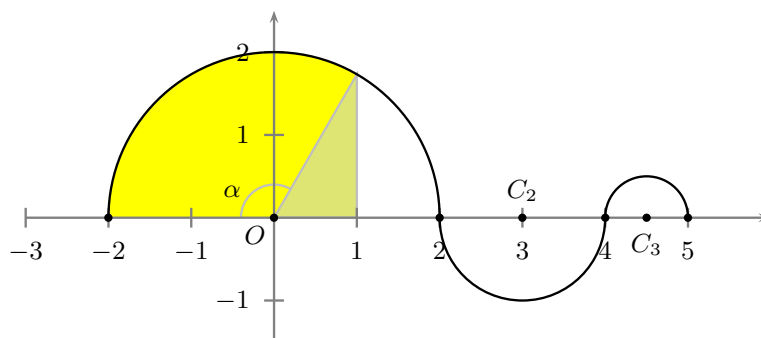


Fig. 4. Area della regione che esprime il valore  $f(1)$ .

Ne segue che l'angolo al centro  $\alpha$  che individua il settore è pari a  $\frac{2}{3}\pi$  per cui l'area totale del trapezoide è in definitiva

$$\begin{aligned} f(1) &= \mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\text{sett}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\alpha r_1^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot 2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi. \end{aligned} \quad (4)$$

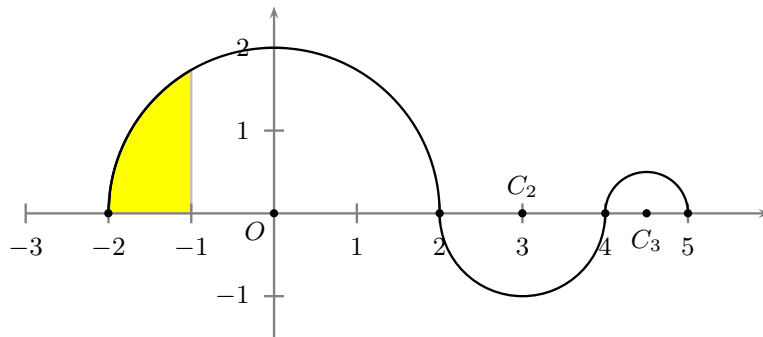
d) Per determinare i punti dove si annulla la derivata seconda di  $f$  non è necessario calcolare esplicitamente tale derivata in quanto questi si possono riconoscere dall'andamento della  $g(x)$ . Difatti essendo la  $f''(x)$  nient'altro che la  $g'(x)$  è sufficiente individuare i punti dove  $g(x)$  presenta rette tangenti orizzontali. Segue che le ascisse di questi punti sono quelle dei centri  $O$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , delle tre semicirconferenze ossia  $x = 0$ ,  $x = 3$  e  $x = \frac{9}{2}$ .

Circa il segno della  $f(x)$  possiamo dedurlo ancora una volta in base all'interpretazione geometrica dell'integrale definito già richiamata ossia come area (o somma di aree) con segno del trapezoide delimitato dalla funzione  $g$  e dalla retta  $x = t$  con  $-2 \leq t \leq 5$ . Pertanto se  $x = -2$  risulta

$$f(-2) = \int_{-2}^{-2} g(t)dt = 0,$$

mentre, all'aumentare di  $x$  tra  $-2$  e  $2$ , l'area del trapezoide aumenta progressivamente cosicché  $f(x)$  risulta crescente in questo intervallo. In particolare se  $x = -1$  si presenta la situazione di fig. 5 e, data la simmetria rispetto alla situazione discussa con  $x = 1$ , il valore che ne discende si ottiene come differenza tra l'area del semicerchio di centro  $O$  e  $f(1)$  dato dall'espressione (4): vale quindi

$$\begin{aligned} f(-1) &= \mathcal{A}(s_1) - f(1) = \frac{1}{2}\pi r_1^2 - f(1) \\ &= \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



**Fig. 5.** Interpretazione geometrica di  $f(-1)$ .

Seguono poi i valori:

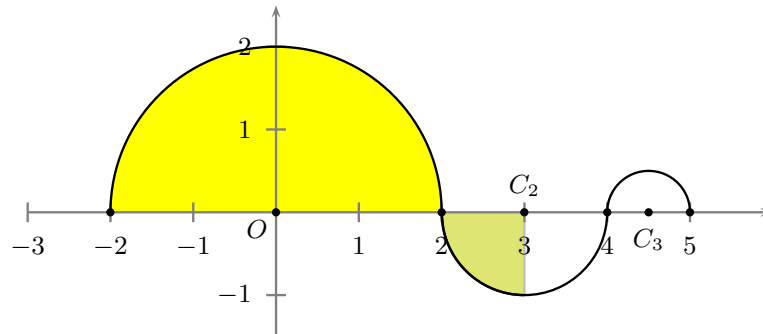
$$f(0) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(s_1) = \frac{1}{4}\pi r_1^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi$$

pari alla metà dell'area di  $\mathcal{A}(s_1)$  o ad un quarto di cerchio, e

$$f(2) = \mathcal{A}(s_1) = 2\pi.$$

Se  $2 < x \leq 4$  il valore di  $f(x)$  è, per la proprietà additiva dell'integrale definito, somma di  $f(2)$  con l'opposto dell'area del trapezoide definito dalla retta  $x = t$  e dalla semicirconferenza di centro  $C_2$  (fig. 6). Pertanto la funzione  $f$  raggiunto il massimo in  $x = 2$  inizierà a diminuire in quanto si viene a sommare un valore negativo ma crescente in valore assoluto. In particolare se  $x = 3$  (fig. 6) si ha

$$\begin{aligned} f(3) &= \int_{-2}^3 g(t) dt = \int_{-2}^2 g(t) dt + \int_2^3 g(t) dt \\ &= f(2) + \int_2^3 g(t) dt \\ &= 2\pi - \frac{1}{2}\mathcal{A}(s_2) = 2\pi - \frac{1}{4}\pi r_2^2 = 2\pi - \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = \frac{7}{4}\pi. \end{aligned}$$



**Fig. 6.** Interpretazione geometrica di  $f(3)$ .

In corrispondenza di  $x = 4$  la  $f$  raggiungerà quindi il valore già determinato  $f(4)$ , (3), e questo valore costituisce pure il minimo di  $f$  in quanto all'aumentare di  $x$  in  $]4, 5]$  si viene a sommare l'area positiva del trapezoide definito dalla semicirconferenza  $s_3$ . In particolare se  $x = \frac{9}{2}$  si presenta la situazione di fig. 7 che comporta il valore

$$\begin{aligned} f\left(\frac{9}{2}\right) &= \int_{-2}^{\frac{9}{2}} g(t) dt = \int_{-2}^4 g(t) dt + \int_4^{\frac{9}{2}} g(t) dt \\ &= f(4) + \frac{1}{2} \mathcal{A}(s_3) = \frac{3}{2} \pi + \frac{1}{4} \pi \cdot r_3^2 \\ &= \frac{3}{2} \pi + \frac{1}{4} \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{16} \pi. \end{aligned}$$

Infine il valore all'estremo destro  $x = 5$  è dato da

$$\begin{aligned} f(5) &= \int_{-2}^5 g(t) dt = \int_{-2}^4 g(t) dt + \int_4^5 g(t) dt \\ &= f(4) + \mathcal{A}(s_3) \\ &= \frac{3}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{13}{8} \pi. \end{aligned}$$

Riassumendo l'andamento descritto finora in base ad osservazioni geometriche e coerente con lo studio del segno di  $g(x)$  (punto b), abbiamo che

$$\begin{aligned} f &\text{ è monotona crescente in } [-2, 2] \text{ e in } [4, 5] \\ &\text{ monotona decrescente in } ]2, 4]. \end{aligned}$$

In  $x = 2$  raggiunge un massimo assoluto, un minimo relativo in  $x = 4$  con tre flessi in corrispondenza di  $x = 0$ ,  $x = 3$  e in  $x = \frac{9}{2}$ .

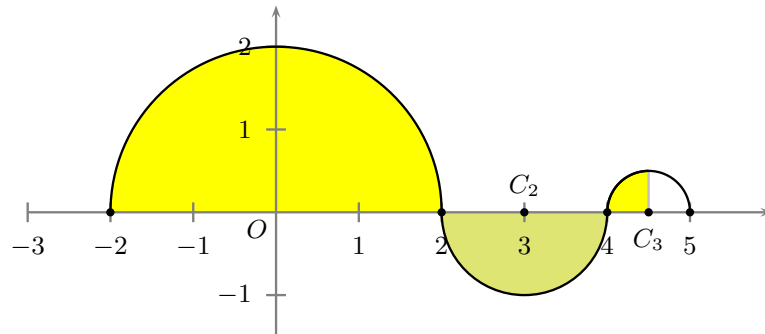


Fig. 7. Interpretazione geometrica di  $f\left(\frac{9}{2}\right)$ .

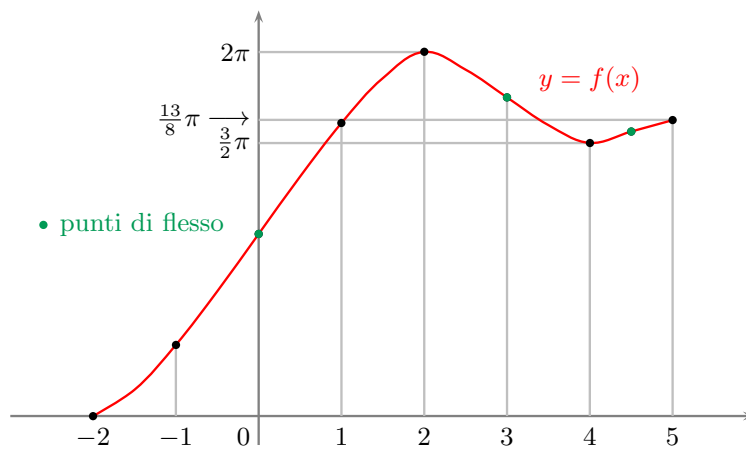


Fig. 8. Andamento qualitativo della funzione  $f$ .

L'andamento qualitativo è fornito dalla fig. 8 mentre quello numerico dalla [tabella](#) che segue.

$x$	$f(x)$
-2	0
-1	$\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$
0	$\pi$
1	$\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$2\pi$
3	$\frac{7}{4}\pi$
4	$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{9}{2}$	$\frac{26}{16}\pi$
5	$\frac{13}{8}\pi$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

a) Indicate le due parabole con  $p_1: y^2 = 2x$  e  $p_2: y = x^2$ , queste si intersecano sia nell'origine  $O$  che rappresenta pure il vertice per entrambe che nell'ulteriore punto  $A$  che si deduce dall'equazione

$$(x^2)^2 = 2x$$

ottenuta eliminando la variabile  $y$  dalle due equazioni rappresentative. Accanto ad  $x = 0$ , l'equazione precedente si riduce alla  $x^3 = 2$  da cui la soluzione  $x_A = \sqrt[3]{2}$ : risulta di conseguenza  $y_A = \sqrt[3]{4}$  e quindi il punto  $A$  è individuato dalle coordinate  $A(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ .

Riportata  $p_1$  alla forma canonica  $x = ay^2 + by + c$ ,  $p_1: x = \frac{1}{2}y^2$ , ed osservato che il suo asse di simmetria coincide con l'asse delle  $x$ , le coordinate del suo fuoco  $F_1$  e l'equazione della direttrice  $d_1$  si ottengono rispettivamente dalle

$$F_1\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right), \quad d_1: x = \frac{-1-\Delta}{4a}.$$

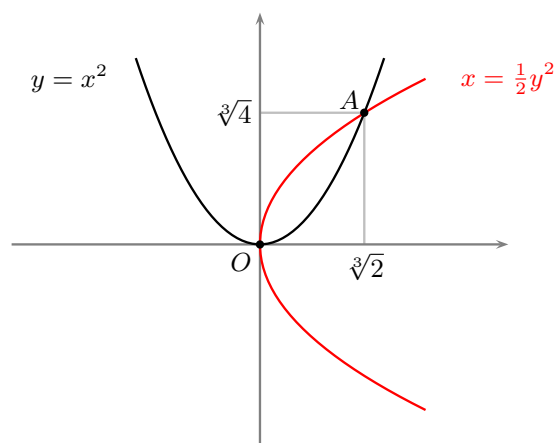
Risulta che

$$F_1\left(\frac{1-0}{4 \cdot \frac{1}{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad x = \frac{-1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

La parabola  $p_2$  invece possiede fuoco  $F_2$  e direttrice  $d_2$

$$F_2\left(0, \frac{1}{4}\right), \quad d_2: y = -\frac{1}{4}.$$

I loro grafici sono riportati in fig. 1.



**Fig. 1.** Grafici di  $p_1: x = \frac{1}{2}y^2$  e  $p_2: y = x^2$ .

2) Il numero  $\sqrt[3]{2}$  è si può porre in relazione al problema della duplicazione del cubo ossia alla costruzione, con i mezzi della geometria euclidea cioè con riga e compasso, del lato  $L$  di un cubo che abbia volume doppio di un altro cubo di lato  $l$  assegnato. Difatti, supposto di disporre del lato  $l$  di un cubo, si dovrà determinare il segmento  $L$  tale che

$$L^3 = 2 \cdot l^3 \quad \text{ossia, algebricamente,} \quad L = \sqrt[3]{2} \cdot l.$$

Posto  $l = 1$  si ottiene  $L = \sqrt[3]{2}$ . Questo problema, assieme al problema della trisezione di un angolo qualsiasi e a quello della quadratura del cerchio, è uno dei tre problemi classici della geometria greca e rimase insoluto fino alla prima metà del 1800. Considerato che ciascun passo di una costruzione con riga e compasso implica la determinazione di un punto di intersezione tra due rette o tra una retta e una circonferenza o tra due circonferenze, Pierre Wantzel nel 1837 dimostrò che con tali mezzi il problema non ammette soluzione.

Per fornire una stima del valore  $\alpha = \sqrt[3]{2}$  definiamo la funzione  $f(x) = x^3 - 2$  in quanto questa ammette come soluzione dell'equazione  $f(\alpha) = \alpha^3 - 2 = 0$  proprio il numero  $\alpha$ . Osservata

- la continuità di  $f$  in quanto espressa da un polinomio,
- la positività della sua derivata  $f'(x) = 3x^2 > 0 \forall x \neq 0$  e, verificato che
- la funzione assuma agli estremi valori di segno opposto,  $f(1) = -1 < 0$  e  $f(2) = 8 - 2 = 6 > 0$ ,

possiamo in base al teorema degli zeri essere certi della presenza in  $[1, 2]$  di almeno una radice  $\alpha$  e, per la monotonia (strettamente crescente) assicurata dal segno di  $f'(x)$ , della sua unicità. Possiamo quindi applicare il metodo delle tangenti o di Newton per stimare il valore di  $\alpha$  soprattutto perché tale metodo assicura una convergenza più rapida del più semplice metodo di bisezione.

Tale metodo numerico consiste nel partire da un valore iniziale  $x_0$  prossimo al valore che si vuole determinare e quindi sostituendolo nell'espressione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

ottenere una prima stima  $x_1$ . Tale processo va poi iterato finché si raggiunge l'approssimazione voluta.

Poiché come detto  $f'(x) = 3x^2$  la (1) si riscrive

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = g(x_n)$$

per cui partendo da  $x_0 = 1$  questa fornisce

$$x_1 = g(x_0) = 1 - \frac{1 - 2}{3 \cdot 1} = 1 - \frac{(-1)}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33.$$

Il valore  $x_2$  è

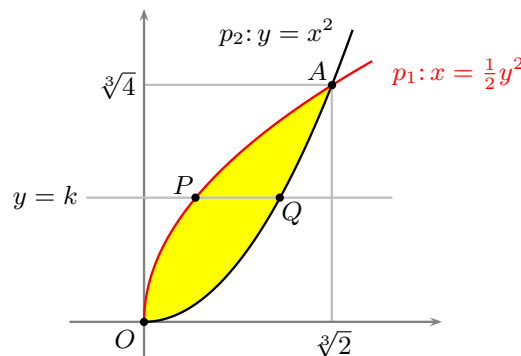
$$x_2 = g(x_1) = \frac{4}{3} - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2}{3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{182}{144} \approx 1,26389.$$

Procedendo ulteriormente si ottengono i valori riassunti nella tabella seguente dove si riporta pure la differenza tra il valore ottenuto ad ogni passo e il valore precedente.

$n$	$x_n$	$x_{n+1}$	$x_{n+1} - x_n$
0	1	1,33333	+0,33333
1	1,33333	1,26389	-0,06944
2	1,26389	1,25993	-0,00396
3	1,25993	1,25992	-0,00001
4	1,25992	1,25992	-0,00000

Come si può notare già per  $n = 2$  i valori differiscono per meno di un centesimo: pertanto se poniamo  $\alpha = 1,259$  l'errore di tale stima sarà certamente minore di  $10^{-2}$ .

c) Rappresentata più in dettaglio la regione **D** compresa tra le due parabole (in giallo nella fig. 2), sia  $y = k$  l'equazione di un fascio di rette orizzontali che interseca  $p_1$  nel punto  $P$  e  $p_2$  in  $Q$ . Il parametro  $k$  dovrà soddisfare innanzitutto la condizione  $0 \leq k \leq \sqrt[3]{4}$  affinché i punti  $P$  e  $Q$  appartengano agli archi di parabola che delimitano la regione **D**.



**Fig. 2.** Regione **D** compresa tra  $p_1$  e  $p_2$ .

Con tali limitazioni l'ascissa del punto  $P$  discende immediatamente come soluzione del sistema

$$y = k \wedge 2x = y^2 \implies 2x = k^2 \implies x_P = \frac{k^2}{2}$$

mentre quella di  $Q$  (di valore positivo o nullo) risulta

$$y = k \wedge y = x^2 \implies x^2 = k \implies x_Q = \sqrt{k}.$$

La lunghezza del segmento  $PQ$  è allora

$$\overline{PQ} = |x_Q - x_P| = x_Q - x_P = \sqrt{k} - \frac{k^2}{2} \quad 0 \leq k \leq \sqrt[3]{4}.$$

Per individuare il valore di  $k$  che corrisponde alla massima lunghezza di  $PQ$  studiamo la derivata prima della funzione

$$f(k) = \sqrt{k} - \frac{k^2}{2} \quad 0 \leq k \leq \sqrt[3]{4}.$$

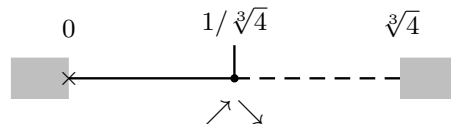
Risulta

$$f'(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k = \frac{1 - 2k\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{1 - 2k^{3/2}}{2\sqrt{k}},$$

per cui lo studio del segno  $f'(k) \geq 0$  implica la disequazione

$$1 - 2k^{3/2} \geq 0 \implies k^{3/2} \leq \frac{1}{2}.$$

Tenendo conto della positività di  $k$ , l'ultima disequazione è equivalente alla  $k^3 \leq \frac{1}{4}$  cosicché l'estrazione della radice cubica fornisce infine le soluzioni  $k \leq 1/\sqrt[3]{4}$ . Riportando graficamente tale segno (fig. 3) appare evidente la presenza di un massimo in corrispondenza di  $k = 1/\sqrt[3]{4}$ . La retta richiesta possiede pertanto l'equazione  $y = 1/\sqrt[3]{4}$ .



**Fig. 3.** Segno di  $f'(k)$ .

d) La rotazione di  $\mathbf{D}$  attorno all'asse  $x$  genera il solido di fig. 4 e dove la superficie esterna appare quella di un paraboloide che è la superficie che si ottiene dalla rotazione di una parabola attorno al proprio asse di simmetria.

Le sezioni di tale solido con piani perpendicolari all'asse  $x$  si possono individuare anche riprendendo la regione  $\mathbf{D}$  e considerando le sue sezioni bidimensionali ottenute con il fascio di rette  $x = t$  quando sia  $0 \leq t \leq \sqrt[3]{2}$  (fig. 5).

A seconda del valore di  $t$  queste rette definiscono, intersecando  $\mathbf{D}$ , punti o segmenti. In particolare se  $t = 0$  la regione  $\mathbf{D}$  si riduce al solo punto origine  $O$  che, nella rotazione attorno all'asse  $x$ , ha per immagine sé stesso.

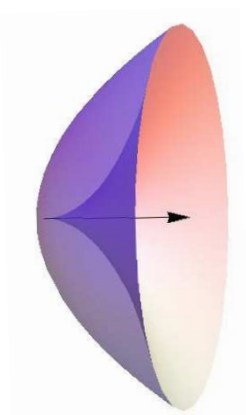


Fig. 4. Solido  $W$  generato dalla rotazione di  $D$  attorno all'asse  $x$ .

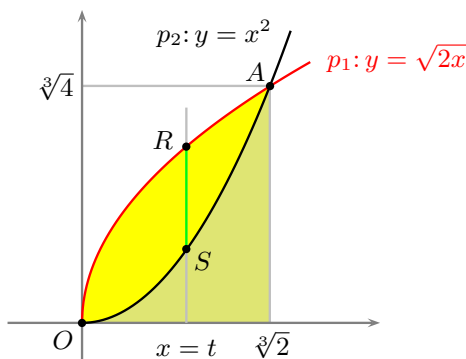
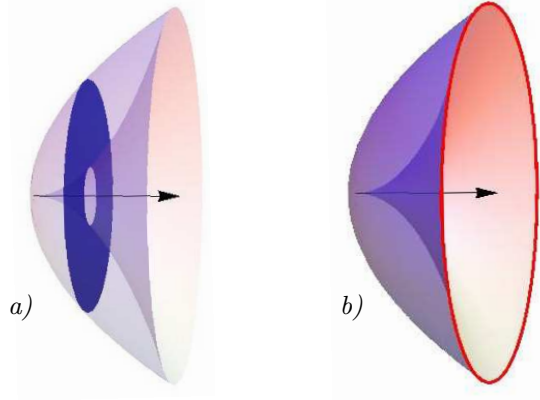


Fig. 5. Regione  $D$  e segmento sezione  $RS$ .

Se invece  $0 < t < \sqrt[3]{2}$  i punti comuni tra le rette del fascio e  $D$  formano un segmento  $RS$  (in verde nella fig. 5). Questo, nella rotazione attorno all'asse  $x$ , genera invece una corona circolare (fig. 6a). Infine se  $t = \sqrt[3]{2}$  ci si riduce al punto  $A$  che, nella rotazione, genera una circonferenza di raggio pari alla sua ordinata,  $\sqrt[3]{4}$  (in rosso nella fig. 6b).

Il volume di  $W$  si può calcolare sia determinando la funzione  $\mathcal{A}(x)$  rappresentativa dell'area di una sua generica sezione (appunto una corona circolare) e quindi integrando tale funzione tra gli estremi  $0$  e  $\sqrt[3]{2}$  oppure interpretando il volume richiesto come differenza di due solidi: quello generato dalla regione delimitata dalla parabola  $p_1$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = \sqrt[3]{2}$  (in giallo e verde in fig. 5), con quello, più interno, generato dalla rotazione della regione definita dall'arco di  $p_2$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = \sqrt[3]{2}$  (in verde in fig. 5).

Nel primo caso l'area  $\mathcal{A}(x)$  della corona si ottiene come differenza tra il cerchio di raggio maggiore pari all'ordinata di  $y_R$  di  $R$  (fig. 5), con l'area del cerchio interno di raggio  $y_S = x^2$ . Esplicitata la variabile  $y$  dall'equazione di  $p_1$  risulta



**Fig. 6.** Solido  $\mathbf{W}$ : a) sezione corona circolare, b) sezione circonferenza.

$y_R = \sqrt{2x}$  per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{corona}) &= \pi \cdot (y_R)^2 - \pi \cdot (y_S)^2 = \pi (y_R^2 - y_S^2) \\ &= \pi (2x - x^4). \end{aligned}$$

Il volume è allora

$$\mathcal{V}(\mathbf{W}) = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \mathcal{A}(x) dx = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi(2x - x^4) dx$$

e quindi, essendo

$$\int \pi(2x - x^4) dx = 2\pi \int x dx - \pi \int x^4 dx = \pi x^2 - \pi \frac{x^5}{5} + c$$

risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{W}) &= \pi \left[ x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \pi \left[ (\sqrt[3]{2})^2 - \frac{(\sqrt[3]{2})^5}{5} \right] \\ &= \pi \left( \sqrt[3]{2^2} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{2^5} \right) \\ &= \pi \left( \sqrt[3]{4} - \frac{2}{5} \sqrt[3]{4} \right) = \frac{3\pi}{5} \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

In alternativa, il volume del solido generato dall'arco di parabola  $p_1$  è espresso dall'integrale

$$\mathcal{V}_1 = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (\sqrt{2x})^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x dx,$$

mentre quello generato dalla regione compresa tra  $p_2$  e l'asse  $x$  risulta

$$\mathcal{V}_2 = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (x^2)^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4 dx.$$

Pertanto

$$\mathcal{V}(\mathbf{W}) = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x dx - \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4 dx$$

che manifestamente conduce ai **medesimi** integrali indefiniti e quindi si risolve come il precedente.

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

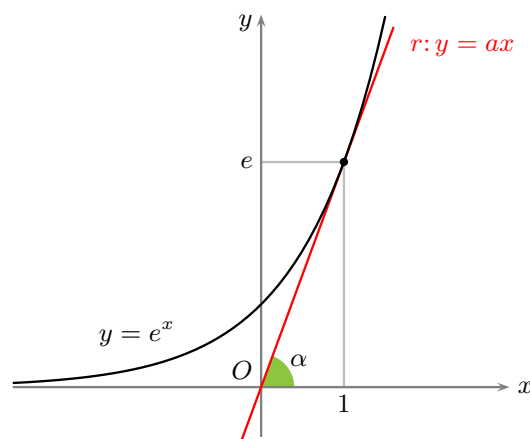
Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 1.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 2.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $r: y = ax$  la retta per l'origine del sistema  $Oxy$  tangente al grafico della funzione esponenziale  $y = e^x$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Retta  $r: y = ax$  e grafico  $\Gamma$  di  $y = e^x$ .

Per determinare l'angolo  $\alpha$  tra  $r$  e il semiasse positivo delle  $x$  va ripreso il significato di coefficiente angolare di una retta in forma esplicita. Poiché quest'ultima grandezza esprime in generale la tangente goniometrica dell'angolo che la retta

forma con il semiasse positivo delle ascisse, con le nostre notazioni dev'essere  $a = \operatorname{tg} \alpha$ . Va perciò determinato il coefficiente angolare  $a$ .

A tal fine possiamo utilizzare le condizioni che assicurano la tangenza di due generiche curve rappresentate dalle equazioni  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ , condizioni che si traducono in un sistema di due equazioni: la prima equazione deriva dal fatto che un punto di tangenza è pure un punto di intersezione tra i rispettivi grafici ossia dev'essere soddisfatta l'equazione  $f(x) = g(x)$ . La seconda comporta che in tale punto di intersezione i grafici delle due funzioni abbiano la medesima retta tangente cioè il medesimo coefficiente angolare: deve valere quindi pure  $f'(x) = g'(x)$ .

Nel nostro caso queste condizioni si traducono nel sistema

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} e^x = ax \\ e^x = a \end{cases}$$

dove le incognite sono  $a$  e  $x$ . Sostituendo la seconda nella prima discende  $a = ax$  e poiché possiamo supporre  $a \neq 0$  (di certo la retta  $r$  non è parallela all'asse  $x$ , fig. 1), otteniamo  $x = 1$ , ascissa del punto di tangenza. Ne segue che  $a = e^1 = e$  che è pure l'ordinata del medesimo punto. Ripreso il significato di coefficiente angolare  $\operatorname{tg} \alpha = a$  abbiamo, in definitiva

$$\operatorname{tg} \alpha = e \quad \text{da cui} \quad \alpha = \operatorname{arctg} e \approx 69,8025^\circ = 69^\circ 48' 09''$$

Questo quesito è simile alla domanda 3 del secondo problema assegnato nel corso di Ordinamento 2010.

#### Quesito n. 4: soluzione. (testo del quesito)

La funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$  ha come dominio  $\mathbb{R}$  ed essendo somma di funzioni continue risulta in tale insieme pure continua. In particolare lo è nell'intervallo  $[0, 1]$  dove agli estremi assume i valori

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = \sqrt[3]{1} + 1^3 - 1 = 1 > 0.$$

Per il teorema degli zeri possiamo quindi essere certi dell'esistenza in  $[0, 1]$  di almeno una soluzione dell'equazione  $f(x) = 0$ . Poiché la derivata prima di  $f$  è

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2 \quad \wedge \quad x \neq 0, \quad (1)$$

e risulta che  $f'(x) > 0 \forall x \in ]0, 1[$ , la funzione  $f$  è monotona strettamente crescente in  $[0, 1]$  per cui non vi potrà essere più di uno zero dell'equazione  $f(x) = 0$ .

Difatti se  $x_1$  e  $x_2$  fossero due radici tali quindi da soddisfare contemporaneamente alle  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  con  $x_1 \neq x_2$  (sia, per esempio,  $x_2 > x_1$ ), ciò contraddirebbe la proprietà di monotonia in quanto questa implica invece  $f(x_2) > f(x_1)$ .

Possiamo quindi essere certi dell'esistenza di un'unica radice  $\alpha$  nell'intervallo  $[0, 1]$  e per la sua determinazione approssimata possiamo applicare il metodo delle tangenti o di Newton. Pertanto ripresa la **relazione** che ne sta alla base

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2)$$

e sostituendovi la funzione e la (1) abbiamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt[3]{x_n} + x_n^3 - 1}{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x_n^2}} + 3x_n^2\right)} = g(x_n). \quad (3)$$

Scelto il valore con  $x_0 = 0,5$  per la prima iterazione si ottiene

$$x_1 = 0,5 - \frac{\sqrt[3]{0,5} + (0,5)^3 - 1}{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(0,5)^2}} + 3(0,5)^2\right)} = g(0,5) \approx 0,563558.$$

Introdotta tale risultato nella (3), la seconda applicazione del metodo dà

$$x_2 = g(0,563558) \approx 0,560100,$$

mentre il terzo passo fornisce

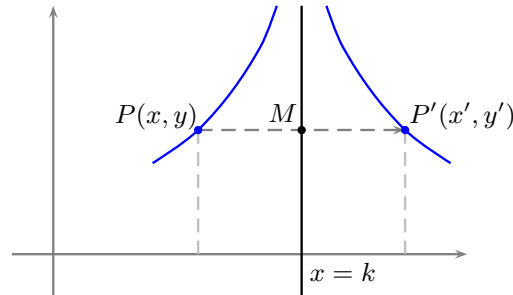
$$x_3 = g(0,560100) \approx 0,560088.$$

Questi risultati, assieme alla differenza  $x_{n+1} - x_n$ , sono riportati nella **tabella** seguente e mostrano come una stima numerica con tre cifre decimali corrette della radice richiesta sia  $\alpha = 0,560$ .

$n$	$x_n$	$x_{n+1}$	$x_{n+1} - x_n$
0	0,5	0,563558	+0,0635582
1	0,563558	0,560100	-0,0034578
2	0,560100	0,560088	-0,0000112

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Determiniamo innanzitutto le equazioni della simmetria assiale avente come asse la retta  $x = k$  e che lega le coordinate di un generico punto  $P(x, y)$  del piano con quelle della sua immagine  $P'(x', y')$  simmetrica rispetto alla retta.



**Fig. 1.** Asse di simmetria  $x = k$  di un insieme di punti.

In riferimento alla figura 1, l'appartenenza del punto medio  $M$  del segmento  $PP'$  alla retta di equazione  $x = k$  implica le condizioni

$$x_M = \frac{x + x'}{2} = k \quad \implies \quad x' = -x + 2k \quad \wedge \quad y' = y.$$

Pertanto le equazioni di tale simmetria sono

$$\sigma_k : \begin{cases} x' = -x + 2k \\ y' = y. \end{cases} \quad (1)$$

La funzione di equazione  $y = f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}$  avrà un grafico  $G$  simmetrico rispetto alla retta  $x = k$  quando l'immagine  $G'$  di  $G$  coincide con  $G$  stesso ossia, formalmente,  $\sigma_k: G \rightarrow G' = G$ . In tali ipotesi si dice pure che  $G$  è unito rispetto a tale trasformazione. In ogni caso le equazioni rappresentative di  $G$  e  $G'$  dovranno avere le medesime soluzioni  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Poiché l'equazione rappresentativa dell'immagine si ottiene sostituendo nella  $y = f(x)$  le espressioni della trasformazione inversa

$$\sigma_k^{-1} : \begin{cases} x = -x' + 2k \\ y = y', \end{cases}$$

si ha  $y' = f(-x' + 2k)$  e poiché il nome delle incognite di una equazione non ne altera le soluzioni, possiamo riscrivere quest'ultima pure come  $y = f(-x + 2k)$ . La simmetria di  $G$  implica ora che questa equazione coincida con quella originaria e ciò accade se è soddisfatta l'identità

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f(-x + 2k) \end{cases} \quad \implies \quad f(-x + 2k) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Le coordinate del punto  $P(x, y) \in \Gamma$  sono date in forma parametrica ossia tramite due equazioni dipendenti ciascuna da un parametro  $t$  appartenente all'intervallo chiuso  $t \in [0, 2\pi]$ . In particolare

$$\Gamma : \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (1)$$

Per determinare il luogo  $\Gamma$  conviene esplicitare la relazione che lega direttamente  $x$  con  $y$  eliminando la dipendenza dal parametro  $t$ . Nel caso proposto ciò si ottiene se riscriviamo le (1) come

$$\frac{x}{3} = \cos t \quad \wedge \quad \frac{y}{2} = \sin t.$$

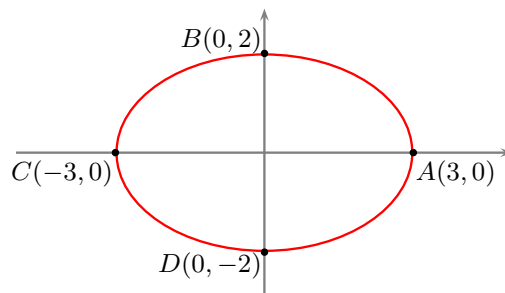
Dall'identità fondamentale  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  discende quindi

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \implies \quad \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

ossia  $\Gamma$  viene descritto da

$$\Gamma : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Quest'ultima equazione rientra nella forma canonica delle ellissi con centro nell'origine. In particolare essa rappresenta un'ellisse con semiasse maggiore orizzontale di lunghezza 3 e un semiasse verticale pari a 2. I vertici di questa ellisse sono quindi i punti  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(-3, 0)$ ,  $D(0, -2)$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Ellisse con semiasse 3 e 2 e centrata nell'origine.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Dato che sappiamo che la sig.ra Anna possiede due figli dei quali almeno una femmina, la probabilità che pure l'altra figlia sia femmina si può ottenere in base alla definizione classica di probabilità come rapporto tra i casi favorevoli

(entrambi i figli sono femmine) con il numero dei casi possibili. Questi non possono che essere i seguenti:

- caso 1. Primo figlio femmina, secondo figlio maschio (lo indichiamo come  $FM$ ),
- caso 2. Primo figlio femmina, secondo figlio femmina ( $FF$ ),
- caso 3. Primo figlio maschio, secondo figlio femmina ( $MF$ ).

I casi possibili sono quindi 3 e, va sottolineato, possiedono ciascuno la medesima probabilità di verificarsi cioè sono equiprobabili. L'evento favorevole è comunque  $FF$ . Pertanto la probabilità richiesta è  $P = 1/3$ .

(In mancanza dell'informazione sull'esistenza di una figlia femmina, l'eventualità che su due figli si abbia un maschio e una femmina,  $MF \vee FM$ , possiede invece probabilità doppia rispetto a  $MM$  e  $FF$ ).

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 8.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

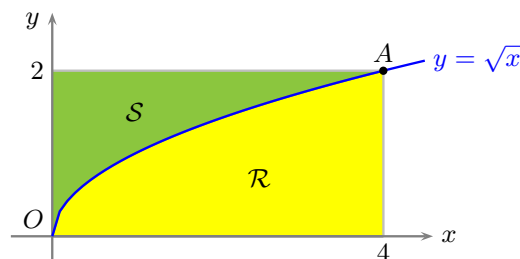
Il quesito è uguale a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 9.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Osservato che la funzione  $y = \sqrt{x}$  possiede come grafico un arco di parabola compreso nel I quadrante in quanto può scriversi come  $x = y^2$  con  $x, y \in \mathbb{R}^+$  e, individuata la regione  $\mathcal{R}$  (in giallo nella fig. 1), analizziamo dapprima se l'integrale assegnato

$$\int_0^4 2\pi x \sqrt{x} dx \quad (1)$$

rientri in uno dei casi contemplati dal quesito.



**Fig. 1.** Arco di parabola  $p$  e regione  $R$ .

Nel caso a) l'integrale che fornisce il volume del solido generato da  $\mathcal{R}$  nella rotazione attorno all'asse  $x$  è espresso dalla

$$\int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 \pi x dx \quad (2)$$

e appare ben diverso da (1).

Nel caso b) il volume del solido generato con una rotazione attorno all'asse  $y$  si potrà ottenere come differenza tra il volume del cilindro  $\mathcal{V}_{cil}$  di altezza pari all'ordinata del punto  $A(4, 2)$  e raggio di base pari a  $x_A$ , con il volume  $\mathcal{V}_S$  del solido generato dalla regione  $\mathcal{S}$  (in verde nella fig. 1). Per inciso, il calcolo qui richiesto coincide con quello proposto nel quesito 10 dell'esame di Ordinamento 2010 cui si rimanda per i particolari.

Tenuto conto che la  $y = \sqrt{x}$  diviene  $x = y^2$  se la si considera come funzione della variabile  $y$ , abbiamo

$$\mathcal{V}_{cil} - \mathcal{V}_S = \pi(x_A)^2 \cdot y_A - \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy. \quad (3)$$

Comunque pure questo appare diverso dall'integrale (1).

Infine, se  $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi (\sqrt{x})^2$  è l'area del semicerchio sezione di  $\mathcal{R}$  con piani perpendicolari all'asse  $x$  e raggio  $\sqrt{x}$ , l'integrale del caso c) assumerebbe la forma

$$\int_0^4 \mathcal{A}(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{2} \pi x dx \quad (4)$$

ancora una volta diverso da (1). Va osservato che, in tali ipotesi, la regione  $\mathcal{R}$  non è la base di tale solido ma ne è a sua volta solo una sezione. Lo sarebbe solo se il raggio dei semicerchi fosse pari a  $\sqrt{x}/2$  e quindi  $\sqrt{x}$  fosse la misura del diametro.

Comunque le osservazioni sopra si basano solo sulla forma analitica dell'integrale e non permettono di individuare con certezza la risposta corretta. Converrà quindi calcolare esplicitamente i diversi integrali in modo da confrontare direttamente il valore numerico da essi fornito.

Innanzitutto il valore dell'integrale (1) proposto è

$$\begin{aligned} \int_0^4 2\pi x \sqrt{x} dx &= 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx = 2\pi \left[ \frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^4 \\ &= 2\pi \left[ \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = \frac{4}{5} \pi \cdot 4^{5/2} = \frac{128}{5} \pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Nel caso a), il volume del solido di rotazione attorno  $x$  è dato da (2) e risulta

$$\int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 \pi x dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \frac{4^2}{2} = 8\pi \neq \frac{128}{5} \pi$$

Possiamo certamente escludere quindi la risposta a).

b) Il volume del solido di rotazione si deduce dall'integrale (3) per cui (si veda pure il quesito 10 di Ordinamento)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{cil} - \mathcal{V}_S &= \pi(x_A)^2 \cdot y_A - \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy \\ &= \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \pi \int_0^2 y^4 dy = 32\pi - \pi \left[ \frac{y^5}{5} \right]_0^2 \\ &= 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi \end{aligned}$$

e quindi coincide con il valore di (5). La risposta corretta è quindi b) e l'integrale definito (1) esprime pertanto il volume del solido generato da  $\mathcal{R}$  in una rotazione completa attorno all'asse  $y$ .

c) In quest'ultimo caso il volume si ottiene dall'integrale (4) che dà

$$\int_0^4 \frac{1}{2}\pi x dx = \frac{1}{2}\pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{\pi}{4} \cdot 4^2 = 4\pi \neq \frac{128}{5}\pi$$

ancora diverso dal valore aspettato di (5).

# ESAME 2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  definite, per tutti gli  $x$  reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \pi x.$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ , si studino  $f$  e  $g$  e se ne disegnino i rispettivi grafici  $G_f$  e  $G_g$ .
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di  $G_f$  con la retta  $y = -3$ . Successivamente, si considerino i punti di  $G_g$  a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo  $[-6; 6]$  e se ne indichino le coordinate.
3. Sia  $R$  la regione del piano delimitata da  $G_f$  e  $G_g$  sull'intervallo  $[0; 2]$ . Si calcoli l'area di  $R$ .
4. La regione  $R$  rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di  $R$  a distanza  $x$  dall'asse  $y$  la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da  $h(x) = 3 - x$ . Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

Soluzione

## • Problema n. 2

Sia  $f$  la funzione definita sull'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove  $a$  e  $b$  sono due reali che si chiede di determinare sapendo che  $f$  ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che  $f(0) = 2$ .

1. Si provi che  $a = 1$  e  $b = -1$ .
2. Si studi su  $\mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$  e se ne tracci il grafico  $\Gamma$  nel sistema di riferimento  $Oxy$ .

3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da  $\Gamma$ , dall'asse  $y$  e dalla retta  $y = 3$ .
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con  $x_i$  l'anno di osservazione e con  $y_i$  il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$y_i$	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione  $g$  definita su  $\mathbb{R}^+$  se per ciascun  $x_i$  oggetto dell'osservazione, si ha:  $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$ . Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione  $f$  del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

Soluzione

### Questionario

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Soluzione

2. Si trovi il punto della curva  $y = \sqrt{x}$  più vicino al punto di coordinate (4;0).

Soluzione

3. Sia  $R$  la regione delimitata dalla curva  $y = x^3$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 2$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .

Soluzione

4. Il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi  $n$ .

Soluzione

5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva  $y = \cos x$  e dall'asse  $x$  da  $x = 1$  a  $x = 2$  radianti.

Soluzione

6. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$

Soluzione

7. Si provi che l'equazione:  $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$  ha una sola radice compresa fra  $-1$  e  $0$ .

Soluzione

8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?

Soluzione

9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

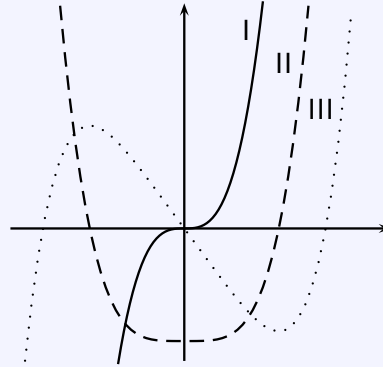
Soluzione

10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione  $f$ , un altro lo è della funzione derivata  $f'$  e l'altro ancora di  $f''$ .

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	$f$	$f'$	$f''$
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.



Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. La funzione  $f$  di equazione  $f(x) = x^3 - 4x$  è rappresentata da un polinomio di terzo grado definito  $\forall x \in \mathbb{R}$ . La fattorizzazione di quest'ultimo in

$$f(x) = x(x^2 - 4), \quad (1)$$

suggerisce l'esistenza di una simmetria dispari: difatti è soddisfatta l'identità

$$f(-x) = (-x)[(-x)^2 - 4] = -x(x^2 - 4) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

per cui il grafico  $G_f$  della funzione dev'essere simmetrico centralmente rispetto all'origine  $O$ . Il segno di  $f$  discende dallo studio dei due fattori di (1)

$$f(x) \geq 0 \implies x \geq 0, \quad x^2 - 4 \geq 0,$$

quest'ultimo risolto dall'insieme  $x \leq -2 \vee x \geq 2$ . Combinati i fattori nel grafico di fig. 1, questo determina la positività di  $f$  in  $-2 \leq x \leq 0$  oppure  $x \geq 2$ .

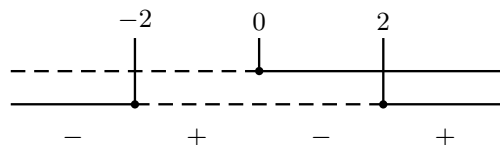


Fig. 1. Segno di  $f$ .

I limiti all'infinito sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(x^2 - 4) = \pm\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 4) = +\infty.$$

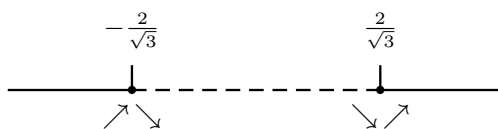
Dato che il limite di  $f(x)/x$  per  $x \rightarrow \infty$  non è finito

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 4) = +\infty,$$

non possono esistere asintoti obliqui e ciò conferma quanto già noto per le cubiche ossia l'assenza per tale classe di funzioni di asintoti obliqui.

La derivata prima è  $f'(x) = 3x^2 - 4$  e risulta positiva nell'insieme

$$f'(x) \geq 0 \quad 3x^2 - 4 \geq 0 \quad x^2 \geq \frac{4}{3} \quad \text{cioè} \quad x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \vee x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$$



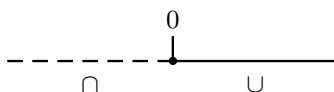
**Fig. 2.** Segno di  $f'$ .

per cui il punto di ascissa  $-2/\sqrt{3}$  è un punto di massimo mentre  $2/\sqrt{3}$  è l'ascissa del punto di minimo (fig. 2). Le corrispondenti ordinate si ottengono sostituendo in (1) e sono

$$f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{3} - 4\right) = \mp \frac{16}{3\sqrt{3}}.$$

Poiché  $f''(x) = 6x \geq 0$  se  $x \geq 0$  (fig. 3), la  $f$  è convessa o volge la concavità verso l'alto se  $x > 0$ .

Il grafico richiesto  $G_f$  è rappresentato nella figura seguente (fig. 4).

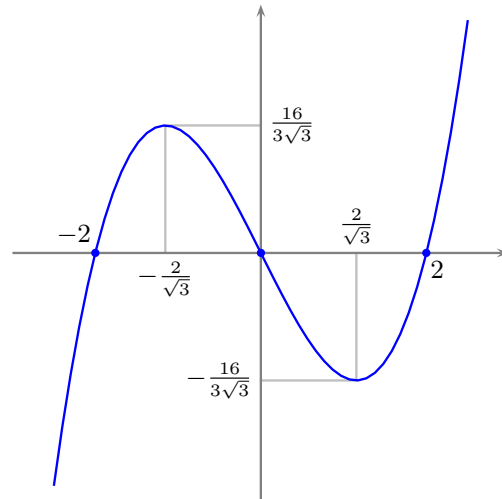


**Fig. 3.** Segno  $f''$ .

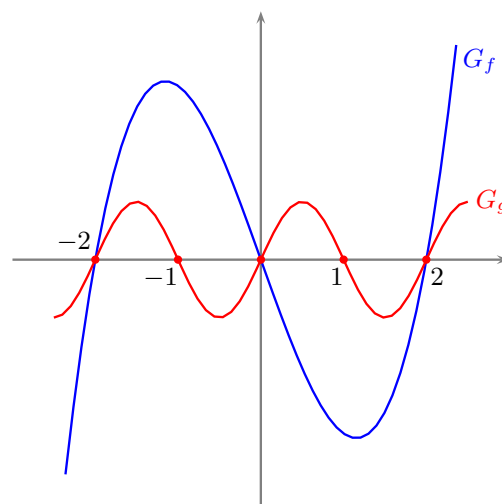
• Il grafico della  $g(x) = \text{sen}(\pi x)$  si ottiene invece dal grafico, noto, della funzione  $y = \text{sen}(x)$  dopo aver notato la periodicità, pari a  $T = 2$ , di  $g$ . Difatti si ha

$$g(x + 2) = \text{sen}[\pi(x + 2)] = \text{sen}(\pi x + 2\pi) = \text{sen}(\pi x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, per  $x \in [-2, 2]$ , la  $g$  sviluppa due periodi completi. Disposti  $G_f$  e  $G_g$  sullo stesso piano  $Oxy$  otteniamo la fig. 5.



**Fig. 4.** Grafico  $G_f$  della funzione  $f(x) = x^3 - 4x^2$ .



**Fig. 5.** Grafici  $G_f$  e  $G_g$ .

2. Le intersezioni di  $G_f$  con la retta di equazione  $y = -3$  si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x^3 - 4x^2 \\ y = -3. \end{cases} \quad (2)$$

Poiché l'ordinata del minimo relativo, già calcolata **precedentemente**, soddisfa alla disuguaglianza

$$y_m = -\frac{16}{3\sqrt{3}} < -3$$

in quanto  $-16 < -9\sqrt{3}$  come  $16 > 9\sqrt{3}$  così come, elevando al quadrato, si trova valida la  $256 > 243$ , segue che il sistema (2) dovrà presentare tre soluzioni. Difatti, ottenuta l'equazione risolvente eliminando l'incognita  $y$ ,  $x^3 - 4x + 3 = 0$ , notiamo che il valore  $x = 1$  è una sua soluzione. Di conseguenza, tramite la ben nota regola di Ruffini,

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

possiamo scomporre il polinomio e ottenere  $x^3 - 4x + 3 = (x - 1)(x^2 + x - 3) = 0$ . Le rimanenti due soluzioni si deducono annullando il secondo fattore

$$x^2 + x - 3 = 0 \implies x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2},$$

per cui le ascisse richieste sono, in definitiva,  $x_1 = 1$  e  $x_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{13})/2$ . I punti di  $G_g$  a tangente orizzontale si individuano, oltreché dalla conoscenza di  $G_g$ , dalla condizione  $g'(x) = 0$  ossia

$$\pi \cos(\pi x) = 0 \implies \cos(\pi x) = 0 \implies \pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

da cui  $x = \frac{1}{2} + k$ . Imponendo la condizione che vuole tali ascisse comprese tra  $-6$  e  $6$ ,

$$-6 \leq \frac{1}{2} + k \leq 6$$

discende che i valori accettabili per  $k$  rientrano nell'intervallo  $-6,5 \leq k \leq 5,5$  cioè sono i numeri  $k = -6, -5, \dots, 4, 5$ , per un totale di 12 punti. Le corrispondenti ordinate sono

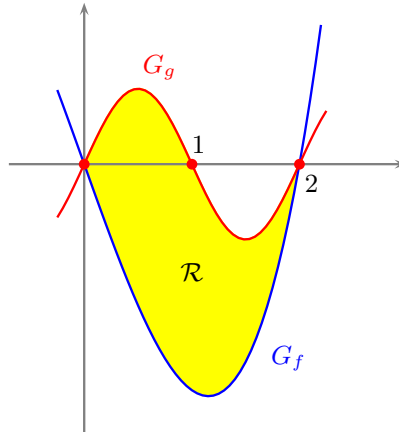
$$g\left(\frac{1}{2} + k\right) = \sin \pi \left(\frac{1}{2} + k\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

e i 12 punti possiedono coordinate

$$\left(\frac{1}{2} + k, (-1)^k\right) \quad -6 \leq k \leq 5 \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

3. L'area della regione  $\mathcal{R}$  è rappresentata in figura 6 e formalmente dall'integrale

$$\mathcal{A} = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 [\sin(\pi x) - x^3 + 4x] dx.$$



**Fig. 6.** Regione  $\mathcal{R}$  tra  $G_f$  e  $G_g$ .

Il corrispondente integrale indefinito è

$$\begin{aligned} \int (\text{sen } \pi x - x^3 + 4x) dx &= \int \text{sen } \pi x dx - \int x^3 dx + 4 \int x dx \\ &= \int \text{sen } \pi x dx - \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Posto  $\pi x = t$  è  $x = \frac{1}{\pi}t$ ,  $dx = \frac{1}{\pi}dt$ , l'integrale rimasto si risolve con la sostituzione

$$\int \text{sen } \pi x dx = \int \text{sen } t \cdot \frac{1}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int \text{sen } t dt = \frac{1}{\pi} (-\cos t) + c \quad (3)$$

per cui abbiamo

$$\int (\text{sen } \pi x - x^3 + 4x) dx = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{x^4}{4} + 2x^2 + c$$

e l'area  $\mathcal{A}$  della regione  $\mathcal{R}$  risulta

$$\mathcal{A} = \left[ -\frac{\cos \pi x}{\pi} - \frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{\cos 2\pi}{\pi} - \frac{16}{4} + 8 + \frac{\cos 0}{\pi} = 4.$$

4. Supposta  $\mathcal{R}$  come la superficie di una vasca, la profondità di quest'ultima è espressa dalla funzione  $h(x) = 3 - x$ . Fissato comunque  $x$ , la profondità è costante in un piano perpendicolare all'asse  $x$ . In particolare, se  $x = 0$  la profondità è  $h(0) = 3$  metri, diminuisce gradualmente passando da 0 ad  $x = 2$ , punto dove assume il valore di  $h(2) = 1$  metro. Le sezioni di tale vasca (si veda la fig. 7) sono dei rettangoli con il lato "orizzontale" di lunghezza (positiva)

$$l_1 = g(x) - f(x) = \text{sen } \pi x - x^3 + 4x$$

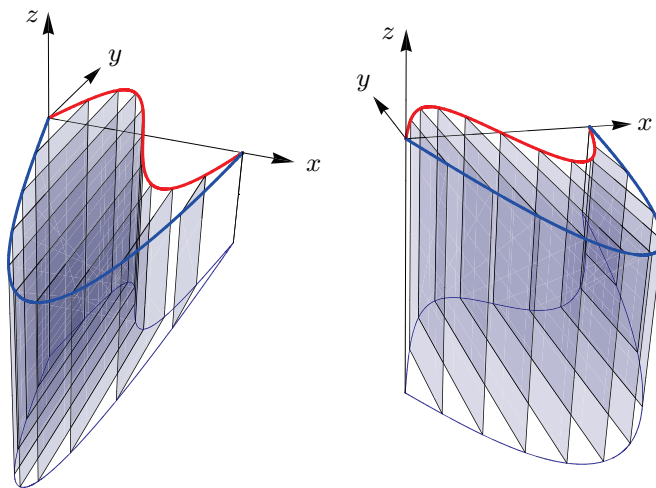
e lato “verticale” (ossia la profondità)  $l_2 = h(x) = 3 - x$ , grandezza pure positiva nell’intervallo  $[0, 2]$ . L’area di una sezione della piscina è quindi

$$\mathcal{A}(x) = l_1 \cdot l_2 = (\sin \pi x - x^3 + 4x) \cdot (3 - x)$$

e il volume complessivo del “solido” si ottiene richiamando l’espressione

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(x) dx$$

che fornisce il volume di un solido del quale siano note le aree  $\mathcal{A}(x)$  delle sue sezioni piane.



**Fig. 7.** Rappresentazione della vasca da due punti di vista e sue sezioni piane.

L’integrale da risolvere è

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_0^2 (\sin \pi x - x^3 + 4x)(3 - x) dx \\ &= \int_0^2 (3 \sin \pi x - x \sin \pi x - 3x^3 + x^4 + 12x - 4x^2) dx \end{aligned} \quad (4)$$

dove l’unico termine non immediato per l’integrazione è

$$\int x \sin \pi x dx. \quad (5)$$

Per quanto già visto nel punto (3) precedente, e cioè che

$$\int \sin \pi x dx = \frac{-\cos \pi x}{\pi} + c,$$

procediamo in (5) integrando per parti. Discende

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} \pi x \, dx &= x \cdot \left(-\frac{\cos \pi x}{\pi}\right) - \int -\frac{\cos \pi x}{\pi} \, dx \\ &= -\frac{x \cos \pi x}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int \cos \pi x \, dx\end{aligned}$$

e poiché allo stesso modo di (3) si ha

$$\int \cos \pi x \, dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x + c,$$

risulta

$$\int x \operatorname{sen} \pi x \, dx = -\frac{x \cos \pi x}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \operatorname{sen} \pi x + c.$$

Integrando direttamente i restanti termini di (4),

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \left[ 3 \cdot \left(-\frac{\cos \pi x}{\pi}\right) - \left(-\frac{x \cos \pi x}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \operatorname{sen} \pi x\right) - 3 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right. \\ &\quad \left. + 12 \cdot \frac{x^2}{2} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \left[ -\frac{3}{\pi} + \frac{2}{\pi} - 12 + \frac{32}{5} + 24 - \frac{32}{3} - \left(-\frac{3}{\pi}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} + 12 + 32 \left(\frac{3-5}{15}\right) = \frac{2}{\pi} + 12 - \frac{64}{15} \\ &= \left(\frac{2}{\pi} + \frac{116}{15}\right) \text{m}^3\end{aligned}$$

Il passaggio dai metri cubi ai litri è infine immediato

$$\mathcal{V} = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{116}{15}\right) \text{m}^3 = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{116}{15}\right) \cdot 10^3 \text{l} = 8369,9 \text{l}.$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1. Definita la funzione rappresentata da  $f(x) = (ax + b)e^{-x/3} + 3$ , le condizioni fornite dal testo si traducono nel sistema

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(4) = 0. \end{cases}$$

La prima si esplicita in

$$2 = (a \cdot 0 + b) \cdot e^0 + 3 \implies b = -1,$$

mentre, calcolata la  $f'(x)$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= D[(ax - 1) \cdot e^{-x/3} + 3] = a \cdot e^{-x/3} + (ax - 1) \cdot e^{-x/3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= e^{-x/3} \left(a - \frac{ax}{3} + \frac{1}{3}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

la seconda diventa

$$f'(4) = e^{-4/3} \left(a - \frac{4}{3}a + \frac{1}{3}\right) = 0 \implies -\frac{a}{3} + \frac{1}{3} = 0 \implies a = 1.$$

2. Il dominio di

$$f(x) = (x - 1)e^{-x/3} + 3 \quad (2)$$

è l'insieme  $\mathbb{R}$  e in tale insieme non possiede evidenti simmetrie in quanto

$$f(-x) = (-x - 1)e^{-(-x/3)} + 3 = -(x + 1)e^{x/3} \neq \pm f(x).$$

Non è, evidentemente, nemmeno periodica. Lo studio del segno conduce alla disequazione  $(x - 1)e^{-x/3} + 3 \geq 0$  che non è risolvibile per via elementare in quanto coinvolge sia termini razionali che termini trascendenti. Tralasciamo quindi questo punto riproponendoci di riconsiderarlo al **termine** dello studio.

La funzione è costituita da funzioni continue e non presenta particolari punti di singolarità per cui i limiti da affrontare sono solo quelli agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x/3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$$

con  $t = -\frac{x}{3}$ . Con tali risultati vi è quindi la possibilità dell'esistenza di un asintoto obliquo cosicché va risolto il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Questo si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - 1}{x}\right) e^{-x/3} + \frac{3}{x}$$

ma, dato che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

per la teoria sui limiti delle funzioni razionali fratte, e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x/3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0,$$

risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

per cui non esistono asintoti obliqui. Il limite a  $+\infty$  si scompone in

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x/3} - e^{-x/3} + 3), \quad (3)$$

ma osservato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x/3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3,$$

l'attenzione si sposta nel risolvere l'indeterminazione del termine

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x/3}.$$

Riscritta pertanto la funzione ad argomento come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x/3}}$$

analizziamo preventivamente l'applicabilità del teorema di De L'Hôpital calcolando il limite del rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D(x)}{D(e^{x/3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{3}e^{x/3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^{x/3}} = 0$$

in quanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x/3} = +\infty$ . È pertanto possibile applicare il teorema di De L'Hôpital e affermare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x/3} = 0$$

per cui il limite (3) si risolve in

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x/3} - e^{-x/3} + 3) = 0 - 0 + 3 = 3.$$

La retta  $y_a = 3$  è perciò un asintoto orizzontale per la funzione.

Il confronto tra la funzione e tale asintoto si ottiene risolvendo la disequazione  $f(x) \geq y_a$  che risolta fornisce

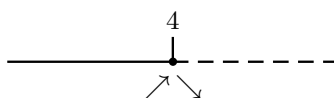
$$(x-1)e^{-x/3} + 3 \geq 3 \implies (x-1)e^{-x/3} \geq 0 \implies x \geq 1.$$

Il grafico della funzione  $f$  sta quindi al di sotto dell'asintoto, lo attraversa in  $x = 1$ , mentre sta al di sopra per  $x > 1$ .

La derivata prima si ottiene eseguendone esplicitamente il calcolo oppure sostituendo  $a = 1$  nella espressione generale (1) già trovata: si ha

$$f'(x) = e^{-x/3} \left( \frac{4}{3} - \frac{x}{3} \right) = \frac{e^{-x/3}}{3} (4 - x), \quad (4)$$

e la disequazione  $f'(x) \geq 0$  implica  $4 - x \geq 0$ , risolta nell'insieme  $x \leq 4$ . Pertanto (fig. 1) la funzione  $f$  presenta un massimo assoluto in  $x = 4$  le cui coordinate sono  $M(4, 3e^{-4/3} + 3) \equiv (4, \approx 3,79)$ .

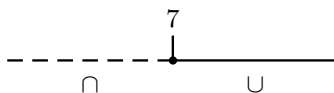


**Fig. 1.** Segno di  $f'$ .

Il calcolo della derivata seconda fornisce

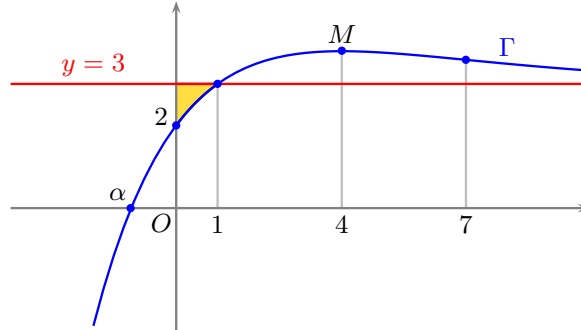
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3} \left[ e^{-x/3} \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot (4 - x) + e^{-x/3} (-1) \right] \\ &= \frac{1}{9} e^{-x/3} (x - 7) \end{aligned}$$

per cui la condizione  $f''(x) \geq 0$  è risolta dalla  $x - 7 \geq 0$  cioè per  $x \geq 7$  (fig. 2).



**Fig. 2.** Segno di  $f''$ .

La  $f$  presenta quindi un flesso in  $x = 7$  mentre volge la concavità verso il basso se  $x < 7$ , verso l'alto se  $x > 7$ . Notato che per  $f(0) = 2$  e ripreso lo studio del segno iniziale, la  $f$  dovrà intersecare l'asse  $x$  in un punto di ascissa  $\alpha$  negativa. Il suo segno è quindi  $f(x) \geq 0$  se  $x \geq \alpha$ . Il grafico  $\Gamma$  richiesto è riassunto nelle fig. 3.



**Fig. 3.** Grafico  $\Gamma$  della funzione  $f$ .

3. La regione del piano della quale si chiede l'area è evidenziata in colore nella figura 3 e, dato che l'ascissa del punto di intersezione tra  $\Gamma$  e l'asintoto, per quanto già discusso nel punto precedente, è pari ad 1, l'area richiesta è data dall'integrale

$$\mathcal{A} = \int_0^1 [3 - f(x)] dx = \int_0^1 -(x - 1)e^{-x/3} dx. \quad (5)$$

Se poniamo  $t = -\frac{x}{3}$  da cui  $x = -3t$  e  $dx = -3 dt$  e quindi

$$\int e^{-x/3} dx = \int e^t (-3 dt) = -3e^t + c = -3e^{-x/3} + c,$$

possiamo procedere con il metodo per parti nell'integrazione del corrispondente integrale indefinito

$$\int (x - 1)e^{-x/3} dx$$

e ottenere

$$\begin{aligned} \int (x - 1)e^{-x/3} &= (-3e^{-x/3}) \cdot (x - 1) - \int -3e^{-x/3} \cdot 1 dx \\ &= -3(x - 1)e^{-x/3} + 3 \int e^{-x/3} dx \\ &= -3(x - 1)e^{-x/3} - 9e^{-x/3} + c = -3(x + 2)e^{-x/3} + c. \end{aligned}$$

Ne segue che il calcolo dell'area l'integrale (5) fornisce

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= - \left[ -3(x + 2)e^{-x/3} \right]_0^1 = \left[ 3(x + 2)e^{-x/3} \right]_0^1 \\ &= 3 \cdot 3e^{-1/3} - (3 \cdot 2) = 9e^{-1/3} - 6 \approx 0,4488. \end{aligned}$$

4. Per verificare come  $f(x) = (x-1)e^{-x/3} + 3$  sia una funzione che rappresenta l'andamento misurato del profitto, dobbiamo calcolare le differenze in valore assoluto  $z_i = |f(x_i) - y_i|$  e assicurarci che siano minori o uguali a  $10^{-1}$  ossia sia rispettata la condizione

$$|f(x_i) - y_i| < 0,1 \quad \text{con} \quad i = 0, \dots, 6 \quad (6)$$

dove  $i = 0$  corrisponde all'anno 2004 e così via. Procedendo esplicitamente al calcolo

$$\begin{aligned} |f(0) - 1,97| < 0,1 &\implies |2 - 1,97| < 0,1 &\implies 0,03 < 0,1 \\ |f(1) - 3,02| < 0,1 &\implies |3 - 3,02| < 0,1 &\implies 0,02 < 0,1 \\ |f(2) - 3,49| < 0,1 &\implies |3,5134 - 3,49| < 0,1 &\implies 0,023 < 0,1 \\ |f(3) - 3,71| < 0,1 &\implies |3,735 - 3,71| < 0,1 &\implies 0,025 < 0,1 \\ |f(4) - 3,80| < 0,1 &\implies |3,79 - 3,80| < 0,1 &\implies 0,009 < 0,1 \\ |f(5) - 3,76| < 0,1 &\implies |3,755 - 3,76| < 0,1 &\implies 0,0045 < 0,1 \\ |f(6) - 3,65| < 0,1 &\implies |3,676 - 3,65| < 0,1 &\implies 0,026 < 0,1 \end{aligned}$$

si constata che in tutti gli anni la funzione  $f$  soddisfa alla condizione richiesta. Circa la richiesta sull'evoluzione futura del profitto ossia che questo non potrà essere inferiore negli anni successivi ai 3 milioni di euro, la risposta non potrà che essere *teoricamente* positiva se si considera l'andamento della funzione  $f$ . Difatti questa, per  $x > 1$ , tende asintoticamente a 3 assumendo comunque valori maggiori (se  $x > 1$ ,  $f(x) > 3$ ). Se però consideriamo l'approssimazione con la quale è nota la funzione, la disequazione

$$|f(x_i) - 3| < 0,1$$

implica come *plausibile* l'intervallo di valori per la  $f$ ,

$$3 - 0,1 < f(x_i) < 3 + 0,1 \quad \implies \quad 2,9 < f(x_i) < 3,1$$

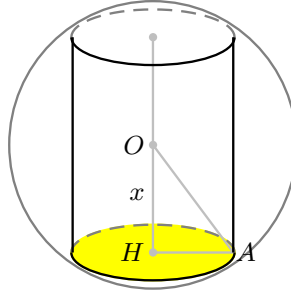
cosicché per  $x_i > 6$  non è certo che si abbia  $f(x_i) > 3$  ma solo che  $f(x_i) > 2,9$ . Non si può quindi essere sicuri che in futuro il profitto sia maggiore di 3 milioni di euro.

#### Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Posto  $x = \overline{OH}$  la distanza di una base del cilindro dal centro  $O$  della sfera (fig. 1), l'altezza di questo è  $h = 2x$  con  $0 \leq 2x \leq 2r$  da cui  $0 \leq x \leq r$  con  $r = 60$  cm.

Se  $A$  è un punto qualsiasi della circonferenza di base,  $OA$  è un raggio della sfera per cui il quadrato del raggio di base del cilindro si deduce con il teorema di Pitagora applicato a  $\triangle OHA$  (fig. 1)

$$\overline{AH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OH}^2 \quad \implies \quad \overline{AH}^2 = r^2 - x^2,$$



**Fig. 1.** Sfera e cilindro inscritto.

e il suo volume è quindi

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \pi \overline{AH}^2 \cdot (2\overline{OH}) = 2\pi(r^2 - x^2)x \\ 0 \leq x \leq r. \end{cases}$$

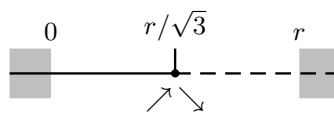
Il calcolo della derivata prima fornisce

$$\mathcal{V}' = 2\pi[-2x \cdot x + r^2 - x^2] = 2\pi(-3x^2 + r^2)$$

e quest'ultima è positiva

$$\mathcal{V}' \geq 0 \quad \text{se} \quad -3x^2 + r^2 \geq 0 \quad \implies \quad -\frac{r}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Considerando le limitazioni per  $x$ , la rappresentazione del segno di  $\mathcal{V}'$  (fig. 2) permette di riconoscere la presenza di un massimo in corrispondenza di  $x = r/\sqrt{3}$ .



**Fig. 2.** Segno di  $\mathcal{V}'$ .

Il volume corrispondente è

$$\mathcal{V}_{max} = 2\pi \cdot \frac{r}{\sqrt{3}} \left( r^2 - \frac{r^2}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}$$

per cui sostituendo il valore  $r = 60$  cm otteniamo

$$\mathcal{V}_{max} = \frac{4\pi(60 \text{ cm})^3}{3\sqrt{3}} = 96.000\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

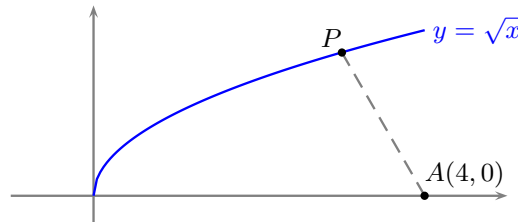
e quindi considerando che  $1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ l}$ ,

$$V_{max} = 96.000\pi\sqrt{3} \cdot 10^{-3} \text{ l} = 96\pi\sqrt{3} \text{ l} \approx 522,3742 \text{ l}.$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

La curva di equazione  $y = \sqrt{x}$  con  $x \geq 0$  è un arco di parabola con asse coincidente con l'asse  $x$  (fig. 1) in quanto, esplicitate le condizioni di esistenza ed elevando al quadrato entrambi i membri, si può riscrivere come

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y^2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$



**Fig. 1.** Curva rappresentativa di  $y = \sqrt{x}$ .

Un suo punto generico  $P(x_P, y_P)$  avrà coordinate  $P(x, \sqrt{x})$  e la sua distanza da  $A(4,0)$  è

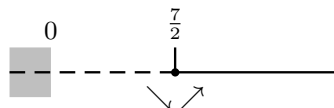
$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + x} \quad \text{con } x \geq 0.$$

Anziché studiare la precedente funzione è più conveniente trattare il suo quadrato ossia  $d^2$  essendo comunque  $d \geq 0$ . Pertanto la funzione della quale cercare il minimo è

$$\begin{aligned} d^2 = f(x) &= (x-4)^2 + x = x^2 - 8x + 16 + x \\ &= x^2 - 7x + 16 \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

La sua derivata prima è  $f'(x) = 2x - 7$  e risulta  $f'(x) \geq 0$  per  $x \geq \frac{7}{2}$ .

In modo alternativo, si può determinare tale valore osservando come la funzione  $f(x) = x^2 - 7x + 16$  rappresenti, a sua volta, una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Il valore minimo di  $f(x)$  sarà quindi raggiunto in corrispondenza dell'ascissa del vertice che, appunto, coincide con  $x = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2}$ .



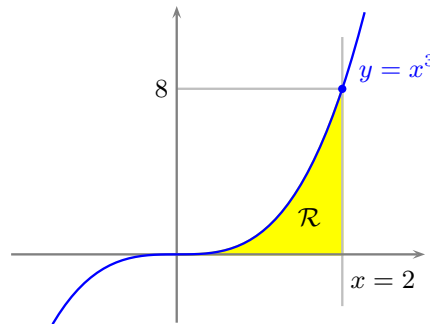
**Fig. 2.** Segno di  $d^2 = f(x)$ .

Il segno di  $f'$  permette di riconoscere un minimo in corrispondenza di tale valore (fig. 2) cosicché il punto  $P$  della curva che ha distanza minima da  $A$  risulta in definitiva

$$P\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

L'equazione  $y = x^3$  è ben conosciuta in quanto rappresenta la più semplice parabola cubica. Il suo grafico è rappresentato dalla fig. 1 dove è pure rappresentata la regione finita  $\mathcal{R}$  ed il punto di ascissa  $x = 2$  con ordinata  $h = 2^3 = 8$ .

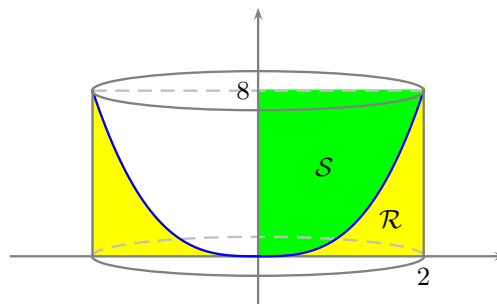


**Fig. 1.** Parabola cubica e regione  $\mathcal{R}$  (sistema non isometrico).

Il volume richiesto  $W$  si ottiene dalla differenza tra il volume del cilindro avente raggio di base  $r = 2$  ed altezza  $h = 8$  ossia

$$\mathcal{V}_{cil} = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi,$$

con il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $y$  della regione  $\mathcal{S}$  (in verde nella fig. 2) sottostante alla curva  $x = \sqrt[3]{y}$  e inversa di  $y = x^3$ .



**Fig. 2.** Solido  $W$  (in giallo) generato dalla rotazione della regione  $\mathcal{R}$ .

Il volume  $\mathcal{V}_S$  di questo solido si calcola tramite l'integrale definito

$$\mathcal{V}_S = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} dy$$

che sfrutta la formula che fornisce i volumi dei solidi di rotazione attorno ad uno degli assi coordinati.

Si ha quindi

$$\mathcal{V}(W) = \mathcal{V}_{cil} - \mathcal{V}_S = 32\pi - \pi \int_0^8 y^{2/3} dy,$$

da cui procedendo con l'integrazione elementare otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(W) &= 32\pi - \pi \left[ \frac{y^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} \right]_0^8 = 32\pi - \frac{3}{5}\pi \left[ y^{5/3} \right]_0^8 \\ &= 32\pi - \frac{3\pi}{5} \cdot 8^{5/3} = 32\pi - \frac{3 \cdot 32\pi}{5} \\ &= \frac{64}{5} \pi. \end{aligned}$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a 4 a 4 è dato dal coefficiente binomiale

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} \quad \text{con} \quad n \geq 4,$$

mentre il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a gruppi di 3 è

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} \quad \text{con} \quad n \geq 3.$$

Posta la condizione che questi numeri siano uguali,  $C_{n,4} = C_{n,3}$  si tratta di risolvere l'equazione che ne discende nell'incognita  $n$  e con la condizione  $n \geq 4$ . Pertanto

$$\begin{cases} C_{n,4} = C_{n,3} \\ n \geq 4 \end{cases} \implies \binom{n}{4} = \binom{n}{3}$$

che esplicitamente diventa

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \quad (1)$$

Considerando che  $(n-3)! = (n-3)(n-4)!$  e, per la medesima proprietà del fattoriale,

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)! \quad \text{e} \quad 4! = 4 \cdot 3!,$$

la (1) diviene

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!}.$$

Semplificate le frazioni, moltiplichiamo per  $4!$  e otteniamo

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 4n(n-1)(n-2).$$

La fattorizzazione dei termini comuni nel medesimo membro

$$n(n-1)(n-2)(n-3-4) = 0$$

fornisce infine le soluzioni  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 7$ , delle quali solo il valore  $n = 7$  soddisfa la condizione  $n \geq 4$  e perciò risulta accettabile.

In alternativa considerando che  $n \geq 4$ , si può dividere per  $n!$  entrambi i membri di (1) e moltiplicare per il prodotto dei denominatori. Giungiamo alla

$$3!(n-3)! = 4!(n-4)!$$

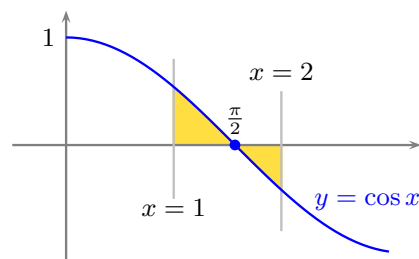
che, osservato come sia  $4! = 4 \cdot 3!$  e  $(n-3)! = (n-3)(n-4)!$ , si riscrive come

$$3!(n-3)(n-4)! = 4 \cdot 3!(n-4)!$$

ed infine si semplifica nella  $n-3 = 4$  da cui, ancora,  $n = 7$ .

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Il grafico della funzione  $y = \cos x$  è noto per cui per determinare l'area della regione richiesta va osservato preliminarmente che  $\cos x < 0$  se  $\frac{\pi}{2} < x < 2$ .



**Fig. 1.** Grafico di  $y = \cos x$  e regione  $\mathcal{R}$ .

Tenendo conto di ciò, l'area (in colore nella fig. 1) dovrà essere calcolata come somma delle due regioni che la costituiscono, la seconda delle quali sottostante all'asse  $x$ . Pertanto

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

dove ciascun addendo è rappresentato rispettivamente dagli integrali definiti

$$\mathcal{A}_1 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \quad \mathcal{A}_2 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^2 \cos x \, dx.$$

Considerando che  $\int \cos x \, dx = \sin x + c$ , risulta che

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^2 \cos x \, dx = [\sin x]_1^{\pi/2} - [\sin x]_{\pi/2}^2 \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 1 - [\sin x]_{\pi/2}^2 = 1 - \sin 1 - \sin 2 + 1 \\ &= 2 - \sin 1 - \sin 2 \approx 0,2492. \end{aligned}$$

### Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} \quad (1)$$

appare rientrare in un caso di indeterminazione del tipo  $0/0$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a = 0 \quad \text{con} \quad a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

e  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = a - a = 0$ .

Poiché invece il limite del rapporto delle derivate delle funzioni a numeratore e denominatore dell'argomento di (1)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{D(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a)}{D(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1} = 1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

esiste, è possibile applicare il teorema di De L'Hôpital e concludere che

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

In alternativa si può riscrivere la funzione ad argomento del limite come

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} &= \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \right) \cdot \frac{1}{x - a} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos a - \operatorname{sen} a \cos x}{\cos x \cos a (x - a)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x - a)}{x - a} \cdot \frac{1}{\cos x \cos a} \end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\cos x \cos a} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 a}$$

in quanto, posto  $t = x - a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

e  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Posto

$$f(x) = x^{2011} + 2011x + 12$$

notiamo che tale funzione polinomiale è continua in  $\mathbb{R}$  e quindi pure nell'intervallo  $[-1, 0]$ . I valori di  $f$  agli estremi di tale intervallo sono

$$f(-1) = (-1)^{2011} - 2011 + 12 = -1 - 2011 + 12 = -2000 < 0$$

e  $f(0) = 0 + 0 + 12 > 0$ , cosicché per il teorema degli zeri esiste almeno un valore interno a  $[-1, 0]$  dove  $f(x) = 0$ . Infine poiché

$$f'(x) = 2011x^{2010} + 2011 = 2011(x^{2010} + 1) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la  $f(x)$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$  ma pure in  $[-1, 0]$ . Il valore dove  $f(x) = 0$  quindi dev'essere unico.

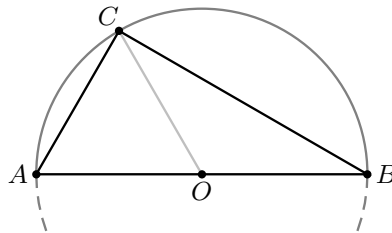
**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Tale problema consiste nel costruire con i mezzi della geometria euclidea cioè con riga e compasso un quadrato la cui area sia pari a quella del cerchio. In sostanza si intende costruire un segmento di lunghezza  $l = r\sqrt{\pi}$  cosicché il quadrato di tale lato abbia area  $l^2 = \pi r^2$ .

Tale problema, assieme a quello della duplicazione del cubo e della trisezione di un angolo, è uno dei tre problemi classici della geometria greca. Nel 1882 F. Lindemann dimostrò che tali problemi non sono risolubili. In termini algebrici  $\pi$  (oppure, nel caso in esame,  $\sqrt{\pi}$ ) non si possono scrivere tramite radicali ossia non sono soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti razionali (si veda anche il punto 4 del secondo problema 2007 e il punto 2 del problema 2/2010 PNI).

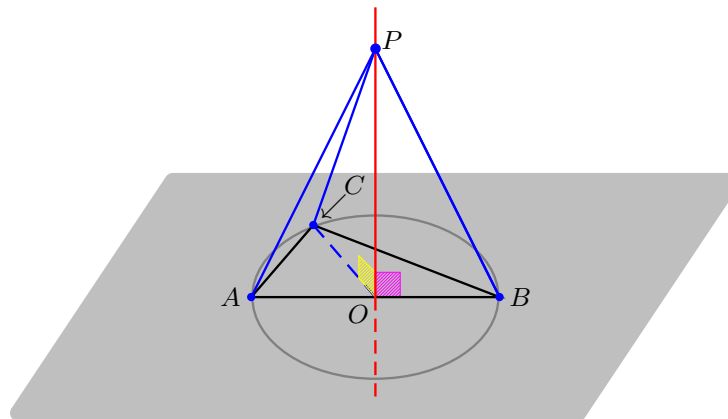
**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Detto  $O$  il punto medio dell'ipotenusa  $AB$  di  $\triangle ABC$ , rettangolo in  $C$ , questo punto è il centro della circonferenza passante per  $A, B, C$ , ed è quindi equidistante da essi (fig. 1).



**Fig. 1.** Triangolo rettangolo  $ABC$  e semicirconferenza circoscritta.

Considerata una retta per  $O$  e perpendicolare al piano di  $\triangle ABC$  (fig. 2), sia  $P$  un punto qualsiasi di questa e  $\overline{OP}$  la distanza di  $P$  da  $O$ .



**Fig. 2.** Luogo dei punti equidistanti dai vertici di  $\triangle ABC$ .

Poiché  $\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OB}$  è pure, applicando il teorema di Pitagora,

$$\begin{aligned}\overline{PC}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 \\ &= \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{PA}^2 \\ &= \overline{OP}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{PB}^2.\end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB}$$

e il luogo geometrico richiesto appare essere la retta per  $O$  perpendicolare al piano del triangolo.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

*Alternativa a.* Supponiamo che il grafico della funzione cercata sia il primo. Manifestamente la sua derivata prima si annulla in  $x = 0$  cosa che non avviene per il grafico II, essendo negativo invece il corrispondente valore.

*Alternativa b.* La  $f''$  per  $x > 0$  dovrebbe essere positiva mentre risulta per alcuni valori minore dello zero.

*Alternativa c.* La  $f'$  dovrebbe essere positiva per  $x > 0$  mentre risulta per certi valori negativa.

*Alternativa d.* Le tre funzioni appaiono coerenti (e compatibili, per pura ipotesi, con l'andamento di una funzione polinomiale di grado 5: si veda più avanti).

*Alternativa e.* La  $f'$  dovrebbe essere negativa in un intervallo centrato sull'origine mentre invece cambia segno.

L'alternativa corretta è la *d*: difatti all'aumentare delle  $x$  (a partire da sinistra) la funzione è crescente,  $f'$  è positiva e  $f''$  è minore di zero. Raggiunto il massimo,  $f'$  si annulla e quindi diviene negativa fino a che  $x$  raggiunge il valore in corrispondenza del minimo di  $f$ . La  $f''$ , quando  $x = 0$ , cambia segno e la concavità di  $f$  passa da verso il basso a verso l'alto definitivamente. Superata l'ascissa del minimo  $f$  cresce,  $f' > 0$  e  $f'' > 0$ .

L'ipotesi, *non richiesta dal quesito*, sul grado della funzione  $f$  deriva dall'osservazione che il grafico di  $f''$  è simile a quello di una cubica del tipo  $y = ax^3$ . Siccome la derivazione abbassa di una unità il grado di un polinomio, è probabile che  $f$  sia quindi descritta almeno da un polinomio di quinto grado.\*

---

\* I grafici affiancati al **testo** del quesito sono stati tracciati in questo lavoro a partire dalla funzione di equazione  $y = 0,1x^5 - 0,85x$  con  $x \in [-2, 2]$ .

# ESAME 2011 PNI

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.*

## • Problema n. 1

Sia  $f$  la funzione definita sull'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali da

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

e sia  $\Gamma$  la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento  $Oxy$ .

1. Si determini il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  e a  $-\infty$ . Si calcoli  $f(x) + f(-x)$  e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto  $A(0; 1 + \ln 4)$  è centro di simmetria di  $\Gamma$ .
2. Si provi che, per tutti i reali  $m$ , l'equazione  $f(x) = m$  ammette una e una sola soluzione in  $\mathbb{R}$ . Sia  $\alpha$  la soluzione dell'equazione  $f(x) = 3$ ; per quale valore di  $m$  il numero  $-\alpha$  è soluzione dell'equazione  $f(x) = m$ ?
3. Si provi che, per tutti gli  $x$  reali, è:  $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ . Si provi altresì che la retta  $r$  di equazione  $y = x + \ln 4$  e la retta  $s$  di equazione  $y = x + 2 + \ln 4$  sono asintoti di  $\Gamma$  e che  $\Gamma$  è interamente compresa nella striscia piana delimitata da  $r$  e da  $s$ .
4. Posto  $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4] dx$ , si calcoli:  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta)$ . Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto

Soluzione

## • Problema n. 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni  $f$  e  $g$  definite, per tutti gli  $x$  reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \text{sen} \frac{\pi}{2}x.$$

1. Si studino le funzioni  $f$  e  $g$  e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ . Si considerino i punti del grafico di  $g$  a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo  $[-10; 10]$  e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione  $R$  delimitata dai grafici di  $f$  e di  $g$  sull'intervallo  $[0; 4]$ . Si calcoli l'area di  $R$ .
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di  $R$  con le rette  $y = -15$  e  $y = -5$ , l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie d'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di  $10^{-1}$ ).
4. In ogni punto di  $R$  a distanza  $x$  dall'asse  $y$ , la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da  $h(x) = 5 - x$ . Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Soluzione

### Questionario

1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.

Soluzione

2. Si trovi il punto della curva  $y = \sqrt{x}$  più vicino al punto di coordinate  $(4; 0)$ .

Soluzione

3. Sia  $R$  la regione delimitata, per  $x \in [0, \pi]$ , dalla curva  $y = \sin x$  e dall'asse  $x$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .

Soluzione

4. Il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi  $n$ .

Soluzione

5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «... se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

Soluzione

6. Di tutti i coni iscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

Soluzione

7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

Soluzione

8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?

Soluzione

9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

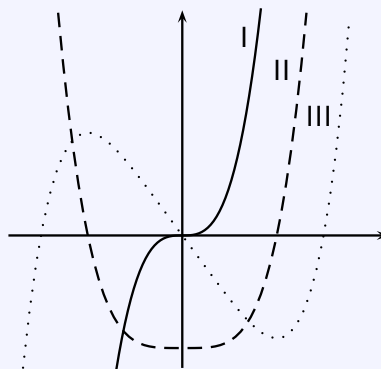
Soluzione

10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione  $f$ , un altro lo è della funzione derivata  $f'$  e l'altro ancora di  $f''$ .

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	$f$	$f'$	$f''$
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.



Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

La funzione  $f$ , definita in  $\mathbb{R}$ , di equazione

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

ha limite per  $x \rightarrow +\infty$  pari a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

in quanto il limite di ciascuno dei suoi tre addendi risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 4 = \ln 4$$

e poiché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , è pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0.$$

Il limite per  $x \rightarrow -\infty$  è invece

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

in quanto, tenuto conto che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln 4 = \ln 4, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} = \frac{2}{0 + 1} = 2.$$

Il calcolo di  $f(x) + f(-x)$  richiede di esprimere l'immagine di  $-x$  secondo  $f$ . Questa si ottiene con una semplice sostituzione in (1)

$$f(-x) = -x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} \quad (2)$$

per cui otteniamo

$$f(x) + f(-x) = \left( x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \right) + \left( -x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} \right).$$

Considerando che  $e^{-x} = 1/e^x$  la precedente si riscrive

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= 2 \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2}{e^{-x} + 1} \\ &= 2 \ln 4 + 2 \left( \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \\ &= 2 \ln 4 + 2 \left( \frac{1 + e^x}{1 + e^x} \right) \\ &= 2 + 4 \ln 2 = 2(1 + \ln 4). \end{aligned}$$

L'identità

$$f(x) + f(-x) = 2(1 + \ln 4) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

è indice di una simmetria centrale di centro  $A(0, 1 + \ln 4)$  in quanto rientra nella trattazione seguente.

Difatti, assegnata la funzione  $f$  di equazione  $y = f(x)$  con  $x \in \mathcal{D}$ , tale funzione è simmetrica centralmente rispetto al punto  $A(0, a)$  se e solo se, applicando ad essa la trasformazione di simmetria centrale

$$\sigma : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + 2a, \end{cases}$$

la sua equazione rimane invariata. Poiché le equazioni della trasformazione inversa  $\sigma^{-1}$  sono

$$\sigma^{-1} : \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' + 2a, \end{cases}$$

queste, sostituite in  $y = f(x)$ , forniscono la relazione

$$-y' + 2a = f(-x') \quad \text{cioè} \quad y' = 2a - f(-x').$$

Tralasciato l'apice di  $x'$  e  $y'$ , l'ultima espressione equivale alla  $y = 2a - f(-x)$ , equazione che rappresenta l'immagine di  $f$  secondo la simmetria  $\sigma$ . Poiché questa immagine coincide con quella di  $f$  descritta invece da  $y = f(x)$ , segue che deve valere l'identità

$$f(x) = 2a - f(-x) \quad \text{da cui} \quad f(x) + f(-x) = 2a \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

che coincide con (3) non appena si ponga  $a = 1 + \ln 4$ .

2. Per dimostrare che  $f(x) = m$  ammette una e una sola soluzione  $\forall m \in \mathbb{R}$ , definiamo la nuova funzione  $g$

$$g(x) = f(x) - m = x + \ln 4 - m + \frac{2}{e^x + 1}.$$

Poiché, per quanto visto al punto 1, pure la  $g$  possiede i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

nonché essa è continua in  $\mathbb{R}$ , devono esistere certamente due valori  $x_1$  e  $x_2$  in corrispondenza dei quali la funzione assume valori di segno opposto ossia  $g(x_1) < 0$  e  $g(x_2) > 0$ . Per il teorema degli zeri, nell'intervallo  $[x_1, x_2]$  esiste quindi almeno una soluzione dell'equazione  $g(x) = 0$  o, equivalentemente,  $f(x) = m$ . Se poi consideriamo il segno della derivata  $g'$

$$g'(x) = 1 + 2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

questo assicura sulla monotonia strettamente crescente di  $g$  in  $\mathbb{R}$  e quindi in particolare pure in  $[x_1, x_2]$ . Tale valore deve quindi essere unico.

Indicata con  $\alpha$  questa soluzione in corrispondenza di  $m = 3$  ossia  $f(\alpha) = 3$ , per la simmetria già dimostrata risulta

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = 2 + 4 \ln 2$$

per cui

$$\begin{aligned} f(-\alpha) &= 2 + 4 \ln 2 - f(\alpha) \\ &= 2 + 4 \ln 2 - 3 \\ &= -1 + 4 \ln 2 = m. \end{aligned}$$

Il valore di  $m$  corrispondente a  $f(-\alpha)$  è in definitiva  $m = -1 + 4 \ln 2$ .

3. Ripresa l'identità (3), possiamo riscrivere la  $f(x)$  come  $f(x) = 2 + 4 \ln 2 - f(-x)$  per cui, in base alla (2) e alla  $e^{-x} = 1/e^x$ , abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + 4 \ln 2 + x - \ln 4 - \frac{2}{e^{-x} + 1} \\ &= 2 + x + \ln 4 - \frac{2e^x}{1 + e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

La ricerca degli asintoti del grafico  $\Gamma$  di  $f$  implica innanzitutto lo studio del limite di  $f(x)/x$ . Questo risulta

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{x(e^x + 1)} \right] = 1 + 0 + 0 = 1$$

e tale risultato si giustifica in base ai limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 4}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x(e^x + 1)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Il termine noto dell'asintoto si ricava dall'ulteriore limite

$$q_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \right] = \ln 4 + 0 = \ln 4.$$

L'asintoto di  $\Gamma$  per  $x \rightarrow +\infty$  è quindi la retta  $r_1: y_1 = x + \ln 4$  e poiché la disequazione

$$f(x) - y_1 = \frac{2}{e^x + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è sempre vera, significa che il grafico  $\Gamma$  giace sempre al di sopra della retta  $r_1$ .

Per  $x \rightarrow -\infty$  si ha

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{x(e^x + 1)} \right] = 1 + 0 + 0 = 1$$

in quanto come già **visto**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

Allo stesso modo e sfruttando la forma (4) della  $f$ , il termine noto si calcola con il limite

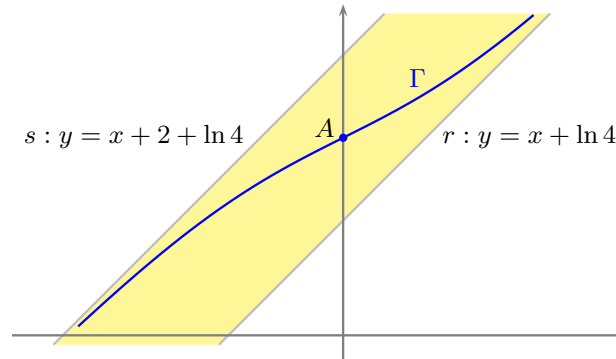
$$q_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \right].$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2 \cdot 0}{0 + 1} = 0,$$

risulta  $q_2 = 2 + \ln 4$  e quindi il secondo asintoto è  $s: y_2 = x + 2 + \ln 4$ . La posizione di  $f$  rispetto a questo secondo asintoto si ottiene dal segno della differenza  $f(x) - y_2$  che risulta

$$\begin{aligned} f(x) - y_2 &= \left( x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \right) - (x + 2 + \ln 4) \\ &= -\frac{2e^x}{e^x + 1} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



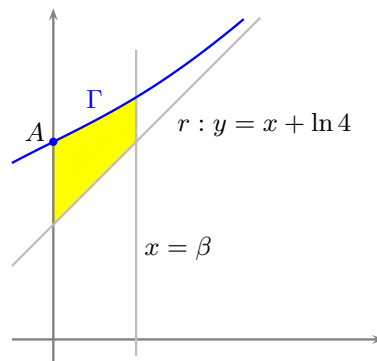
**Fig. 1.** Grafico  $\Gamma$  della funzione  $f$  e striscia che lo delimita.

$\Gamma$  quindi giace al di sotto della retta  $s$ . Ricordando la simmetria centrale rispetto al punto  $A$  e le informazioni ottenute tramite il confronto con gli asintoti, possiamo abbozzare un possibile grafico di  $\Gamma$  (fig. 1).

4. Posto

$$I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4] dx,$$

si può interpretare tale integrale come l'area della regione compresa tra l'asse  $y$ , il grafico della funzione  $f$ , la retta  $x = \beta$  e l'asintoto  $r$  (fig. 2).



**Fig. 2.** Regione delimitata da  $\Gamma$ ,  $r$  e dalle rette  $x = 0$  e  $x = \beta$ .

Esplicitamente  $I(\beta)$  risulta

$$\begin{aligned} I(\beta) &= \int_0^\beta \left( x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - x - \ln 4 \right) dx \\ &= \int_0^\beta \frac{2 dx}{e^x + 1} = 2 \int_0^\beta \frac{dx}{e^x + 1} \end{aligned} \quad (5)$$

Per risolvere il corrispondente integrale indefinito poniamo  $t = e^x$  la cui funzione inversa  $x = \ln t$  ha per differenziale  $dx = \frac{1}{t}dt$ . Questa sostituzione ci permette di riscrivere l'integrale indefinito come

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{t + 1} \cdot \frac{1}{t} dt. \quad (6)$$

Ora la funzione integranda

$$\frac{1}{(t + 1)t}$$

si può scomporre identicamente in frazioni parziali del tipo

$$\frac{1}{(t + 1)t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 1}.$$

Moltiplicando per  $t(t + 1)$  si ottiene l'uguaglianza  $1 = A(t + 1) + Bt$  che deve valere  $\forall t$ . Ordinati i termini e utilizzando il principio di identità dei polinomi, determiniamo i valori incogniti  $A$  e  $B$

$$1 = t(A + B) + A \implies \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \implies B = -1,$$

e l'integrale (6) si scompone in integrazioni elementari

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} \right) dt &= \ln t - \int \frac{dt}{t + 1} = \ln |t| - \ln |t + 1| + c \\ &= \ln \left| \frac{t}{t + 1} \right| + c = \ln \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) + c. \end{aligned}$$

Il risultato del calcolo dell'integrale definito (5) è quindi

$$\begin{aligned} I(\beta) &= 2 \left[ \ln \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right]_0^\beta = 2 \ln \left( \frac{e^\beta}{e^\beta + 1} \right) - 2 \ln \frac{1}{2} \\ &= 2 \ln \left( \frac{e^\beta}{e^\beta + 1} \right) + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

e il limite richiesto diviene

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} 2 \ln \left( \frac{e^\beta}{e^\beta + 1} \right) + 2 \ln 2. \quad (7)$$

Sostituiamo ora  $e^\beta = z$  per cui, dopo aver osservato che  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} e^\beta = +\infty$ , riscriviamo il limite (7) come

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta) = \lim_{z \rightarrow +\infty} 2 \ln \left( \frac{z}{z + 1} \right) + 2 \ln 2.$$

Poiché, per la teoria riguardante i limiti delle funzioni razionali fratte

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{z+1} = 1$$

abbiamo, in definitiva

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta) = 2 \ln 1 + 2 \ln 2 = 2 \ln 2.$$

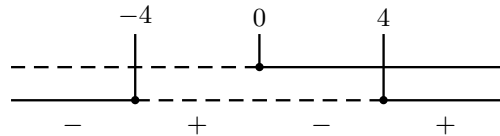
Il valore dell'area della regione compresa tra  $\Gamma$  ed  $r$  quando  $x \geq 0$  è pertanto finita e pari a  $2 \ln 2 = \ln 4$ .

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

La funzione  $f(x) = x^3 - 16x = x(x^2 - 16)$ , di dominio  $\mathbb{R}$ , rappresenta una cubica dispari in quanto

$$f(-x) = -x[(-x)^2 - 16] = -x(x^2 - 16) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suo segno si deduce dallo studio dei due fattori  $x \geq 0$  e  $x^2 - 16 \geq 0$ , quest'ultima risolta dai valori  $x \leq 4 \vee x \geq 4$ .



**Fig. 1.** Segno di  $f(x)$ .

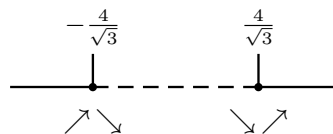
Risulta  $f(x) \geq 0$  quando  $-4 \leq x \leq 0 \vee x \geq 4$  (fig. 1).

Ricordando la teoria relativa ai limiti delle funzioni razionali per  $x \rightarrow \infty$  e come questi dipendano dal monomio di grado massimo, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

e, per quanto è noto circa le cubiche, possiamo escludere la presenza di asintoti obliqui.

La derivata prima  $f'(x) = 3x^2 - 16$  è positiva o nulla quando  $x^2 \geq \frac{16}{3}$  cioè  $x \leq -4/\sqrt{3} \vee x \geq 4/\sqrt{3}$ . La sua rappresentazione grafica (fig. 2) ci aiuta a riconoscere la presenza di un massimo relativo proprio in  $x_1 = -4/\sqrt{3}$  e un minimo in  $x_2 = 4/\sqrt{3}$ .



**Fig. 2.** Segno di  $f'(x)$  e intervalli di monotonia.

In corrispondenza di queste ascisse i valori delle ordinate sono

$$f\left(\pm \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{16}{3} - 16\right) = \pm \frac{64}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \mp \frac{128}{3\sqrt{3}}.$$

La derivata seconda  $f''(x) = 6x \geq 0$  evidenzia l'esistenza, attesa, di un flesso nell'origine (fig. 3). Il grafico è riportato in fig. 4

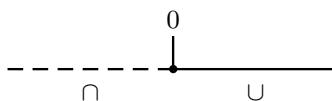


Fig. 3. Segno di  $f''(x)$  e concavità.

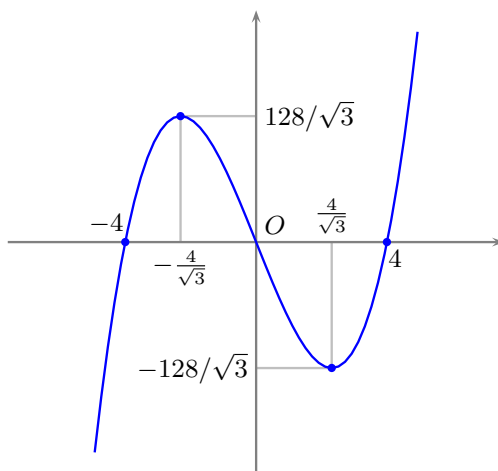


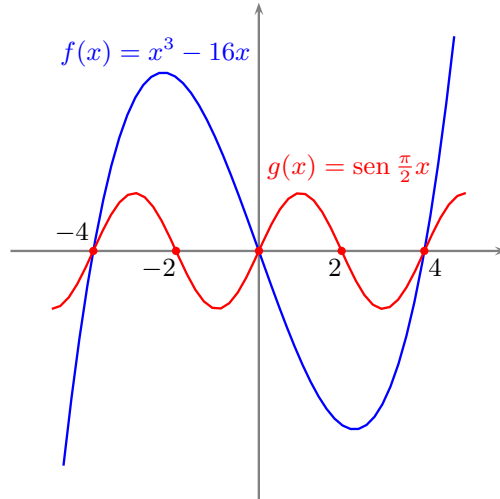
Fig. 4. Grafico di  $f(x) = x^3 - 16x$  (non isometrico).

- Pure per la  $g(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  il dominio coincide con l'insieme  $\mathbb{R}$ . Osserviamo inoltre che la  $g$  rientra nella classe di funzioni  $y = \text{sen}(ax)$  che, in  $\mathbb{R}$ , presentano una periodicità pari a  $T = 2\pi/a$ . Nel nostro caso dev'essere  $T = 2\pi/(\pi/2) = 4$ . Difatti vale l'identità  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x + 4) = \text{sen}\left[\frac{\pi}{2}(x + 4)\right] = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = g(x).$$

Il grafico è quindi deducibile da quello noto della funzione seno non appena si consideri la periodicità appena dimostrata. In fig. 5 riportiamo i grafici di entrambe le funzioni.

I punti di  $g$  a tangente orizzontale e compresi nell'intervallo  $[-10, 10]$  si possono riconoscere anche a livello intuitivo data la conoscenza del grafico di  $g$ . Formalmente invece discendono dalla condizione sulla sua derivata prima  $g'(x) = 0$  che



**Fig. 5.** Grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  (non in scala).

si esplicita in

$$D\left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \implies \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0.$$

Questa equazione goniometrica è risolta dai valori

$$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{da cui} \quad x = 1 + 2k \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Imponendo che sia

$$\begin{cases} 1 + 2k \geq -10 \\ 1 + 2k \leq 10 \end{cases}$$

soddisfano il sistema i valori interi compresi in  $[-5, 5; 4, 5]$  ossia  $-5 \leq k \leq 4$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Le rispettive coordinate sono  $(1 + 2k, (-1)^k)$  in quanto

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 1 \quad \text{se } k \text{ è pari,} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -1 \quad \text{se } k \text{ è dispari.}$$

2. La regione  $\mathcal{R}$  compresa tra  $f$  e  $g$  è rappresentata dalla fig. 6 e la sua area è data dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_0^4 \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x^3 - 16x) \right] dx.$$

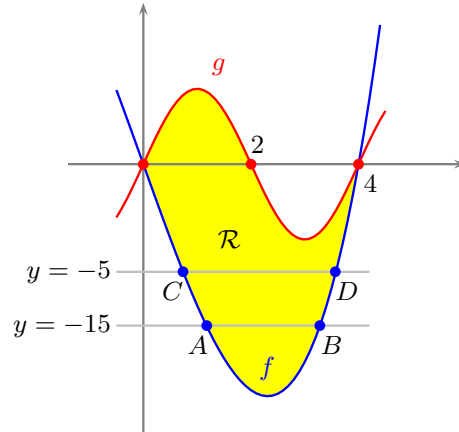


Fig. 6. Regione  $\mathcal{R}$  tra  $G_f$  e  $G_g$  (non in scala).

Poiché

$$\int \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi} \int \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{\pi}{2} dx = \frac{2}{\pi} \int \text{sen } t dt$$

con  $t = \frac{\pi}{2}x$ , la primitiva dell'integrale indefinito è

$$\int \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c, \tag{1}$$

per cui l'area richiesta vale

$$\mathcal{A} = \left[ -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x^4}{4} + 16 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = -\frac{2}{\pi} - 64 + 128 + \frac{2}{\pi} = 64.$$

3. Per determinare le ascisse dei punti di intersezione delle due rette di equazione  $y = -15$  e  $y = -5$  con il grafico di  $y = f(x)$  (fig. 6) dovremo risolvere le equazioni  $x^3 - 16x = -15$  e  $x^3 - 16x = -5$ .

L'equazione  $x^3 - 16x + 15 = 0$  possiede manifestamente la soluzione  $x = 1$  per cui potremo scomporre il polinomio a primo membro in fattori tramite la regola di Ruffini. La divisione per  $x - 1$  fornisce

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -16 & 15 \\ 1 & & 1 & 1 & -15 \\ \hline & 1 & 1 & -15 & 0 \end{array}$$

e il polinomio  $x^3 - 16x + 15$  si scompone in  $(x - 1)(x^2 + x - 15)$ . L'equazione presenta quindi le due ulteriori soluzioni

$$x^2 + x - 15 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}$$

per cui, trascurando il valore negativo, le ascisse di  $A$  e  $B$  (fig. 6) risultano

$$x_A = 1, \quad x_B = \frac{-1 + \sqrt{61}}{2}.$$

Nel caso di  $y = 5$ , l'equazione  $x^3 - 16x + 5 = 0$  non è fattorizzabile elementarmente in quanto i divisori del termine noto conducono tutti a resti diversi dallo zero. In ogni caso, per la conoscenza del grafico di  $f$ , l'ascissa del punto  $C$  dev'essere inferiore di quella di  $A$  ossia  $x_C < 1$ .

Introdotta quindi la funzione polinomiale continua  $l(x) = x^3 - 16x + 5$  e osservato che  $l(0) = 5 > 0$  e  $l(1) = 1 - 16 + 5 = -10 < 0$ , per il teorema degli zeri dev'esserci almeno un valore  $\alpha$  dove sia  $l(\alpha) = 0$  con  $x \in ]0, 1[$ . Poiché la derivata prima  $l'(x) = 3x^2 - 16$  possiede segno

$$l'(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -\frac{4}{\sqrt{3}} \vee x \geq \frac{4}{\sqrt{3}},$$

risulta che  $l'(x) < 0$  quando  $x \in [0, 1]$ . Ne segue che la radice  $\alpha$  è unica. Per la sua determinazione ricorriamo al metodo numerico di Newton (o delle tangenti) con valore iniziale  $x_0 = 0$ . I valori della successione si ottengono iterando la funzione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{l(x_n)}{l'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n + 5}{3x_n^2 - 16} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

I primi valori sono

$$\begin{aligned} x_0 = 0 & \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0,3125 \\ x_1 = 0,3125 & \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 0,3144429 \\ x_2 = 0,3144429 & \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 0,31444 \end{aligned}$$

e già  $x_3$  appare essere una stima abbondantemente migliore dell'approssimazione ( $10^{-1}$ ) richiesta. Pertanto  $x_C = 0,31444$ .

Per individuare l'ascissa del punto  $D$  osserviamo che, in base al grafico di  $f$  (fig. 6), questa deve appartenere all'intervallo

$$x_B < x_D < 4 \quad \text{cioè} \quad \frac{-1 + \sqrt{61}}{2} < x_D < 4. \quad (2)$$

La funzione  $l(x) = x^3 - 16x + 5$  calcolata in  $x_B$  vale

$$l(x_B) = l\left(\frac{-1 + \sqrt{61}}{2}\right) = -15 + 5 = -10$$

in quanto il valore  $x_B$  era, come **discusso**, soluzione di  $x^3 - 16x = -15$ . Inoltre  $l(4) = 4^3 - 16 \cdot 4 + 5 = 5 > 0$  e, sempre per la precedente discussione,  $l'(x) > 0$  nell'intervallo  $[x_B, 4]$  in quanto  $x > 4/\sqrt{3}$ . Pertanto la funzione  $l$  è qui strettamente crescente e, ancora in base al teorema degli zeri, vi è in  $[x_B, 4]$  una sola radice.

Procedendo ancora con il metodo di Newton, la funzione da iterare è sempre

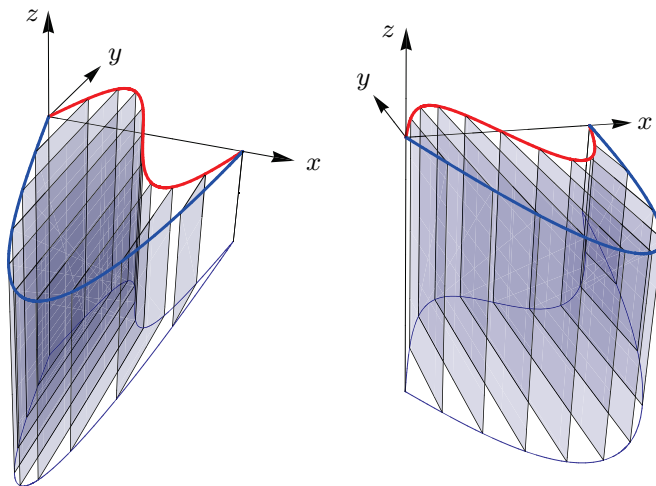
$$x_{n+1} = x_n - \frac{l(x_n)}{l'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n + 5}{3x_n^2 - 16}$$

ma, in questo caso, il valore iniziale parte da  $x_0 = 4$ . I primi termini della successione sono

$$\begin{aligned} x_0 = 4 &\implies x_1 = 3,84375 \\ x_1 = 3,84375 &\implies x_2 = 3,83354 \\ x_2 = 3,83354 &\implies x_3 = 3,83349 \end{aligned}$$

per cui, entro l'approssimazione richiesta, possiamo stimare che sia  $x_D = 3,833$ .

4. La profondità  $h(x) = 5 - x$  della piscina è evidentemente funzione di  $x$  ma, per un dato valore di tale variabile, questa è costante. Segue che una sezione di tale piscina perpendicolare all'asse  $x$  è un rettangolo (fig. 7) avente come lato orizzontale  $a = g(x) - f(x)$  ( $l_1 \geq 0$ ) e lato verticale  $b = h(x) = 5 - x$ .



**Fig. 7.** Rappresentazione della piscina da due punti di vista e sue sezioni piane.

L'area  $\mathcal{A}$  di tale sezione è quindi

$$\mathcal{A}(x) = a \cdot b = \left( \sin \frac{\pi}{2} x - x^3 + 16x \right) \cdot (5 - x)$$

e il volume d'acqua coinvolto si deduce dall'integrale

$$\mathcal{V} = \int_0^4 \mathcal{A}(x) dx = \int_0^4 \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x \right) \cdot (5 - x) dx.$$

Sviluppato il prodotto entro l'ultimo integrale (si veda pure es. 2007 quesito 1)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_0^4 \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x \right) \cdot (5 - x) dx \\ &= \int_0^4 \left( 5 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x - 5x^3 + 80x - x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x + x^4 - 16x^2 \right) dx \end{aligned} \quad (3)$$

l'unico integrale non immediato appare essere

$$\int x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x dx. \quad (4)$$

Come già osservato in (1)

$$\int \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x dx = -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x + c,$$

per cui risolviamo l'integrale (4) per parti considerando  $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) dx$  il fattore differenziale. Segue

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x dx &= x \left( -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x \right) - \int \left( -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x \right) dx \\ &= -\frac{2x}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x + \frac{2}{\pi} \int \cos \frac{\pi}{2}x dx \\ &= -\frac{2x}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x \right] + c \\ &= -\frac{2x}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x + c \end{aligned}$$

e dove si è risolto l'integrale a secondo membro con la stessa sostituzione introdotta per (1) ossia

$$\int \cos \left( \frac{\pi}{2}x \right) dx = \frac{2}{\pi} \int \cos t dt = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} t + c = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x + c.$$

Ripreso l'integrale (3) e integrati i termini elementari, la sostituzione degli estremi di integrazione fornisce

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \left[ 5 \left( -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right) - \frac{5}{4} x^4 + 80 \frac{x^2}{2} - \left( -\frac{2x}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x + \frac{4}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^5}{5} - 16 \frac{x^3}{3} \right]_0^4 \\
 &= \left[ -\frac{10}{\pi} - 320 + 640 + \frac{8}{\pi} + \frac{1024}{5} - \frac{1024}{3} - \left( -\frac{10}{\pi} \right) \right] \\
 &= 320 + \frac{8}{\pi} + 1024 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = 320 + \frac{8}{\pi} + 1024 \left( -\frac{2}{15} \right) \\
 &= \frac{2752}{15} + \frac{8}{\pi} \approx 186,013 \text{ m}^3 = 186,013 (10^3 \text{ l}) \\
 &= 186013 \text{ l}
 \end{aligned}$$

risultato dove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzata l'equivalenza  $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ l}$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Silvia sbaglia in quanto non esiste una geometria “vera” mentre esistono molte geometrie ossia esistono molte teorie geometriche associate a modelli, ciascuna con i propri postulati e applicabili, di volta in volta, a situazioni fisiche o anche solo matematiche, diverse.

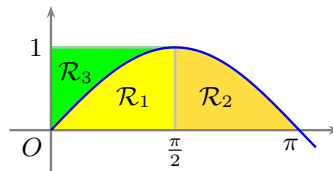
L'affermare che la *geometria euclidea* non sia più vera mentre, per contrapposizione, lo sono le *geometrie non euclidee*, evidenzia la difficoltà (da parte di Silvia) nel considerare, in ambito matematico, questi diversi sistemi assiomatici come sviluppi teorici aventi tutti uguale dignità e ai quali non va assegnato alcun attributo di verità. In sostanza non esiste una geometria più “vera” delle altre. In ambito fisico, ci si può eventualmente chiedere quale, tra la pluralità di geometrie, sia la più adatta a descrivere lo spazio in cui avvengono i fenomeni ma in questo caso la risposta richiede di definire il grado di approssimazione accettabile nella descrizione del fenomeno. Sappiamo che la geometria euclidea con i suoi cinque postulati fornisce risultati accettabili quando si considerino porzioni di spazio relativamente piccole mentre si mostra inadeguata già nel rappresentare le proprietà di una superficie sferica. Ad una scala ancora maggiore dove siano presenti masse significative le teorie fisiche moderne quali quella della relatività generale presuppongono, in contrapposizione alla geometria euclidea, che lo spazio possieda una curvatura e, a tal fine, i modelli più adeguati sono quelli delle geometrie non euclidee.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 2.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

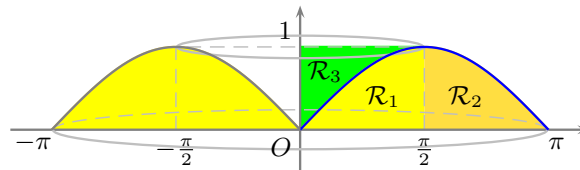
La regione  $\mathcal{R}$  è evidenziata in figura 1 e si può considerare l'unione di altre due regioni,  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ , la prima compresa tra  $\sin x$  e l'asse  $x$  e appartenente alla striscia di piano delimitata da  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  (in giallo nella fig. 1), la seconda invece individuata da  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  (in arancio). Poniamo  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ .



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $y = \sin x$  e regione  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ .

Queste due regioni generano nella loro rotazione attorno all'asse  $y$  il solido  $W$  del quale si chiede il volume. Indicata con  $\mathcal{R}_3$  la regione compresa tra la retta  $y = 1$ , l'asse  $y$  e il grafico di  $y = \sin x$  (in verde nella fig. 1), il volume  $W$  è comunque dato dalla differenza dei volumi dei solidi generati dalla regione  $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$  che chiameremo  $\mathcal{V}_{123}$ , con quello generato dalla sola  $\mathcal{R}_3$ ,  $\mathcal{V}_3$  (fig. 2). Pertanto sarà

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{123} - \mathcal{V}_3. \quad (1)$$



**Fig. 2.** Sezione del solido  $W$  e regioni coinvolte nella rotazione.

Per determinare  $\mathcal{V}_3$  è sufficiente esprimere la funzione

$$\begin{cases} y = \sin x \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

in termini della variabile  $y$  ossia ottenerne l'inversa. Questa, com'è noto, risulta

$$\begin{cases} x = \arcsen y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

per cui, ripresa la formula che fornisce il volume dei solidi di rotazione attorno ad un asse coordinato, si ha

$$\mathcal{V}_3 = \pi \int_0^1 (\arcsen y)^2 dy. \quad (3)$$

Per ottenere  $\mathcal{V}_{123}$  serve l'inversa della funzione

$$\begin{cases} y = \text{sen } x \\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

che appare essere la simmetrica rispetto alla retta  $x = \frac{\pi}{2}$  della precedente oppure, in alternativa, la simmetrica di  $x = \arcsen y$  rispetto alla retta  $x = \frac{\pi}{2}$ . Poiché una tale simmetria assiale si rappresenta come

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{\pi}{2}$$

ne discende  $x = -x' + \pi$  da cui, sostituendo in (2),  $x' = -\arcsen y + \pi$ . Riscritto  $\mathcal{V}_{123}$  come

$$\mathcal{V}_{123} = \pi \int_0^1 (-\arcsen y + \pi)^2 dy,$$

il volume (1) di  $W$  sarà espresso dalla

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^1 (-\arcsen y + \pi)^2 dy - \pi \int_0^1 (\arcsen y)^2 dy. \quad (4)$$

Lo sviluppo del quadrato e la proprietà di linearità dell'integrale definito permettono di semplificarne l'espressione in

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi \int_0^1 (\arcsen^2 y + \pi^2 - 2\pi \arcsen y - \arcsen^2 y) dy \\ &= \pi \int_0^1 (\pi^2 - 2\pi \arcsen y) dy = \pi^3 \int_0^1 dy - 2\pi^2 \int_0^1 \arcsen y dy \\ &= \pi^3 [y]_0^1 - 2\pi^2 \int_0^1 \arcsen y dy \\ &= \pi^3 - 2\pi^2 \int_0^1 \arcsen y dy, \end{aligned} \quad (5)$$

dalla quale emerge la necessità di risolvere l'integrale indefinito

$$\int \arcsen y dy.$$

Procedendo inizialmente per parti con  $dy$  come fattore differenziale, risulta

$$\int \arcsen y \, dy = y \cdot \arcsen y - \int \frac{y \, dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

e quindi definita la sostituzione  $t = 1 - y^2$ ,  $dt = -2y \, dy$  da cui  $y \, dy = -\frac{1}{2} dt$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \int \arcsen y \, dy &= y \arcsen y - \int \frac{-dt}{2\sqrt{t}} \\ &= y \arcsen y + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{(1/2)} + c \\ &= y \arcsen y + \sqrt{1-y^2} + c. \end{aligned}$$

In definitiva, il volume richiesto e che discende da (5) è

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi^3 - 2\pi^2 \left[ y \arcsen y + \sqrt{1-y^2} \right]_0^1 \\ &= \pi^3 - 2\pi^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi^3 - \pi^3 + 2\pi^2 \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 4.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

L'insieme dei quadrati dei numeri naturali,  $Q = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ , risulta essere un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ ,  $Q \subset \mathbb{N}$ . Ma poiché entrambi gli insiemi possono essere posti in corrispondenza tramite la funzione  $f$

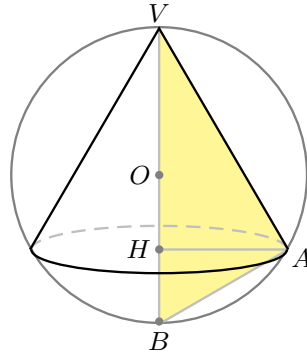
$$f : n \in \mathbb{N} \rightarrow n^2 \in Q$$

e tale funzione si dimostra essere biunivoca, per il teorema di Cantor segue che essi possiedono la medesima cardinalità, in particolare, quella del *numerabile*.

In tal senso Salviati fa una affermazione errata dicendo che i numeri naturali sono in quantità maggiore dei quadrati perfetti e tale errore discende dal fatto che sia  $Q$  che  $\mathbb{N}$  contengono infiniti elementi.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Indicati con  $O$  il centro della sfera,  $V$  il vertice del cono retto,  $H$  la proiezione ortogonale di  $V$  sulla base del cono e  $A$  un punto della circonferenza di base, risulta  $\overline{OV} = \overline{OB} = \overline{OA} = r = 10$  cm (fig. 1).



**Fig. 1.** Sfera e cono inscritto.

Posto  $x = \overline{VH}$ , questa grandezza assume i suoi valori estremi in  $x = 0$  e  $x = 2r$  ossia quando il cono degenera nel punto  $V$  ( $H \equiv V \equiv A$ ) e, rispettivamente, quando il cono degenera nel diametro della sfera ( $H \equiv B \equiv A$ ). Le sue limitazioni sono quindi  $0 \leq x \leq 2r$ . Poiché la superficie laterale è rappresentata da

$$S_L = \pi \cdot \overline{AH} \cdot \overline{VA},$$

il raggio di base del cono si può ottenere con il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo sezione  $\triangle VBA$ , rettangolo in  $A$  (in giallo nella fig. 1)

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{VH} \cdot \overline{HB}} = \sqrt{x(2r - x)},$$

mentre l'apotema si deduce applicando il primo teorema di Euclide allo stesso triangolo

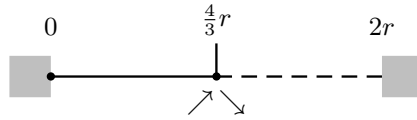
$$\overline{VA} = \sqrt{\overline{VB} \cdot \overline{VH}} = \sqrt{2r \cdot x}.$$

La superficie laterale del cono è pertanto

$$\begin{cases} S_L = \pi \sqrt{2rx} \cdot \sqrt{x(2r - x)} = \pi \sqrt{2rx^2(2r - x)} = \pi \sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3} \\ 0 \leq x \leq 2r. \end{cases}$$

La sua derivata prima è

$$S'_L = \pi \cdot \frac{4r^2 \cdot 2x - 6rx^2}{2\sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3}} = \pi \cdot \frac{4r^2x - 3rx^2}{\sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3}}$$



**Fig. 2.** Segno di  $S'_L$  e massimo.

per cui  $S'_L \geq 0$  se

$$4r^2x - 3rx^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{4}{3}r$$

e conseguentemente il valore massimo di  $S_L$  è raggiunto (fig. 2) in corrispondenza di  $x = \frac{4}{3}r = \frac{4}{3} \cdot 10 \text{ cm} = 13,3 \text{ cm}$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Detto  $n$  il numero delle risposte corrette, si chiede la probabilità  $p$  che sia  $n \geq 2$  cioè  $p(n \geq 2)$ . Questo valore, per il teorema della probabilità contraria, si può calcolare come

$$p(n \geq 2) = 1 - p(n = 0) - p(n = 1) \quad (1)$$

dove  $p(n = 0)$  rappresenta la probabilità di aver zero risposte corrette e  $p(n = 1)$  la probabilità che si sia data una sola risposta corretta. Calcoliamo ora  $p(n = 0)$  e  $p(n = 1)$ .

Per calcolare  $p(n = 0)$  dobbiamo considerare che l'evento  $E(n = 0)$  è costituito dall'intersezione di 10 eventi indipendenti in ciascuno dei quali si dà una risposta errata al 1°, al 2°, al 3°, ..., al 10° quesito. Poiché la probabilità in un singolo quesito di rispondere a caso e di ottenere una risposta corretta è  $p(\text{sì}) = \frac{1}{4}$  mentre  $p(\text{no}) = \frac{3}{4}$  è la probabilità di commettere un errore, applicando il teorema della probabilità composta si ha

$$p(n = 0) = \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4}}_{10 \text{ volte}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}. \quad (2)$$

L'evento connesso a  $p(n = 1)$  è invece unione di 10 eventi incompatibili del tipo,

$E_1 =$  risposta corretta nel 1° quesito ed errata nei rimanenti 9,

$E_2 =$  risposta corretta nel 2° quesito ed errata nei rimanenti 9,

e così via.

Poiché la probabilità di una risposta corretta e di 9 errate nella prima domanda si ottiene con il teorema della probabilità composta come in (2), questa risulta

$$p(E_1) = p(\text{sì}) \cdot [p(\text{no})]^9 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9,$$

questo valore caratterizza pure gli eventi  $E_2, E_3, \dots$

$$p(E_2) = p(E_3) = \dots = p(E_{10}) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9.$$

Il teorema della probabilità totale permette ora di scrivere

$$\begin{aligned} p(n=1) &= p(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{10}) \\ &= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9. \end{aligned} \quad (3)$$

Infine, inserito quest'ultimo risultato in (1) assieme a (2), otteniamo

$$\begin{aligned} p(n \geq 2) &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot \frac{13}{4} \\ &\approx 0,75597. \end{aligned}$$

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 8.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 9.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 10.

# ESAME 2012

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Siano  $f$  e  $g$  le funzioni definite, per tutti gli  $x$  reali, da

$$f(x) = |27x^3| \quad \text{e} \quad g(x) = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione  $g$ ? Si studino  $f$  e  $g$  e se ne disentino i rispettivi grafici  $G_f$  e  $G_g$  in un conveniente sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ .
2. Si scrivano le equazioni delle rette  $r$  e  $s$  tangenti, rispettivamente, a  $G_f$  e a  $G_g$  nel punto di ascissa  $x = \frac{1}{3}$ . Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da  $r$  e da  $s$ ?
3. Sia  $R$  la regione delimitata da  $G_f$  e da  $G_g$ . Si calcoli l'area di  $R$ .
4. La regione  $R$ , ruotando attorno all'asse  $x$ , genera il solido  $S$  e, ruotando attorno all'asse  $y$ , il solido  $T$ . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di  $S$  e di  $T$ .

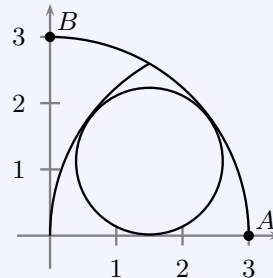
Soluzione

## • Problema n. 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento  $Oxy$  sono assegnati l'arco di circonferenza di centro  $O$  e estremi  $A(3,0)$  e  $B(0,3)$  e l'arco  $L$  della parabola d'equazione  $x^2 = 9 - 6y$  i cui estremi sono il punto  $A$  e il punto  $(0, \frac{3}{2})$ .

1. Sia  $r$  la retta tangente in  $A$  a  $L$ . Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui  $r$  divide la regione  $R$  racchiusa tra  $L$  e l'arco  $AB$ .
2. La regione  $R$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $W$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , hanno, per ogni  $0 \leq x \leq 3$ , area  $S(x) = e^{5-3x}$ . Si determini il volume di  $W$ .
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  intorno all'asse  $x$ .

4. Si provi che l'arco  $L$  è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco  $AB$  e all'asse  $x$ . Infine, tra le circonferenze di cui  $L$  è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro  $A$  e raggio 3, come nella figura a lato.



Soluzione

### Questionario

1. Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

Soluzione

2. Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione  $f(x)$  il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Soluzione

3. La posizione di una particella è data da  $s(t) = 20(2e^{-t/2} + t - 2)$ . Qual è la sua accelerazione al tempo  $t = 4$ ?

Soluzione

4. Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

Soluzione

5. Siano dati nello spazio  $n$  punti  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ . Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici

questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

Soluzione

6. Sia  $f(x) = 5 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{5}{2} \sin 2x - \cos 2x - 17$ ; si calcoli  $f'(x)$ .

Soluzione

7. È dato un tetraedro regolare di spigolo  $l$  e altezza  $h$ . Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\alpha$  formato da  $l$  e da  $h$ .

Soluzione

8. Qual è il valor medio di  $f(x) = \frac{1}{x}$  da  $x = 1$  a  $x = e$ ?

Soluzione

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti  $A$  e  $B$ , situati dalla stessa parte rispetto ad una retta  $r$ , nel determinare il cammino minimo che congiunge  $A$  con  $B$  toccando  $r$ . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

Soluzione

10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni  $x$  reale?

A)  $\cos(\sin(x^2 + 1))$     B)  $\sin(\cos(x^2 + 1))$

C)  $\sin(\ln(x^2 + 1))$     D)  $\cos(\ln(x^2 + 1))$

Si giustifichi la risposta.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Il dominio di  $f(x) = |27x^3|$  e di  $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$  è, per entrambe, l'insieme  $\mathbb{R}$  dei reali. Per quanto riguarda la periodicità, ricordiamo innanzitutto la defi-

nizione

$$g(x + T) = g(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(g) \wedge T \in \mathbb{R}_0^+$$

oppure, più in generale,

$$g(x + kT) = g(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(g) \quad \wedge \quad (k \in \mathbb{Z} \wedge T \in \mathbb{R}_0^+). \quad (1)$$

La funzione  $g$  dovrà quindi soddisfare una identità del tipo (1) per cui se

$$g(x + T) = \text{sen} \left[ \frac{3}{2}\pi(x + T) \right] = \text{sen} \left( \frac{3}{2}\pi x + \frac{3}{2}\pi T \right),$$

questa espressione dev'essere identicamente uguale a  $g(x)$  e, nota la periodicità della funzione seno, la differenza degli argomenti dovrà essere un multiplo di  $2\pi$

$$\left( \frac{3}{2}\pi x + \frac{3}{2}\pi T \right) - \frac{3}{2}\pi x = \frac{3}{2}\pi T = 2k\pi \implies T = \frac{4}{3}k.$$

I valori trovati sono tutti multipli del periodo che corrisponde a  $k = 1$  ed è  $T = \frac{4}{3}$ . La funzione  $g$  rientra comunque nella classe di funzioni di equazione  $y = \text{sen}(ax)$  che, con una immediata generalizzazione della deduzione precedente, si dimostrano essere periodiche con periodicità  $T = 2\pi/a$ . Tali funzioni sono inoltre simmetriche rispetto all'origine in quanto, come nel caso in esame, vale pure l'identità  $g(-x) = -g(x)$ . Il grafico  $G_g$  rientra perciò in una casistica già nota e si riduce a quello della funzione seno con periodo  $T = \frac{4}{3}$  (in rosso nella fig. 1). Pure la funzione  $f(x) = |27x^3|$  è riconducibile a funzioni note in quanto, osservato che

$$f(-x) = |27(-x)^3| = |-27x^3| = |27x^3| = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

la  $f$  risulta pari e, per  $x \geq 0$  diviene  $f(x) = 27x^3$  e quindi si riduce ad una semplice cubica passante per l'origine di un sistema cartesiano  $Oxy$  (in blu nel I quadrante della fig. 1). Per la simmetria pari si ottiene poi il grafico  $G_f$  pure per  $x < 0$  (fig. 1) mentre, volendo separare i due sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ , possiamo riscrivere la  $f$  anche come

$$f : \begin{cases} 27x^3, & x \geq 0 \\ -27x^3, & x < 0. \end{cases}$$

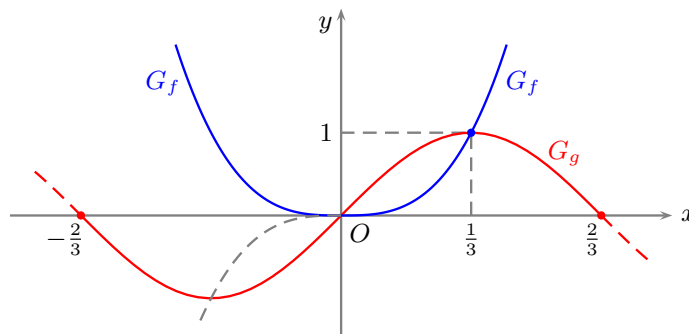


Fig. 1. Grafici di  $G_f$  e  $G_g$  (sistema non isometrico).

2. Le due funzioni in  $x = \frac{1}{3}$  assumono il valore comune

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left|27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3\right| = 1, \quad g\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

per cui in tale punto si intersecano (fig. 1). Per determinare la retta  $r$ , tangente a  $G_f$ , è sufficiente ottenere la derivata prima  $f'(x)$  e calcolarla in  $x = \frac{1}{3}$  cioè

$$\begin{cases} f'(x) = D(27x^3) \\ x > 0 \end{cases} \implies f'(x) = 81x^2,$$

per cui

$$r: y - 1 = f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \implies y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

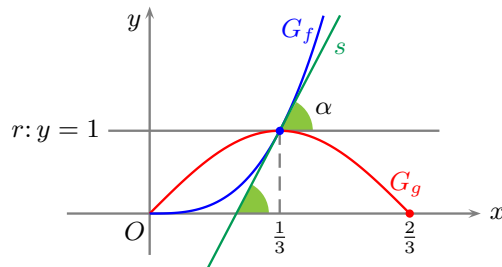
e quindi  $r: y = 9x - 2$ .

La retta tangente in  $x = \frac{1}{3}$  al grafico  $G_f$  è invece la retta orizzontale  $s: y = 1$ . Difatti

$$g'(x) = D\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right] = \frac{3}{2}\pi \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

e

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\pi \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

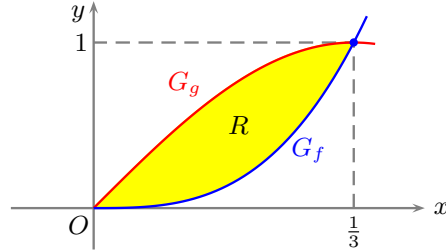


**Fig. 2.** Grafici di  $G_f$  e  $G_g$  e angolo  $\alpha$ .

L'angolo acuto definito da  $r$  ed  $s$  e che indichiamo con  $\alpha$  (fig. 2), è pure l'angolo tra  $r$  e l'asse  $x$ . D'altra parte il coefficiente angolare di una retta si può interpretare come la tangente goniometrica dell'angolo che la retta fa con il semiasse positivo delle  $x$ . Se quindi  $m_r$  è il coefficiente angolare di  $r$  è

$$m_r = \operatorname{tg} \alpha = 9 \implies \alpha = \operatorname{arctg} 9 \approx 1,4601 \text{ rad}$$

che equivale, in gradi sessagesimali,  $\alpha = 83^\circ 39' 35''$ .



**Fig. 3.** Regione  $R$  delimitata da  $G_f$  e  $G_g$ .

3. La regione  $R$  è evidenziata nella fig. 3 e, di questa, se ne chiede l'area  $\mathcal{A}$ . Poiché  $R$  è compresa tra  $G_g$  e  $G_f$  che, come visto, si intersecano in  $x = 0$  e  $x = \frac{1}{3}$ , il suo valore è dato dall'integrale definito compreso tra questi estremi

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3 \right] dx.$$

Per risolvere l'integrale indefinito

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx \quad (2)$$

associato al primo addendo, eseguiamo la sostituzione  $t = \frac{3}{2}\pi x$ . Di conseguenza si ha  $dt = \frac{3}{2}\pi dx$ , da cui  $dx = \frac{2}{3\pi} dt$ . L'integrale precedente si può quindi riportare ad uno elementare

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx &= \int \operatorname{sen} t \cdot \frac{2}{3\pi} dt = \frac{2}{3\pi} \int \operatorname{sen} t dt \\ &= \frac{2}{3\pi} (-\cos t) + c \\ &= -\frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) + c. \end{aligned}$$

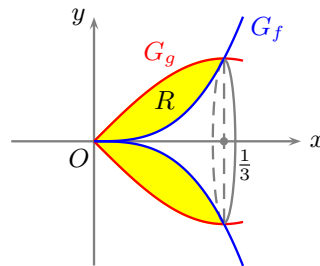
Osservato che una primitiva del secondo termine  $x^3$  in (2) è  $x^4/4$ , il calcolo dell'area si riporta a

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx - 27 \int_0^{\frac{1}{3}} x^3 dx \\ &= \left[ -\frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \right]_0^{\frac{1}{3}} - 27 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

per cui procedendo alle sostituzioni otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3\pi} \cos(0) - 27\left[\frac{1}{81 \cdot 4} - 0\right] \\ &= -\frac{2}{3\pi} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12} = \frac{8 - \pi}{12\pi} \approx 0,128873.\end{aligned}$$

4. Il solido di rotazione  $\mathcal{S}$  è rappresentato in fig. 4 e il suo volume si ottiene dall'integrale



**Fig. 4.** Rotazione di  $R$  attorno all'asse  $x$  e solido  $\mathcal{S}$ .

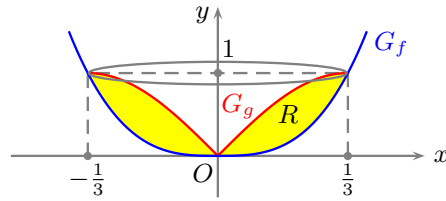
$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} [g(x)]^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} [f(x)]^2 dx$$

ossia come la differenza del solido generato dalla rotazione attorno  $x$  del trapezoide definito dalla funzione  $g$  (regione limitata da  $g$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = \frac{1}{3}$ ), con il solido generato dalla regione delimitata da  $f$ , dall'asse  $x$  e, ancora,  $x = \frac{1}{3}$ . Esplicitamente

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\mathcal{S}) &= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} (27x^3)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left[ \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 729x^6 \right] dx.\end{aligned}$$

Una rappresentazione grafica approssimativa del solido  $\mathcal{T}$  ottenuto dalla rotazione di  $R$  questa volta attorno all'asse  $y$  è data nella fig. 5 e per impostare il calcolo del suo volume vanno considerate le funzioni inverse di  $f$  e  $g$  ristrette all'insieme

$$\left\{ (x, y) \mid x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \wedge y \in [0, 1] \right\}.$$



**Fig. 5.** Rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$  e solido  $\mathcal{T}$ .

La funzione  $x = f^{-1}(y)$  si ottiene risolvendo l'equazione  $y = 27x^3$  nella variabile  $x$

$$y = 27x^3 \implies \frac{y}{27} = x^3 \implies x = \sqrt[3]{\frac{y}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y} = f^{-1}(y)$$

mentre per  $x = g^{-1}(y)$

$$y = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \quad \arcsen y = \frac{3}{2}\pi x \implies x = \frac{2}{3\pi} \arcsen y = g^{-1}(y).$$

Il volume è allora

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{T}) &= \pi \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} \sqrt[3]{y} \right]^2 dy - \pi \int_0^1 \left[ \frac{2}{3\pi} \arcsen y \right]^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 \left( \frac{1}{9} y^{2/3} - \frac{4}{9\pi^2} \arcsen^2 y \right) dy \end{aligned}$$

cioè, ancora, una differenza dei volumi generati dai trapezoidi compresi nel I quadrante e definiti dall'asse  $y$ , dalla retta  $y = 1$  e, rispettivamente, dalle funzioni

$$x = \frac{1}{3} \sqrt[3]{y}, \quad x = \frac{2}{3\pi} \arcsen y \quad \text{con } y \in [0, 1].$$

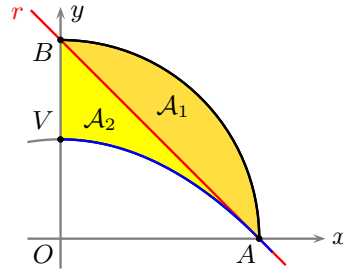
**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1. L'arco di estremi  $A(3, 0)$  e  $B(0, 3)$  appartiene evidentemente alla circonferenza di centro nell'origine  $O$  e raggio pari a 3 (e di equazione  $x^2 + y^2 = 9$ ) mentre l'equazione  $L: x^2 = 9 - 6y$  che definisce l'arco di parabola, riscritta come

$$L: y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} \quad x \in [0, 3], \quad (1)$$

permette di riconoscere nel punto assegnato  $(0, \frac{3}{2})$  il vertice  $V$  della parabola. Questa è inoltre simmetrica rispetto all'asse  $y$  e interseca l'asse  $x$  nei punti di ascissa

$$y = 0 \implies x^2 = 9 - 0 \implies x = \pm 3.$$



**Fig. 1.** Regione  $R$  (in colore) e sua suddivisione.

Gli estremi di  $L$  nel primo quadrante sono pertanto i punti  $A$  e  $V$  (fig. 1). Costruito il fascio di rette con centro in  $A$ ,  $y - 0 = m(x - 3)$ , il coefficiente angolare si deduce calcolando la derivata prima dell'equazione (1) in  $x = 3$  ossia

$$y'(x) = D \left[ -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} \right] = -\frac{1}{6} \cdot 2x = -\frac{1}{3}x$$

cioè

$$y'(3) = m = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1 \quad \text{e quindi} \quad r: y = -(x - 3) = -x + 3.$$

Tale retta passa quindi pure per  $B$ .

La regione  $R$  (in colore in fig. 1) è divisa da  $r$  in due regioni e l'area  $\mathcal{A}_1$  della regione compresa tra l'arco di circonferenza ed  $r$  si ottiene come differenza tra l'area del quadrante di cerchio  $\frac{1}{4}\mathcal{A}(\text{cerchio})$  con l'area  $\mathcal{A}(\triangle OAB)$  del triangolo  $\triangle OAB$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{4}\mathcal{A}(\text{cerchio}) - \mathcal{A}(\triangle OAB) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ &= \frac{9}{4}\pi - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{4}(\pi - 2). \end{aligned}$$

L'area  $\mathcal{A}_2$  è invece data dalla differenza tra  $\mathcal{A}(\triangle OAB)$  e l'area del trapezoide definito dalla parabola e dagli assi coordinati e che risulta pari alla metà dell'area  $\mathcal{A}(\text{seg})$  del segmento parabolico definito dalle intersezioni della parabola con l'asse  $x$ . Per quest'ultimo si può scrivere

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}(\text{seg}) = \int_0^3 \left( -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} \right) dx$$

e quindi procedere all'integrazione ma pure, più direttamente,

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}(\text{seg}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left| -\frac{1}{6} \right| \cdot |3 - (-3)|^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot 6^3 = 3$$

dove si è utilizzata la formula di Archimede generalizzata. In definitiva

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\triangle OAB) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(\text{seg}) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

2. Del solido  $W$  si conosce solo la funzione che fornisce l'area delle sue sezioni ottenute tagliando  $W$  con piani perpendicolari all'asse  $x^*$

$$\mathcal{S}(x) = e^{5-3x}.$$

Non è quindi possibile fornire una rappresentazione grafica tridimensionale ma il volume è comunque calcolabile utilizzando la relazione che fornisce il volume di un solido nota la funzione che dà le aree delle sue sezioni ossia risolvendo l'integrale

$$\mathcal{V}(W) = \int_0^3 \mathcal{S}(x) dx = \int_0^3 e^{5-3x} dx.$$

Questo si può riscrivere come

$$\mathcal{V}(W) = \int_0^3 e^5 \cdot e^{-3x} dx = e^5 \cdot \int_0^3 e^{-3x} dx \quad (2)$$

per cui è sufficiente risolvere l'integrale indefinito  $\int e^{-3x} dx$ . Con la sostituzione  $t = -3x$  ossia  $x = -\frac{1}{3}t$  che ha per differenziale  $dx = -\frac{1}{3}dt$ , l'integrale indefinito risulta

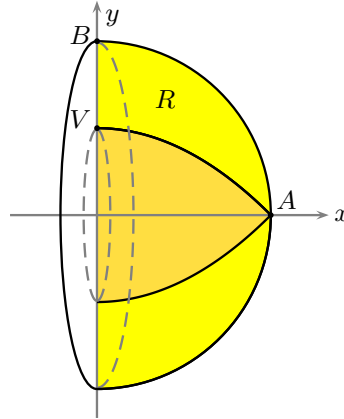
$$\begin{aligned} \int e^{-3x} dx &= \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{3} dt\right) = -\frac{1}{3} \int e^t dt \\ &= -\frac{1}{3} e^t + c = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c \end{aligned}$$

e l'integrale definito in (2) diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(W) &= e^5 \cdot \int_0^3 e^{-3x} dx = e^5 \left[ -\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^3 \\ &= e^5 \left( -\frac{1}{3} e^{-9} + \frac{1}{3} e^0 \right) = \frac{1}{3} e^5 (1 - e^{-9}) \\ &= \frac{1}{3} (e^5 - e^{-4}) \approx 49,4649. \end{aligned}$$

---

\* Il testo non definisce in questo caso la forma delle sezioni diversamente da analoghi problemi o quesiti dove questa poteva essere quadrata (es. 2008 prob. 1, es. 2009 prob. 1), rettangolare (es. 2007 ques. 2, es. 2009 PNI prob. 2), triangolare (es. 2007 ques. 1, es. 2008 PNI ques. 3).



**Fig. 2.** Regione  $R$  e solido di rotazione.

3. La rappresentazione di fig. 2 mostra che l'arco  $AB$  genera nella sua rotazione attorno  $x$  una semisfera mentre il trapezoide definito dall'arco  $AV$  della parabola genera a sua volta un solido con vertice in  $A$  (in colore arancio nella fig. 2). Il volume  $\mathcal{V}$  richiesto si ottiene sottraendo al volume della semisfera il volume del solido  $P$  generato dal solo arco  $\mathcal{L}$  ossia

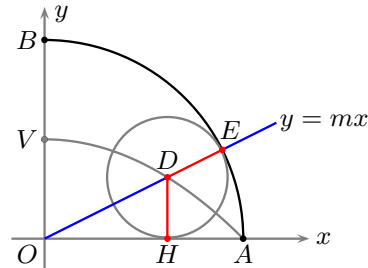
$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \mathcal{V}(\text{semisfera}) - \mathcal{V}(P) \\ &= \mathcal{V}(\text{semisfera}) - \pi \int_0^3 \left( -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} \right)^2 dx\end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi(3)^3 \cdot \frac{1}{2} - \pi \int_0^3 \left( \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4} \right) dx.$$

Per la proprietà di linearità dell'integrale definito, l'integrale precedente si suddivide in integrazioni elementari

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= 18\pi - \frac{\pi}{36} \int_0^3 x^4 dx + \frac{\pi}{2} \int_0^3 x^2 dx - \frac{9}{4} \pi \int_0^3 dx \\ &= 18\pi - \frac{\pi}{36} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^3 + \frac{\pi}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 - \frac{9}{4} \pi [x]_0^3 \\ &= 18\pi - \frac{\pi \cdot 3^5}{36 \cdot 5} + \frac{9}{2} \pi - \frac{27}{4} \pi = 18\pi - \frac{27}{20} \pi + \frac{9}{2} \pi - \frac{27}{4} \pi \\ &= \frac{\pi}{20} (360 - 27 + 90 - 135) = \frac{288}{20} \pi = \frac{72\pi}{5}.\end{aligned}$$



**Fig. 3.** Circonferenza tangente e luogo dei centri  $D$ .

4. Per determinare il luogo dei centri  $D$  delle circonferenze tangenti internamente all'arco  $\mathcal{L}$  e all'asse  $x$  (fig. 3) sia  $f: y = mx$  il fascio di rette per l'origine con  $m \geq 0$ . Detto  $D$  il centro delle circonferenze, poiché tale punto appartiene a  $f$  le sue coordinate sono

$$D(x_0, y_0) \equiv (x_0, mx_0), \quad \text{con } x_0 \in [0, 3] \tag{3}$$

e la sua distanza dall'asse  $x$  è pari a  $\overline{DH} = r = mx_0$ . La distanza dalla circonferenza si ottiene invece determinando innanzitutto  $\overline{OD}$  con il teorema di Pitagora applicato a  $\triangle OHD$  e perciò

$$\overline{OD} = \sqrt{x_0^2 + (mx_0)^2}.$$

Osservato (fig. 3) che  $\overline{DE} = \overline{OE} - \overline{OD} = 3 - \overline{OD}$  discende

$$\overline{DE} = 3 - \sqrt{x_0^2 + (mx_0)^2} = 3 - \sqrt{x_0^2 + m^2x_0^2}$$

e la condizione che individua il luogo,  $\overline{DE} = \overline{DH}$ , diventa

$$3 - \sqrt{x_0^2 + m^2x_0^2} = mx_0$$

o meglio

$$3 - mx_0 = \sqrt{x_0^2 + m^2x_0^2}. \tag{4}$$

Poiché per la (3) vale  $y_0 = mx_0$  e quindi  $m = y_0/x_0$ , possiamo sostituire quest'ultima nella (4)

$$3 - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) \cdot x_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 \cdot x_0^2}$$

dalla quale ottenere il legame tra ascisse e ordinate dei punti  $D$  del luogo cercato

$$3 - y_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$



Per determinare il suo valore si può sviluppare il binomio nella potenza 4 come

$$\left(\frac{1}{2} + h\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot h + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot h^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot h^3 + h^4$$

e quindi la (1) diviene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{h} \left[ \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}h^2 + 2h^3 + h^4 - \frac{1}{2^4} \right]$$

e si risolve

$$\lim_{h \rightarrow 0} 5 \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2}h + 2h^2 + h^3 \right) = \frac{5}{2}$$

essendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2}h = \lim_{h \rightarrow 0} 2h^2 = \lim_{h \rightarrow 0} h^3 = 0.$$

In alternativa, osservato che il limite proposto rientra nel caso di indeterminazione del tipo  $0/0$ , è possibile risolverlo anche tramite il teorema di De L'Hôpital. In riferimento alla (1), il limite del rapporto delle derivate della funzione a numeratore

$$5 \left[ \left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right],$$

e denominatore  $h$ , è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + h\right)^3}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} 20 \cdot \left(\frac{1}{2} + h\right)^3 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

per cui, soddisfatte le ipotesi del teorema citato, lo si pone uguale a quello proposto.

Infine riconosciuto l'argomento del limite come il rapporto incrementale della funzione  $f(x)$ , potremo ottenere il suo valore pure eseguendo semplicemente la derivata di

$$f(x) = 5 \left( \frac{1}{2} + x \right)^4$$

e calcolandola in  $x_0 = 0$ . Difatti

$$f'(x) = D \left[ 5 \left( \frac{1}{2} + x \right)^4 \right] = 5 \cdot 4 \left( \frac{1}{2} + x \right)^3$$

e il calcolo in  $x_0 = 0$  fornisce  $f'(0) = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{5}{2}$ .

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il termine *asintoto* sta ad indicare una retta cui tende il grafico di una funzione quando  $x \rightarrow \infty$  oppure  $x \rightarrow c$ . Nel primo caso si potrà presentare un asintoto orizzontale o obliquo mentre nel secondo un asintoto verticale. Più precisamente, se per una funzione  $f(x)$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

la retta di equazione  $r: y = l$  è asintoto orizzontale.

Se invece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

allora  $y = mx + q$  è l'equazione rappresentativa dell'asintoto obliquo di  $f$  se sono finiti i due limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = q, \quad m, q \in \mathbb{R}.$$

Se infine,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty,$$

la retta  $x = c$  è asintoto verticale. Dal punto di vista geometrico significa che esistono punti del grafico della funzione  $f$  che hanno una distanza dalla retta asintoto che può essere posta minore di un qualsivoglia valore positivo.

Un esempio di funzione  $f(x)$  con le caratteristiche richieste può essere

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 2}.$$

Difatti poiché il denominatore ha, per  $x \rightarrow 1$  e  $x \rightarrow -2$ , i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 1)(x + 2) = 0$$

mentre per il numeratore risulta rispettivamente

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 1) = 5,$$

ne discende che

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$$

cosicché le rette  $x = 1$  e  $x = -2$  sono asintoti verticali.

Poiché inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1,\end{aligned}$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = 0$$

la retta  $y = 1$  è asintoto orizzontale per la funzione  $f(x)$ .

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Se la posizione in funzione del tempo è rappresentata dalla funzione

$$s(t) = 20 \left( 2e^{-t/2} + t - 2 \right),$$

la velocità, nella notazione di Leibniz, è definita come

$$v(t) = \frac{ds}{dt},$$

e quindi si ottiene eseguendo la derivata prima di  $s(t)$  rispetto alla variabile  $t$  cioè,

$$v(t) = 20 \left[ 2 \cdot e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 - 0 \right] = 20 \left( 1 - e^{-t/2} \right).$$

L'accelerazione è, a sua volta, la derivata di  $v(t)$  in quanto definita come

$$a(t) = \frac{dv}{dt},$$

per cui derivando ulteriormente abbiamo

$$a(t) = 20 \left[ -e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = 10 \cdot e^{-t/2}.$$

Il suo valore valore nell'istante  $t = 4$  è pertanto

$$a(4) = 10 \cdot e^{-4/2} = 10 \cdot e^{-2} = \frac{10}{e^2} \approx 1,3534.$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Si veda la soluzione dell'identico quesito assegnato all'esame 2007 quesito 4. Il volume massimo richiesto è comunque  $\mathcal{V}(\max) = 403,1$  litri.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Per determinare il numero dei segmenti va osservato che uno stesso segmento è individuato dai suoi due punti estremi ed è indifferente l'ordine in cui questi vengono indicati ossia, per esempio, il segmento di estremi  $AB$  coincide con il segmento  $BA$ . Pertanto questo numero si può identificare come il numero dei gruppi di due elementi che si possono formare selezionando questi da un insieme di  $n$  elementi distinti. Detto in altro modo, tale numero è pari al numero delle combinazioni semplici di  $n$  elementi presi a gruppi di due ossia

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}.$$

La proprietà del fattoriale che permette di riscrivere  $n!$  come

$$n! = n(n-1)! \tag{1}$$

assicura pure  $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$ , per cui  $C_{n,2}$  si semplifica in

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Analogamente per i triangoli: i punti sono ora selezionati a gruppi di tre e poiché non sono allineati, a ciascuna terna e indipendentemente dall'ordine dei vertici, corrisponde un diverso triangolo. Il loro numero è dato da  $C_{n,3}$  che esplicitamente risulta

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}.$$

Applicando tre volte la proprietà (1), la precedente diviene

$$C_{n,3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6 \cdot (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Infine, per i tetraedri, gli  $n$  punti vanno scelti a gruppi di quattro e ciascuna quaterna dà luogo ad un tetraedro in quanto i quattro vertici non possono essere complanari. Il numero di tali combinazioni è dato da  $C_{n,4}$  per cui, procedendo come sopra risulta

$$\begin{aligned} C_{n,4} &= \binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{24 \cdot (n-4)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}. \end{aligned}$$

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione

$$f(x) = 5 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17 \quad (1)$$

appare, a prima vista, una funzione goniometrica omogenea di II grado nella variabile  $x$ . Poiché questa classe di funzioni si può ricondurre identicamente a funzioni lineari relative all'angolo  $2x$  utilizzando le formule di duplicazione

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \cos x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad (2)$$

possiamo riscrivere la (1) come

$$f(x) = 5 \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right) + \cos 2x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17$$

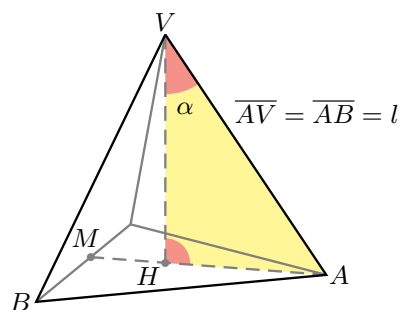
che si riduce all'espressione  $f(x) = 17$ . La derivata è ora banale e vale  $f'(x) = 0$ . In alternativa, ovviamente più laboriosa e a maggior rischio di errori, consiste nel calcolo diretto della  $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5[\cos x \cos x + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)] + 2 \cos x(-\operatorname{sen} x) - 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ &\quad - \frac{5}{2} \cos 2x \cdot 2 - (-\operatorname{sen} 2x) \cdot 2 - 0 \\ &= 5[\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x] - 2 \cos x \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x - 5 \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$

Con le identità (2)

$$f'(x) = 5 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} x \cos x - 5 \cos 2x + 4 \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

ci si riporta al medesimo risultato.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

**Fig. 1.** Tetraedro regolare.

Un tetraedro regolare è uno dei cinque solidi platonici (si veda il quesito 2 dell'esame 2006) e le sue quattro facce sono triangoli equilateri congruenti di lato pari allo spigolo  $\overline{AV} = \overline{AB} = l$  (fig. 1). Tale solido è pure retto ossia il piede dell'altezza cade nel centro del cerchio inscritto nella base che, essendo tale faccia un triangolo equilatero, è pure il baricentro della base stessa. In riferimento alla figura 1, la mediana  $\overline{AM}$  è pertanto divisa dal baricentro  $H$  in parti di lunghezza una doppia dell'altra ( $\overline{AH} = 2\overline{HM}$ ) per cui

$$\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AM}. \quad (1)$$

Poiché in un triangolo equilatero la mediana è pure altezza, vale in aggiunta la relazione con il lato/spigolo

$$\overline{AM} = \overline{AB} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = l \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1)

$$\overline{AH} = \frac{2}{3} \cdot \left( l \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

per cui, ricordato che  $\triangle AVH$  è retto in  $H$ , il rapporto che definisce l'angolo  $\alpha = \angle AVH$  è

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AV}} = \left( \frac{l}{\sqrt{3}} / l \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Utilizzando la funzione inversa giungiamo al risultato

$$\alpha = \operatorname{arcsen} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 35,26^\circ.$$

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Per ottenere il valor medio della funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  ci si deve riferire al teorema della media integrale che definisce il valor medio della funzione continua  $f$  nell'intervallo  $[a, b]$  come

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Nel caso in esame questa definizione si riduce al calcolo dell'integrale

$$\bar{f} = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

che si risolve ricordando l'integrale indefinito elementare  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ . Pertanto

$$\bar{f} = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{1}{e-1} [\ln|x|]_1^e$$

e procedendo alla sostituzione otteniamo il risultato

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{e-1} (\ln e - \ln 1) = \frac{1}{e-1} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{e-1}. \end{aligned}$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito uguale a quello assegnato nella sessione ordinaria PNI 2006 quesito 3.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Osserviamo innanzitutto che le quattro funzioni proposte sono funzioni composte del tipo  $\text{sen}[f(x)]$  o  $\text{cos}[f(x)]$ . Ricordato che il dominio delle funzioni seno e coseno è  $\mathbb{R}$ , gli argomenti  $\text{sen}(x^2 + 1)$  e  $\text{cos}(x^2 + 1)$  rispettivamente di

$$\text{A) } \text{cos}(\text{sen}(x^2 + 1)) \quad \text{B) } \text{sen}(\text{cos}(x^2 + 1))$$

sono ancora definiti  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Il dominio delle prime due funzioni è pertanto  $\mathbb{R}$ . Per le rimanenti due dove appare coinvolto il logaritmo, l'esistenza di quest'ultimo impone che sia  $x^2 + 1 > 0$ . Poiché anche questa disequazione è soddisfatta  $\forall x \in \mathbb{R}$ , pure le funzioni

$$\text{C) } \text{sen}(\ln(x^2 + 1)) \quad \text{D) } \text{cos}(\ln(x^2 + 1))$$

hanno per dominio  $\mathbb{R}$ . Per queste due osserviamo inoltre che  $x^2 + 1 \geq 1$  cosicché  $\ln(x^2 + 1) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

Analizziamo quindi singolarmente i vari casi.

• A) Dato che  $x^2 + 1$  può assumere un qualsiasi valore reale positivo maggiore o eguale ad 1, il codominio di  $\text{sen}(x^2 + 1)$  sarà

$$-1 \leq \text{sen}(x^2 + 1) \leq 1$$

cioè l'intervallo  $[-1, 1]$ . Introdotta la variabile  $t = \text{sen}(x^2 + 1)$  deve quindi essere  $-1 \leq t \leq 1$ . Ma poiché

$$[-1, 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

a maggior ragione  $t$  soddisfa alle disuguaglianze

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

per cui tale variabile rappresenta un angolo del I o del IV quadrante dove il coseno assume valori positivi. Ne segue che

$$\cos[\operatorname{sen}(x^2 + 1)] = \cos t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

• B) Posto questa volta  $t = \cos(x^2 + 1)$  si possono riportare le medesime osservazioni del caso precedente circa i valori assunti da  $t$  ossia è ancora  $t \in [-1, 1]$ . Diversamente dal caso precedente la funzione è invece  $\operatorname{sen}(t)$  e può quindi essere  $\operatorname{sen} t < 0$  se  $-1 \leq t < 0$ .

Per dimostrare comunque la non validità di una affermazione, nel nostro caso la positività di una data funzione, è sempre possibile proporre dei controesempi. Difatti supposto  $x^2 + 1 = \pi$  la funzione assume il valore negativo

$$\operatorname{sen}(\cos \pi) = \operatorname{sen}(-1) = -\operatorname{sen} 1 < 0$$

e pertanto esistono valori di  $\mathbb{R}$ ,  $x = \pm\sqrt{\pi - 1}$  in corrispondenza dei quali è  $\operatorname{sen}(\cos(x^2 + 1)) < 0$ .

• C) Posto in questo caso  $z = \ln(x^2 + 1)$ , i valori assunti da  $z$  ossia il codominio di un logaritmo con argomento maggiore o uguale ad 1, è l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei reali positivi o nulli ossia  $z \in [0, +\infty[$ . Pertanto

$$\operatorname{sen}(\ln(x^2 + 1)) = \operatorname{sen} z \in [-1, 1] \quad (1)$$

e ancora  $\operatorname{sen} z < 0$  se  $-1 \leq z < 0$ .

Per esempio se fosse  $x^2 + 1 = e^4$ , equazione risolta dai valori  $x = \pm\sqrt{e^4 - 1}$ , la funzione (1) assume il valore negativo

$$\operatorname{sen}(\ln(e^4)) = \operatorname{sen}(4) \approx -0,7568 < 0,$$

in quanto  $\pi < 4 < \frac{3}{2}\pi$ .

• D) Con la medesima posizione del punto precedente  $z = \ln(x^2 + 1) \in [0, +\infty[$  e pure in questo caso è

$$\cos(\ln(x^2 + 1)) = \cos z \in [-1, 1]. \quad (2)$$

Scelti i valori del punto C dove  $x^2 + 1 = e^4$  la funzione (2) assume ancora il valore negativo

$$\cos(\ln(e^4)) = \cos(4) \approx -0,6536 < 0$$

in quanto, come osservato,  $4 \in \text{III quadrante}$ .

La risposta corretta è quindi la A.

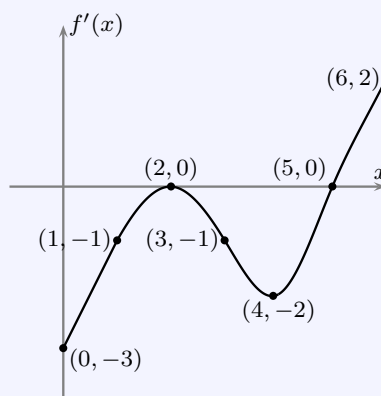
# ESAME 2012 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Della funzione  $f$ , definita per  $0 \leq x \leq 6$ , si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata  $f'(x)$ , disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per  $x = 2$  e  $x = 4$ . Si sa anche che  $f(0) = 9$ ,  $f(3) = 6$  e  $f(5) = 3$ .

1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di  $f$  motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di  $x$  la funzione  $f$  presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che  $\int_0^6 f'(t) dt = -5$  per quale valore di  $x$  la funzione  $f$  presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di  $f$ ?
4. Sia  $g$  la funzione definita da  $g(x) = xf(x)$ . Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di  $f$  e di  $g$  nei rispettivi punti di ascissa  $x = 3$  e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.



Soluzione

## • Problema n. 2

Siano  $f$  e  $g$  le funzioni definite da  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln x$ .

1. Fissato un riferimento cartesiano  $Oxy$ , si disegnino i grafici di  $f$  e di  $g$  e si calcoli l'area della regione  $R$  che essi delimitano tra  $x = \frac{1}{2}$  e  $x = 1$ .

2. La regione  $R$ , ruotando attorno all'asse  $x$ , genera il solido  $S$  e, ruotando attorno all'asse  $y$ , il solido  $T$ . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di  $S$  e di  $T$ .
3. Fissato  $x_0 > 0$ , si considerino le rette  $r$  e  $s$  tangenti ai grafici di  $f$  e di  $g$  nei rispettivi punti di ascissa  $x_0$ . Si dimostri che esiste un solo  $x_0$  per il quale  $r$  e  $s$  sono parallele. Di tale valore  $x_0$  si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Per quali valori di  $x$  la funzione  $h(x)$  presenta, nell'intervallo chiuso  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ , il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

Soluzione

**Questionario**

1. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}.$$

Soluzione

2. Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

Soluzione

3. Sia  $f(x) = 3^x$ . Per quale valore di  $x$ , approssimato a meno di  $10^{-3}$ , la pendenza della retta tangente alla curva nel punto  $(x, f(x))$  è uguale a 1?

Soluzione

4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

5. Siano dati nello spazio  $n$  punti  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ . Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

Soluzione

6. Si dimostri che la curva di equazione  $y = x^3 + ax + b$  ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

Soluzione

7. È dato un tetraedro regolare di spigolo  $l$  e altezza  $h$ . Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\alpha$  formato da  $l$  e da  $h$ .

Soluzione

8. Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ). Nello stabilimento  $A$  si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento  $B$  si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento  $C$  si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento  $A$ ?

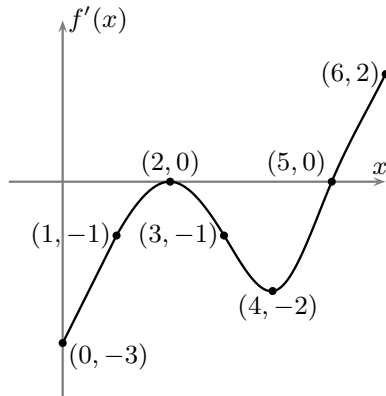
Soluzione

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti  $A$  e  $B$ , situati dalla stessa parte rispetto ad una retta  $r$ , nel determinare il cammino minimo che congiunge  $A$  con  $B$  toccando  $r$ . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

Soluzione

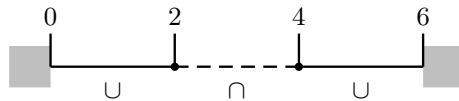
10. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio  $r$ , quello di minima area laterale ha il vertice che dista  $r\sqrt{2}$  dalla superficie sferica.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)**Fig. 1.** Grafico della funzione derivata prima  $f'(x)$ .

1. Il segno della derivata seconda  $f''(x)$  si può dedurre osservando il grafico della  $f'(x)$  (fig. 1) e, in particolare, rilevando gli insiemi dove questa appare crescente o decrescente. Poiché  $f'(x)$  è strettamente crescente in  $[0, 2[$  e in  $]4, 6]$  negli stessi intervalli il segno di  $f''$  dovrà essere positivo ossia  $f''(x) > 0$ .

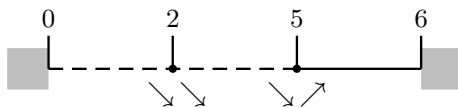
In  $x \in ]2, 4[$  è invece  $f''(x) < 0$  dato che il grafico di  $f'$  appare in tale insieme strettamente decrescente. Infine in  $f''(2) = 0$  e  $f''(4) = 0$  in quanto  $x = 2$  è punto di massimo relativo proprio mentre in  $x = 4$  vi è un minimo relativo proprio entrambi con tangente orizzontale. Riassunte nella fig. 2 queste osservazioni e tenuto conto che il segno di  $f''$  definisce le concavità/concavità di una funzione

**Fig. 2.** Segno della funzione derivata seconda  $f''(x)$  e concavità di  $f$ .

appare che la funzione  $f(x)$  presenterà la concavità rivolta verso l'alto quanto  $x \in ]0, 2[ \cup ]4, 6[$ , nel verso opposto quando  $x \in ]2, 4[$ . I punti di flesso per  $f$  sono quindi  $x = 2$  e  $x = 4$ .

2. Per quanto riguarda la ricerca dei valori estremi della funzione  $f$  va esplicitato il segno della sua derivata prima: in base al grafico di fig. 1 risulta

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 & \text{ se } x \in [0, 2[ \cup ]2, 5[, \\ f'(2) = f'(5) & = 0, \\ f'(x) > 0 & \text{ se } x \in ]5, 6], \end{aligned}$$



**Fig. 3.** Segno della funzione derivata prima  $f'(x)$  e monotonia di  $f$ .

segno che riassumiamo nella fig. 3.

L'esistenza di  $f'(x)$  in  $[0, 6]$  assicura pure la continuità della funzione  $f$  nello stesso intervallo per cui possiamo applicare il corollario del teorema di Lagrange sulla monotonia di una funzione. In particolare, a partire dal valore 9 assunto in  $x = 0$ ,  $f(0) = 9$ ,  $f$  decresce e assume in  $x = 5$  il suo valore minimo  $m$  che, per la condizione  $f(5) = 3$ , vale  $m = 3$ . La funzione è poi strettamente crescente fino a  $x = 6$ . Il punto di minimo assoluto è quindi  $x = 5$  mentre per determinare il massimo assoluto dovremo calcolare  $f(6)$  e confrontarlo con  $f(0) = 9$ .

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che tra  $f$  ed  $f'$  sussiste la relazione

$$\int_0^x f'(t) dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - 9$$

dalla quale si ricava che

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + 9.$$

Imponendo la condizione data dal testo

$$\int_0^6 f'(t) dt = -5,$$

possiamo calcolare  $f(6)$

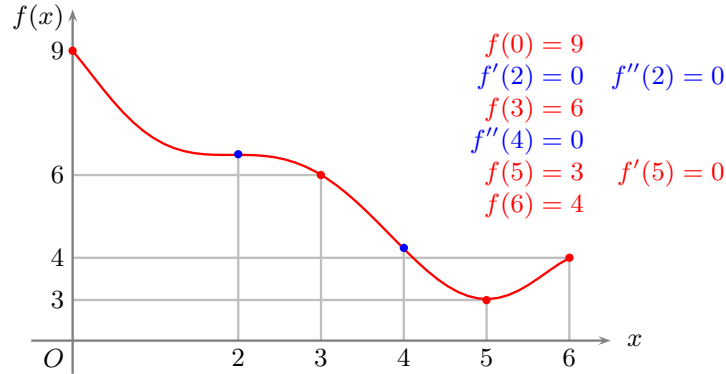
$$f(6) = \int_0^6 f'(t) dt + 9 = -5 + 9 = 4.$$

Osservato che  $f(0) > f(6)$ , significa che il massimo assoluto è raggiunto in  $x = 0$ .

3. In base alle informazioni date dal testo,  $f(0) = 9$ ,  $f(3) = 6$ ,  $f(5) = 3$  o dedotte nel punto precedente,  $f(6) = 4$ , le osservazioni sulla monotonia e sui punti di flesso e concavità/convessità, un possibile grafico di  $f$  è riportato nella figura 4 dove sono evidenziati (in colore rosso) i punti noti e i punti di flesso (in blu) del possibile grafico: in particolare  $x = 2$  è un punto di flesso orizzontale discendente.

4. La retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $x = 3$  è rappresentata dall'equazione  $t: y - f(3) = f'(3)(x - 3)$  che, con il dato  $f(3) = 6$  assieme all'informazione deducibile dal grafico di  $f'$ ,  $f'(3) = -1$ , diviene

$$t: y - 6 = -(x - 3) \quad \text{cioè} \quad t: y = -x + 9. \quad (1)$$



**Fig. 4.** Possibile grafico della  $f(x)$  e dati forniti o dedotti ( $Oxy$  non isometrico).

Analogamente, per la funzione

$$g(x) = xf(x) \quad (2)$$

la retta tangente risulta

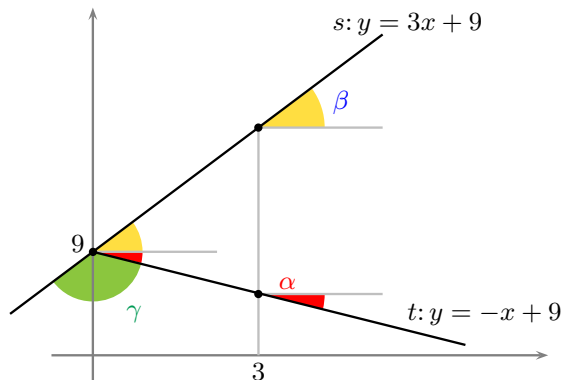
$$s: y - g(3) = g'(3)(x - 3)$$

dove, per determinarla, vanno calcolati i valori di  $g(3)$  e  $g'(3)$ . Il primo deriva immediatamente dalla definizione (2) da cui  $g(3) = 3 \cdot f(3) = 3 \cdot 6 = 18$ .

Poiché inoltre

$$g'(x) = 1 \cdot f(x) + xf'(x) = f(x) + xf'(x)$$

abbiamo  $g'(3) = f(3) + 3f'(3) = 6 + 3(-1) = 3$  per cui  $s: y - 18 = 3(x - 3)$  ossia  $s: y = 3x + 9$  (fig. 5).



**Fig. 5.** Rette  $t$  ed  $s$  e angolo acuto tra di esse (sistema non isometrico).

Ricordiamo che il coefficiente angolare di una retta rappresenta la tangente goniometrica dell'angolo orientato che la retta determina con il semiasse positivo delle ascisse. Così, in riferimento alla figura 5 dove sono riportate le rette  $t$  ed  $s$  e gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  che queste determinano, rispettivamente, con l'asse  $x$ , valgono le uguaglianze

$$m_t = -1 = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad m_s = 3 = \operatorname{tg} \beta.$$

In particolare è  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ . Osserviamo che l'angolo  $\gamma$  (in verde nella fig. 5 dove il sistema non è isometrico) è acuto, in quanto  $\operatorname{tg} \beta > \sqrt{3}$  e  $\beta > \frac{\pi}{3}$ . Considerando il segno negativo di  $\alpha$ ,  $\gamma$  si può esprimere come

$$\gamma = \pi - (\beta - \alpha) = \pi - \beta + \alpha = \pi - \beta - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \beta.$$

Utilizzando nel calcolo di  $\operatorname{tg} \gamma$  la formula di addizione otteniamo infine

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \beta\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \beta} \\ &= \frac{-1 - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta} = \frac{-1 - 3}{1 - 3} = \frac{-4}{-2} = 2, \end{aligned}$$

da cui  $\gamma = \operatorname{arctg} 2 \approx 63,4349^\circ$ .

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

1. I grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  sono noti e sono riportati, assieme alla regione  $R$  di cui si chiede l'area, nella figura fig. 1. Quest'ultima si calcola con l'integrale definito

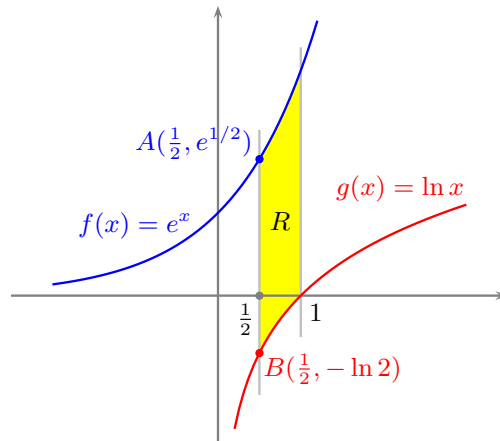
$$\mathcal{A}(R) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^x - \ln x) dx,$$

integrale che, per la proprietà di linearità, si suddivide nei corrispondenti integrali indefiniti  $\int e^x dx$  e  $\int \ln x dx$ . Il primo è immediato,  $\int e^x dx = e^x + c$ , mentre per risolvere il secondo procediamo con il metodo per parti considerando il termine  $dx$  come il fattore differenziale. Segue che

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int x D(\ln x) dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c. \end{aligned}$$

La misura  $\mathcal{A}(R)$  dell'area è quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^x - \ln x) dx = [e^x - (x \ln x - x)]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left[ e - (1 \ln 1 - 1) - e^{1/2} + \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= e + 1 - \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \\ &= e - \sqrt{e} + \frac{1}{2} (1 - \ln 2) \approx 1,2230. \end{aligned}$$



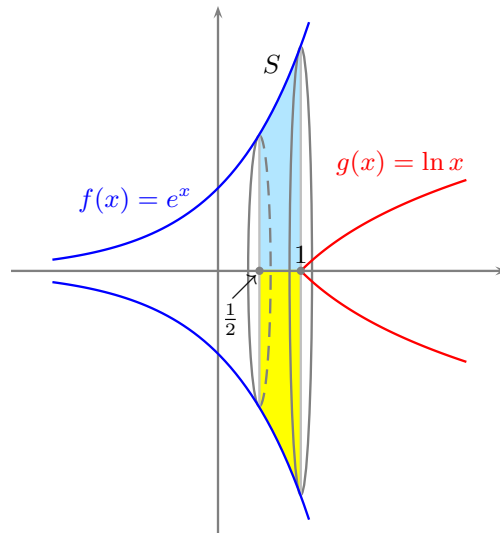
**Fig. 1.** Grafici di  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln x$ .

2. La regione  $R$  ruotando attorno all'asse  $x$  genera il solido  $S$  rappresentato in figura 2. Detti comunque  $A$  e  $B$  i punti di intersezione della retta di equazione  $x = \frac{1}{2}$  rispettivamente con l'esponenziale e con il logaritmo,

$$A\left(\frac{1}{2}, e^{1/2}\right) \equiv \left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right), \quad B\left(\frac{1}{2}, \ln \frac{1}{2}\right) \equiv \left(\frac{1}{2}, -\ln 2\right),$$

va notato che  $y_A > |y_B|$  in quanto  $\sqrt{e} > \ln 2$ . Il solido  $S$  è quindi generato dalla rotazione del solo trapezoide associato alla funzione  $f$  ed evidenziato in celeste nella figura 2. Pertanto il volume di  $S$  è dato dall'integrale

$$\mathcal{V}(S) = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 [e^x]^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{2x} dx.$$



**Fig. 2.** Solido  $S$  di rotazione attorno all'asse  $x$ .

Per determinare il volume di  $T$  riportiamo la rotazione attorno all'asse della variabile indipendente considerando le funzioni inverse di  $f$  e  $g$  ossia

$$\begin{aligned} f^{-1}: x = \ln y, & \quad x \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right], \quad y \in [\sqrt{e}, e] \\ g^{-1}: x = e^y & \quad x \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right], \quad y \in [-\ln 2, 0]. \end{aligned}$$

Applichiamo a queste la trasformazione di simmetria assiale  $x' = y \wedge y' = x$  avente per asse la bisettrice  $y = x$  a seguito della quale le precedenti si riscrivono come

$$\begin{aligned} f^{-1}: y' = \ln x', & \quad y' \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right], \quad x' \in [\sqrt{e}, e] \\ g^{-1}: y' = e^{x'} & \quad y' \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right], \quad x' \in [-\ln 2, 0]. \end{aligned}$$

Lasciando cadere l'apice di  $x'$  e  $y'$ , il solido  $T$  è ora generato dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $x$  e si può ritenere formato dalla rotazione di tre regioni,  $R_1, R_2$

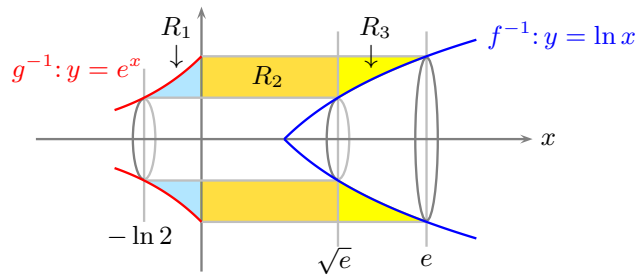
ed  $R_3$  (fig. 3) definite come

$$R_1 = \left\{ (x, y) \mid -\ln 2 \leq x \leq 0 \wedge \frac{1}{2} \leq y \leq e^x \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{e} \wedge \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

$$R_3 = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{e} \leq x \leq e \wedge \ln x \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

e, rispettivamente, di colore celeste, arancio e giallo nella figura 3.



**Fig. 3.** Solido  $T$  dopo la simmetria di asse  $y = x$ .

Il volume richiesto è allora dato dalla somma di

$$\mathcal{V}(T) = \mathcal{V}(R_1) + \mathcal{V}(R_2) + \mathcal{V}(R_3).$$

Tenendo conto che il volume generato dalla rotazione di una regione compresa tra due funzioni e le rette  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ , attorno all'asse della variabile indipendente è espresso dall'integrale

$$\mathcal{V} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

dove  $f(x) \geq g(x)$ , il calcolo dei contributi delle tre regioni è:

$$\mathcal{V}(R_1) = \pi \int_{-\ln 2}^0 \left[ (e^x)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] dx$$

$$\mathcal{V}(R_2) = \pi \int_0^{\sqrt{e}} \left[ 1^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] dx$$

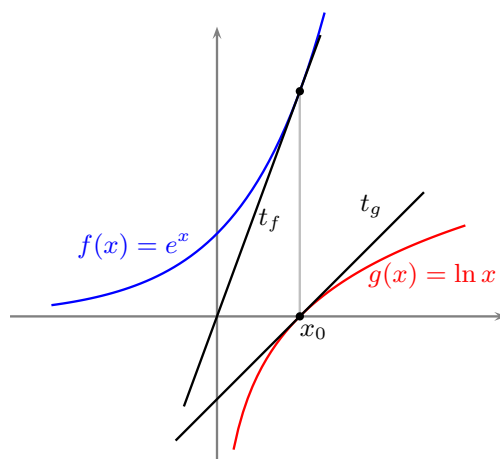
$$\mathcal{V}(R_3) = \pi \int_{\sqrt{e}}^e (1^2 - \ln^2 x) dx$$

per cui in definitiva giungiamo all'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi \int_{-\ln 2}^0 \left( e^{2x} - \frac{1}{4} \right) dx + \pi \int_0^{\sqrt{e}} \frac{3}{4} dx + \pi \int_{\sqrt{e}}^e (1 - \ln^2 x) dx \\ &= \pi \int_{-\ln 2}^0 \left( e^{2x} - \frac{1}{4} \right) dx + \frac{3\pi\sqrt{e}}{4} + \pi \int_{\sqrt{e}}^e (1 - \ln^2 x) dx. \end{aligned}$$

3. Le rette  $t_f$  e  $t_g$  tangenti rispettivamente a  $f$  e a  $g$  in un generico punto  $x_0$  sono parallele (fig. 4) se i loro coefficienti angolari sono uguali. Poiché questi sono espressi dalle derivate,  $f'(x) = e^x$  e  $g'(x) = \frac{1}{x}$ , il loro calcolo in  $x_0$  fornisce

$$m_f = e^{x_0} \quad m_g = \frac{1}{x_0}$$



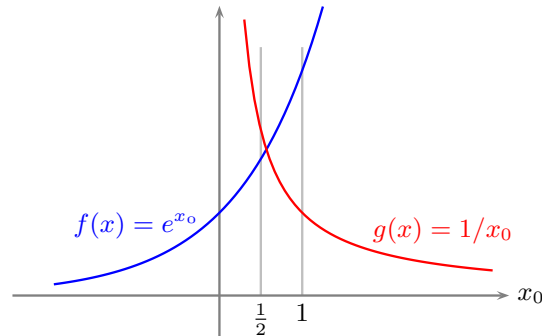
**Fig. 4.** Grafici di  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln x$  e rette tangenti.

e la condizione di parallelismo diviene

$$m_f = m_g \quad \Longrightarrow \quad e^{x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

La rappresentazione grafica delle funzioni (la seconda rappresenta un ramo di iperbole equilatera) coinvolte in ciascun membro della precedente equazione, fig. 5, aiuta a comprendere che tale equazione dev'essere soddisfatta da un solo valore in quanto i rispettivi grafici si intersecano manifestamente in un unico punto. Per dimostrarlo definiamo la funzione

$$k(x) = e^x - \frac{1}{x} \quad (1)$$



**Fig. 5.** Grafici delle funzioni  $y = e^{x_0}$  e  $y = 1/x_0$ .

e dimostriamo che l'equazione associata,  $k(x) = 0$ , presenta un'unica soluzione. A questo scopo osserviamo che per  $x = \frac{1}{2}$  tale funzione assume il valore

$$k\left(\frac{1}{2}\right) = e^{1/2} - \frac{1}{(1/2)} = \sqrt{e} - 2 \approx -0,3513 < 0$$

mentre risulta  $k(1) = e^1 - 1 \approx 1,718 > 0$ .

Pertanto la funzione  $k$  nell'intervallo  $[\frac{1}{2}, 1]$  assume valori di segno opposto ed essendo continua in tale intervallo, il teorema degli zeri assicura l'esistenza di almeno un valore  $\alpha$  in corrispondenza del quale  $k(\alpha) = 0$ . Poiché inoltre la derivata prima è

$$k'(x) = D\left(e^x - \frac{1}{x}\right) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

la funzione  $k$  è strettamente crescente in  $[\frac{1}{2}, 1]$  e quindi  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$  è unico.

Dato che sono già note sia  $k$  che  $k'$ , utilizzeremo il metodo delle tangenti (o di Newton) per ottenere una stima numerica di  $\alpha$ . La relazione di ricorrenza di tale metodo è

$$x_{n+1} = x_n - \frac{k(x_n)}{k'(x_n)}$$

e nel nostro caso diviene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - (1/x_n)}{e^{x_n} + (1/x_n^2)},$$

riscritta più convenientemente come

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 e^{x_n} - x_n}{x_n^2 e^{x_n} + 1}.$$

Se quindi consideriamo come punto iniziale  $x_1 = \frac{1}{2}$  la precedente fornisce  $x_2 = 0,5622$  mentre nella seconda iterazione abbiamo  $x_3 = 0,5671$  che differisce per

meno di un centesimo dalla precedente. Possiamo quindi già fermare l'iterazione e concludere che, a meno di  $10^{-2}$ , è  $\alpha = 0,56$  (un calcolo automatico mostra che la seconda iterazione  $x_3 = 0,5671$  fornisce una stima con errore inferiore a  $10^{-4}$ ).

4. Definita la funzione  $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \ln x$  osserviamo che essa è continua in  $[\frac{1}{2}, 1]$  e la sua derivata nel medesimo intervallo

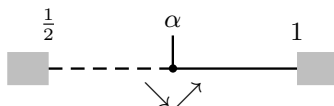
$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x} \quad (2)$$

coincide con la funzione  $k(x)$  studiata precedentemente (1). Pertanto ricordato il segno discorde dei valori di  $h'(x) = k(x)$  assunti agli estremi e il segno della derivata prima,  $k'(x)$ , ossia della derivata seconda di  $h(x)$ ,

$$h''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

possiamo affermare con il teorema degli zeri che esiste un solo valore  $\alpha \approx 0,5671$  tale che  $h'(\alpha) = 0$ . Per la monotonia crescente di (2) dev'essere inoltre

$$h'(x) < 0 \quad \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq x < \alpha, \quad h'(x) > 0 \quad \text{se} \quad \alpha < x \leq 1.$$



**Fig. 6.** Segno di  $h'(x)$  in  $[\frac{1}{2}, 1]$  e minimo assoluto di  $h(x)$ .

Riassunto il segno di  $h'(x)$  nella fig. 6 osserviamo come  $h(x)$  sia decrescente in  $[\frac{1}{2}, \alpha]$  e crescente in  $]\alpha, 1]$ . Concludiamo quindi che il minimo assoluto di  $h(x)$  viene raggiunto in corrispondenza di  $x = \alpha$  mentre il massimo assoluto potrà presentarsi in uno degli estremi. Poiché comunque il calcolo esplicito della funzione negli estremi dell'intervallo fornisce

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{1/2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + \ln 2 \approx 2,3419,$$

$$h(1) = e^1 - \ln 1 = e \approx 2,7183$$

e  $h(1) > h(\frac{1}{2})$ , allora il massimo assoluto si raggiunge nell'estremo destro dell'intervallo ossia in  $x = 1$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

La funzione ad argomento del limite appare essere il quoziente della funzione  $f(x) = 2^{3x} - 3^{4x}$  con  $g(x) = x^2$ . Poiché comunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{3x} - 3^{4x} = f(0) = 1 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0,$$

il limite richiesto conduce ad una forma indeterminata del tipo  $0/0$ . Studiamo quindi il limite del rapporto delle derivate di  $f(x)$  e  $g(x)$  per analizzare l'applicabilità del teorema di De L'Hôpital. Il nuovo limite è allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln 2 \cdot 2^{3x} - 4 \ln 3 \cdot 3^{4x}}{2x} \quad (1)$$

e poiché risulta

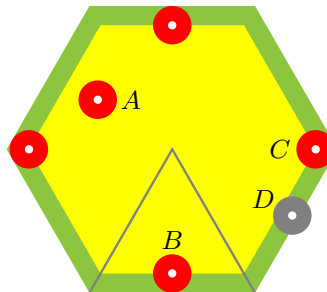
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \ln 2 \cdot 2^{3x} - 4 \ln 3 \cdot 3^{4x}) &= 3 \ln 2 \cdot 2^0 - 4 \ln 3 \cdot 3^0 \\ &= \ln 2^3 - \ln 3^4 \\ &= \ln 8 - \ln 81 \\ &= \ln\left(\frac{8}{81}\right) < 0 \end{aligned}$$

e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0^+$ , possiamo concludere che il limite (1) esiste e vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln 2 \cdot 2^{3x} - 4 \ln 3 \cdot 3^{4x}}{2x} = -\infty.$$

Il teorema citato è pertanto applicabile al limite originario e possiamo affermare che

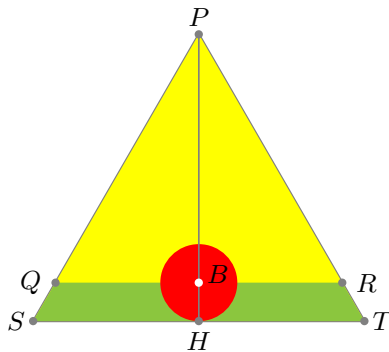
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2} = -\infty.$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

**Fig. 1.** Mattonella esagonale e, in giallo, zona permessa.

La figura 1 riporta alcune posizioni permesse per la moneta ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) assieme ad una dove invece la moneta è sovrapposta ad un bordo della mattonella ( $D$ ). Perché quindi la moneta cada nella regione permessa del pavimento il suo centro dovrà avere una distanza maggiore (posizione  $A$ ) o uguale (posizioni  $B$  e  $C$ ) al raggio  $r$  della moneta stessa.

Considerando una mattonella e, in particolare una sua porzione equilatera  $\triangle PST$  (fig. 2), determiniamo la lunghezza del lato della regione esagonale permessa (in giallo nella fig. 1) cioè la lunghezza del lato  $QR$  del triangolo equilatero  $PQR$ .



**Fig. 2.** Porzione equilatera di una mattonella.

Se  $\overline{ST} = l$  è il lato dell'esagono e di  $\triangle PST$  (fig. 2), la misura dell'altezza  $PH$  è ovviamente  $\overline{PH} = l \sin 60^\circ = l \frac{\sqrt{3}}{2}$ : l'altezza  $PB$  di  $\triangle PQR$  è perciò

$$\overline{PB} = \overline{PH} - \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2} l - r. \quad (1)$$

Sfruttando ancora la relazione goniometrica  $\overline{PB} = \overline{PR} \sin 60^\circ$  valida in un triangolo equilatero e il risultato precedente (1), ricaviamo la lunghezza del lato dell'esagono interno

$$\overline{PR} = \frac{\overline{PB}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{PB}}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l - r \right) = \overline{QR}.$$

Le aree dei triangoli  $PST$  e  $PQR$  sono quindi

$$\mathcal{A}(\triangle PST) = \frac{1}{2} \overline{ST} \cdot \overline{PH} = \frac{1}{2} l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle PQR) &= \frac{1}{2} \overline{QR} \cdot \overline{PB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l - r \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l - r \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l - r \right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Supposto che la probabilità della moneta di cadere entro una certa area sia proporzionale all'area stessa, quanto chiesto dal quesito si ottiene rapportando l'area dell'esagono giallo di fig. 1 e pari a  $\mathcal{A}(\text{giallo}) = 6 \cdot \mathcal{A}(\triangle PQR)$ , con l'area della mattonella esagonale  $\mathcal{A}(\text{matt}) = 6 \cdot \mathcal{A}(\triangle PST)$ . La probabilità cercata si traduce quindi nel rapporto

$$p = \frac{\mathcal{A}(\text{giallo})}{\mathcal{A}(\text{matt})} = \frac{6\mathcal{A}(\triangle PQR)}{6\mathcal{A}(\triangle PST)} = \frac{\mathcal{A}(\triangle PQR)}{\mathcal{A}(\triangle PST)}.$$

Sostituendo i risultati (2) e (3) otteniamo

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l - r \right)^2 \bigg/ \left( \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \right) = \frac{4}{3l^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l - r \right)^2.$$

Non rimane che inserire i valori numeri  $l = 10$  cm e  $r = (2,325)/2$  cm per cui il risultato finale è

$$p = \frac{4}{3 \cdot 10^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 - \frac{2,325}{2} \right) \approx 0,7496.$$

Per un problema analogo si veda il quesito 3 dell'es. 2009 PNI.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

La pendenza della retta tangente ad una curva di equazione  $f(x) = 3^x$  è espressa dalla derivata prima  $f'(x)$  che in tal caso risulta  $f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x$ . Posto quindi

$$f'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln 3 \cdot 3^x = 1,$$

intendiamo risolvere questa equazione nell'incognita  $x$  esplicitando innanzitutto l'esponenziale a primo membro

$$3^x = \frac{1}{\ln 3}.$$

Osservata la positività dei due membri e per l'iniettività della funzione logaritmo, consideriamo il logaritmo naturale di entrambi i membri

$$\ln(3^x) = \ln\left(\frac{1}{\ln 3}\right).$$

Ne discende che, per le proprietà del logaritmo, la soluzione è

$$x \ln 3 = -\ln(\ln 3) \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3}.$$

Il calcolo approssimato di tale numero a meno di  $10^{-3}$  fornisce il valore  $x \approx -0,086$ .

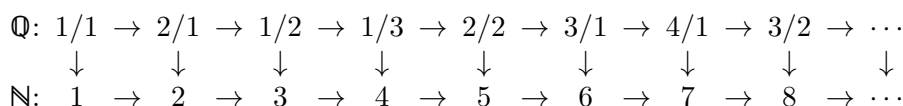
**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

L'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  e l'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  sono equipotenti in quanto, come ha dimostrato Georg Cantor, tra essi è possibile instaurare una corrispondenza biunivoca. E poiché un insieme equipotente a  $\mathbb{N}$  si dice avente la *potenza del numerabile* anche  $\mathbb{Q}$  ha la potenza del numerabile.

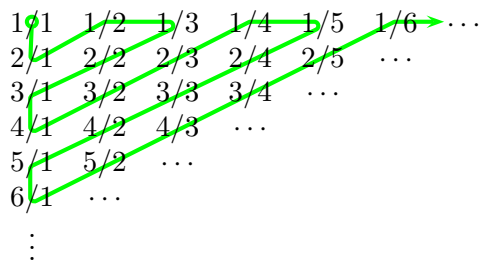
La dimostrazione di quest'ultima affermazione consiste nel ricercare un ordinamento degli elementi dell'insieme  $\mathbb{Q}^+$  in modo da metterli in corrispondenza biunivoca con gli elementi di  $\mathbb{N}$  così da definire una successione  $r_0, r_1, r_2, \dots$  in cui siano compresi tutti i numeri razionali. Scriviamo pertanto gli elementi di  $\mathbb{Q}^+$  disponendoli nella tabella seguente

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	...
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	...
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	...
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

dove ogni numero razionale positivo  $m/n$  con  $m$  e  $n$  numeri interi occupa la posizione della  $m$ -esima riga e  $n$ -esima colonna. Associamo ora il numero naturale 0 al razionale 0 (non presente nella tabella) e quindi iniziamo a percorrere la tabella dall'elemento 1/1 e associamo ciascun numero razionale ad un intero



La corrispondenza precedente si può rappresentare anche più efficacemente sovrapponendo alla tabella precedente il percorso a zig-zag che comprende via via tutti i numeri razionali ed evidenziato in colore nella tabella sottostante.



L'ordinamento definito dalla funzione  $h: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$  appena descritta permette quindi di far corrispondere ad ogni elemento di  $\mathbb{Q}^+$  uno ed uno solo elemento di  $\mathbb{N}$  e viceversa per cui  $h$  è evidentemente biunivoca. I due insiemi hanno quindi la potenza del numerabile e sono pertanto equipotenti.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 5.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

L'equazione

$$y = x^3 + ax + b \quad (1)$$

rientra, come caso particolare, nelle equazioni rappresentative delle funzioni cubiche  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  le quali, come si può dimostrare, sono tutte simmetriche rispetto al loro punto di flesso.

Determiniamo quindi tale punto eseguendo la derivata prima,  $y' = 3x^2 + a$  e quindi la derivata seconda,  $y'' = 6x$ . Poiché questa si annulla in  $x = 0$  e cambia il suo segno con continuità negli intorno di 0, il punto di flesso possiede ascissa nulla e ordinata  $y(0) = 0 + 0 + b = b$ .

Dovremo ora dimostrare che l'equazione data è invariante per una trasformazione di simmetria centrale  $\sigma$  di centro  $C(0, b)$ . Le equazioni di una generica simmetria centrale rispetto ad un centro di coordinate  $(a, b)$  sono

$$\sigma(a, b) : \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b, \end{cases}$$

e, nel nostro caso, queste si riducono alle

$$\sigma(0, b) : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + 2b. \end{cases}$$

Ottenute le equazioni della trasformazione inversa

$$\sigma^{-1}(0, b) : \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' + 2b, \end{cases}$$

le sostituiamo nell'equazione originaria  $y = x^3 + ax + b$  e giungiamo alla nuova equazione

$$-y' + 2b = (-x')^3 + a(-x') + b.$$

Alcuni semplici passaggi algebrici permettono di esplicitare  $y'$  in un membro

$$-y' = -(x')^3 - ax' + b - 2b$$

per giungere alla

$$y' = (x')^3 + a(x') + b. \quad (2)$$

È ora immediato constatare che, se la coppia  $(x, y)$  è soluzione dell'equazione (1), allora pure  $(x', y')$  lo è in quanto l'equazione ottenuta (2) è la medesima. La curva data è quindi simmetrica rispetto al punto  $(0, b)$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 7.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

La situazione descritta dal quesito è quella che si associa tipicamente alla formula di Bayes: sapendo che un dato evento si è effettivamente verificato, nel nostro caso

$$E = \{\text{un pezzo è difettoso}\},$$

si vuole calcolare la probabilità che questo provenga da uno specifico stabilimento tra i tre che lo possono aver prodotto. Definiamo pertanto i tre eventi

$$A = \{\text{pezzo prodotto nello stabilimento } \mathbf{A}\},$$

$$B = \{\text{pezzo prodotto nello stabilimento } \mathbf{B}\},$$

$$C = \{\text{pezzo prodotto nello stabilimento } \mathbf{C}\},$$

e notiamo che questi eventi sono disgiunti (per es. un pezzo prodotto in  $\mathbf{A}$  non può essere stato prodotto pure in  $\mathbf{B}$ ) e rappresentano i soli eventi possibili. La probabilità  $p(E)$  che un pezzo sia difettoso si ottiene con l'applicazione del teorema delle probabilità totali

$$p(E) = p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E).$$

Ora dalla definizione di probabilità condizionata abbiamo che la probabilità dell'evento

$$A \cap E = \{\text{il pezzo proviene dallo stabilimento } \mathbf{A} \text{ e è difettoso}\}$$

si può riscrivere come

$$p(A \cap E) = p(A) \cdot p(E|A) \quad (1)$$

dove  $p(A)$  è la probabilità che un pezzo sia prodotto dallo stabilimento  $\mathbf{A}$  e  $p(E|A)$  indica la probabilità con la quale lo stabilimento  $\mathbf{A}$  produce pezzi difettosi. Con i dati del quesito risulta

$$p(A) = 50\% = \frac{1}{2}, \quad p(E|A) = 10\% = \frac{1}{10}$$

per cui

$$p(A \cap E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}. \quad (2)$$

Analogamente per i restanti eventi,  $E \cap B$  e  $E \cap C$ ,

$$p(B \cap E) = p(B) \cdot p(E|B) = 33,3\% \cdot 7\% = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{100}$$

$$p(C \cap E) = p(C) \cdot p(E|C) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 5\% = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{100}$$

essendo  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  la frazione di pezzi prodotti dallo stabilimento **C**. La probabilità che un pezzo sia comunque difettoso diviene è

$$p(E) = p(A) \cdot p(E|A) + p(B) \cdot p(E|B) + p(C) \cdot p(E|C) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{100} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{100} = \frac{49}{600}. \quad (4)$$

La richiesta del quesito riguarda la probabilità  $p(A|E)$  che un pezzo (osservato) difettoso provenga dallo stabilimento **A**. Se quindi vi sono determinate cause per la constatazione di un effetto, si intende qui ottenere la probabilità che questo effetto sia dovuto ad una particolare causa: in sostanza si vuole *inferire*, da certe premesse, la probabilità di una relazione di causa/effetto.

La formula di Bayes fornisce la risposta a questa inferenza pesando la probabilità  $p(A \cap E)$  con la probabilità totale  $p(E)$ . Nel caso in esame diviene cioè

$$p(A|E) = \frac{p(A \cap E)}{p(E)}.$$

In base alle precedenti (1) e (3),  $p(A|E)$  diviene

$$p(A|E) = \frac{p(A \cap E)}{p(E)} = \frac{p(A) \cdot p(E|A)}{p(E)}$$

$$= \frac{p(A) \cdot p(E|A)}{p(A) \cdot p(E|A) + p(B) \cdot p(E|B) + p(C) \cdot p(E|C)} \quad (5)$$

per cui, sostituendo i valori già calcolati (2) e (4), risulta

$$p(A|E) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{49}{600}} = \frac{30}{49} \approx 0,6122.$$

Un utile modello grafico fornisce una vista alternativa della formula (5): le tre "cause" che stanno alla base dei pezzi difettosi possiamo visualizzarle (fig. 1) come tre segmenti uscenti da un medesimo punto associando a ciascun ramo la

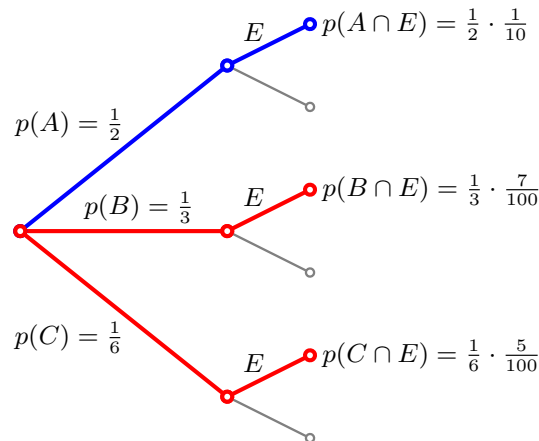


Fig. 1. Albero degli eventi.

probabilità del pezzo prodotto, rispettivamente  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ . Prodotto un pezzo può succedere che questo sia difettoso (evento  $E$ ) o meno, per cui vi è una ulteriore biforcazione nella successione degli eventi. Ora la somma dei prodotti delle probabilità dei singoli rami che conducono ad un pezzo difettoso (rami in colore nella fig. 1) esprime la probabilità totale (3) dell'evento  $E$ . La probabilità che lo stabilimento  $A$  sia all'origine di un pezzo difettoso si ottiene, come espresso dalla (5), rapportando le probabilità del ramo connesso ad  $A$  (in blu nella figura) con la probabilità totale.

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 9.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

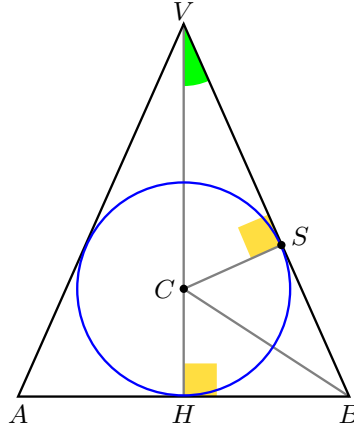
Consideriamo la sezione piana del cono passante per il suo vertice  $V$  e per il centro  $C$  della sfera (fig. 1). Poiché il cono è retto la sua altezza cade nel centro della base: sia quindi  $H$  il piede dell'altezza. Detti  $A$  e  $B$  gli estremi di un diametro di base, il triangolo  $VHB$ , rettangolo in  $H$ , è simile a  $\triangle VSC$  ( $\triangle VHB \sim \triangle VSC$ ) in quanto  $S$ , punto di contatto (o tangenza) tra cono e sfera, assicura che  $\angle VSC$  sia retto.

Ricordato che  $\overline{CS} = r$  e posto  $x = \overline{VC}$  con  $x > r$ , il teorema di Pitagora applicato a  $\triangle VSC$  permette di determinare

$$\overline{VS} = \sqrt{\overline{VC}^2 - \overline{CS}^2} = \sqrt{x^2 - r^2}$$

mentre per la similitudine osservata valgono i rapporti

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{VH}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{VS}} \tag{1}$$



**Fig. 1.** Sezione piana  $VAB$  del cono circoscritto e della sfera.

e

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{VH}} = \frac{\overline{VC}}{\overline{VS}}. \quad (2)$$

Da (1) deduciamo

$$\overline{HB} = \frac{\overline{CS} \cdot \overline{VH}}{\overline{VS}} = \frac{r \cdot (x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad (3)$$

mentre da (2)

$$\overline{VB} = \frac{\overline{VC} \cdot \overline{VH}}{\overline{VS}} = \frac{x \cdot (x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}. \quad (4)$$

L'area laterale  $\mathcal{A}_l$  del cono è data dalla

$$\mathcal{A}_l = \frac{1}{2} (2\pi \overline{HB}) \cdot \overline{VB}$$

per cui, in base alle (3) e (4) e in funzione della variabile  $x$  diviene

$$\mathcal{A}_l(x) = \pi \cdot \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \cdot \frac{x(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

che semplifichiamo in

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l(x) &= \frac{\pi r x (x+r)^2}{x^2 - r^2} = \frac{\pi r x (x+r)^2}{(x-r)(x+r)} \\ &= \pi r \cdot \frac{x^2 + rx}{x-r} \wedge x > r. \end{aligned}$$

La ricerca del minimo deve evidentemente passare per il calcolo della derivata prima che è

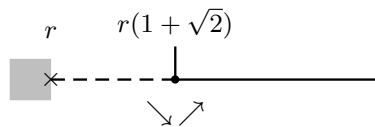
$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_l(x) &= \pi r \cdot \frac{(2x+r)(x-r) - 1(x^2+rx)}{(x-r)^2} \\ &= \pi r \cdot \frac{2x^2 - 2rx + rx - r^2 - x^2 - rx}{(x-r)^2} \\ &= \pi r \cdot \frac{x^2 - 2rx - r^2}{(x-r)^2}. \end{aligned}$$

Il segno di quest'ultima espressione coincide con quello del numeratore in quanto gli altri termini sono comunque positivi. Perché sia  $\mathcal{A}'_l(x) \geq 0$  dev'essere

$$x^2 - 2rx - r^2 \geq 0 \implies x_{1,2} = r \pm \sqrt{r^2 + r^2} = r \pm r\sqrt{2} = r(1 \pm \sqrt{2})$$

e quindi

$$\mathcal{A}'_l(x) \geq 0 \iff x \leq r(1 - \sqrt{2}) \wedge x \geq r(1 + \sqrt{2}).$$



**Fig. 2.** Segno della derivata prima  $\mathcal{A}'_l(x)$ .

Considerato che la variabile deve soddisfare la condizione  $x > r$  la rappresentazione grafica di tale segno (fig. 2) con associata l'indicazione della monotonia della funzione  $\mathcal{A}_l(x)$  evidenzia che il minimo assoluto è raggiunto in corrispondenza di  $x_{min} = r(1 + \sqrt{2})$ . Infine la distanza del vertice  $V$  dalla superficie sferica si ottiene facilmente con il sottrarre da  $x_{min}$  il raggio  $r$  della sfera cioè

$$x_{min} - r = \overline{VC}_{min} - r = r\sqrt{2}.$$

# ESAME 2013

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

La funzione  $f$  è definita da

$$f(x) = \int_0^x \left[ \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt$$

per tutti i numeri reali  $x$  appartenenti all'intervallo chiuso  $[0, 9]$ .

1. Si calcolino  $f'(\pi)$  e  $f'(2\pi)$  ove  $f'$  indica la derivata di  $f$ .
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico  $\Sigma$  di  $f'(x)$  e da esso si deduca per quale o quali valori di  $x$ ,  $f(x)$  presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di  $f(x)$  deducendolo da quello di  $f'(x)$ .
3. Si trovi il valor medio di  $f'(x)$  sull'intervallo  $[0, 2\pi]$ .
4. Sia  $R$  la regione del piano delimitata da  $\Sigma$  e dall'asse  $x$  per  $0 \leq x \leq 4$ ;  $R$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni con piani ortogonali all'asse  $x$  hanno, per ciascun  $x$ , area  $A(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ . Si calcoli il volume di  $W$ .

Soluzione

## • Problema n. 2

Sia  $f$  la funzione definita, per tutti gli  $x$  reali, da  $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ .

1. Si studi  $f$  e se ne disegni il grafico  $\Phi$  in un sistema di coordinate cartesiane  $Oxy$ . Si scrivano le equazioni delle tangenti a  $\Phi$  nei punti  $P(-2; 1)$  e  $Q(2; 1)$  e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette  $OP$  e  $OQ$ . Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.

2. Sia  $\Gamma$  la circonferenza di raggio 1 e centro  $(0; 1)$ . Una retta  $t$ , per l'origine degli assi, taglia  $\Gamma$  oltre che in  $O$  in un punto  $A$  e taglia la retta d'equazione  $y = 2$  in un punto  $B$ . Si provi che, qualunque sia  $t$ , l'ascissa  $x$  di  $B$  e l'ordinata  $y$  di  $A$  sono le coordinate  $(x; y)$  di un punto di  $\Phi$ .
3. Si consideri la regione  $R$  compresa tra  $\Phi$  e l'asse  $x$  sull'intervallo  $[0, 2]$ . Si provi che  $R$  è equivalente al cerchio delimitato da  $\Gamma$  e si provi altresì che la regione compresa tra  $\Phi$  e tutto l'asse  $x$  è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione  $R$ , ruotando attorno all'asse  $y$ , genera il solido  $W$ . Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di  $W$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

2. Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}.$$

Soluzione

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti  $A(2; -1)$  e  $B(-6; -8)$ . Si determini l'equazione della retta passante per  $B$  e avente distanza massima da  $A$ .

Soluzione

4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza  $h$  e i lati  $a$  e  $b$  delle due basi. Si esprima il volume  $V$  del tronco in funzione di  $a$ ,  $b$  e  $h$ , illustrando il ragionamento seguito.

Soluzione

5. In un libro si legge: “Due valigie della stessa forma sembrano “quasi uguali”, quanto a capacità, quando differiscono di poco per le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio)”. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

Soluzione

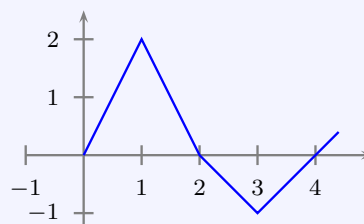
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare  $7! = 5040$  numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?

Soluzione

7. Un foglio rettangolare, di dimensioni  $a$  e  $b$ , ha area  $1 \text{ m}^2$  e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di  $a$  e  $b$ ?

Soluzione

8. La funzione  $f$  ha il grafico in figura. Se  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ , per quale valore positivo di  $x$ ,  $g$  ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



Soluzione

9. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Soluzione

10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di  $f(x)$ , quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di  $f'(x)$ ? Si giustifichi la risposta.

A)

B)

C)

D)

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. La funzione assegnata

$$f(x) = \int_0^x \left[ \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt, \quad x \in [0, 9] \quad (1)$$

rientra nella classe delle funzioni integrali in quanto rappresentata da un integrale definito con la variabile presente negli estremi di integrazione. La funzione integranda  $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$  è manifestamente continua nell'intervallo  $[0, 9]$  per cui l'integrale (1) esiste. Inoltre sappiamo che, per il teorema di Torricelli–Barrow, risulta

$$f'(x) = D[f(x)] = g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}, \quad (2)$$

per cui i valori richiesti si calcolano facilmente come

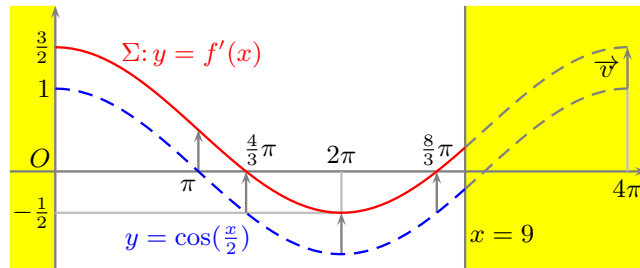
$$f'(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(2\pi) = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = \cos \pi + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Il grafico  $\Sigma$  di  $f'(x)$  si può ricondurre a conoscenze elementari e precedenti allo studio dell'Analisi e, in particolare, riferibili allo studio delle funzioni del tipo  $y = A \operatorname{sen}(ax) + b$  deducibili dalle goniometriche e, per le quali, la periodicità risulta essere pari a  $T = 2\pi/a$ . Difatti, posto  $T = 4\pi$  e ricordata la periodicità della funzione coseno, vale l'identità

$$\begin{aligned} f'(x + 4\pi) &= \cos\left(\frac{x + 4\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) + \frac{1}{2} \\ &= \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} = f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il grafico  $\Sigma$  si ottiene inoltre traslando il grafico di  $\cos \frac{x}{2}$  del vettore  $\vec{v}(0, \frac{1}{2})$ .



**Fig. 1.** Grafici di  $\cos(x/2)$  e di  $f'(x)$  (sistema non isometrico).

Il segno discende dalla disequazione

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \geq 0 \quad \implies \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq -\frac{1}{2},$$

risolta in generale dall'insieme

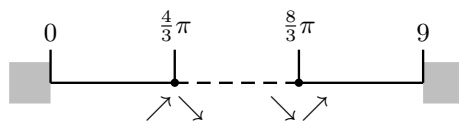
$$-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{da cui} \quad -\frac{4}{3}\pi + 4k\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi + 4k\pi$$

che, intersecato con  $[0, 9]$  si riduce agli intervalli

$$0 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \quad \vee \quad \frac{8}{3}\pi \leq x \leq 9. \quad (3)$$

Agli estremi la  $f'(x)$  assume i valori  $f'(0) = \frac{3}{2}$  e  $f'(9) = \cos \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \approx 0,289$  e il suo grafico  $\Sigma$  è riportato in fig. 1.

Per giungere al grafico della funzione integrale  $f(x)$  conviene riassumere simbolicamente il segno della  $f'(x)$  così da individuare più facilmente la monotonia di



**Fig. 2.** Segno della funzione  $f'(x)$  e monotonia di  $f$ .

$f(x)$ . Difatti, in base a (3) osserviamo come  $f(x)$  sia crescente in  $[0, \frac{4}{3}\pi] \cup [\frac{8}{3}\pi, 9]$  e decrescente in  $]\frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi[$  (fig. 2).

In  $x_1 = \frac{4}{3}\pi$  la  $f(x)$  presenta quindi un massimo relativo proprio mentre in  $x_2 = \frac{8}{3}\pi$  un minimo. Inoltre nell'estremo sinistro la  $f$  assume il valore

$$f(0) = \int_0^0 \left[ \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt = 0$$

mentre la  $f'$  in tale punto è  $f'(0) = \cos 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

Il calcolo della derivata seconda fornisce

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right),$$

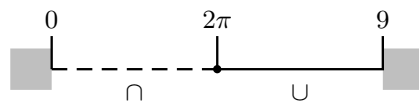
e lo studio del suo segno implica

$$f''(x) \geq 0 \implies -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0 \implies \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \leq 0$$

che ha per soluzioni

$$\pi + 2k\pi \leq \frac{x}{2} \leq 2\pi + 2k\pi \quad \text{cioè} \quad 2\pi + 4k\pi \leq x \leq 4\pi + 4k\pi.$$

Nell'intervallo  $[0, 9]$  il segno è riportato nella fig. 3 per cui la  $f(x)$  ha la concavità verso il basso quando  $x \in [0, 2\pi[$  e verso l'alto se  $x \in ]2\pi, 9]$ .



**Fig. 3.** Segno di  $f''(x)$  e concavità.

In  $x = 2\pi$  presenta quindi un flesso obliquo. Con tali informazioni un possibile grafico è dato in fig. 4.

Pur non richiesto in questo punto (ma nel successivo) si può procedere all'integrazione e quindi scrivere esplicitamente la funzione  $f$ . Difatti scomposta la funzione (1) in due integrali più semplici dei quali uno è immediato

$$f(x) = \int_0^x \left[ \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right] dt = \int_0^x \cos \frac{t}{2} dt + \frac{1}{2} [x]_0^x = \frac{1}{2}x + \int_0^x \cos \frac{t}{2} dt,$$

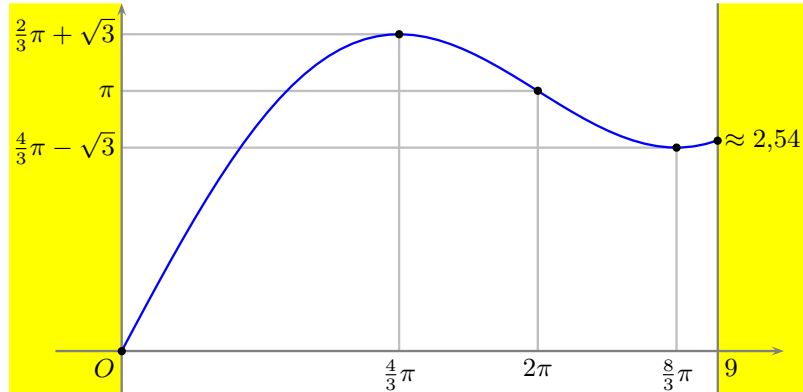


Fig. 4. Possibile grafico di  $f(x)$  (sistema non isometrico).

poniamo  $w = t/2$ ,  $dw = \frac{1}{2}dt$  cioè  $dt = 2dw$  cosicché il secondo diviene

$$\int \cos \frac{t}{2} dt = \int \cos w \cdot (2 dw) = 2 \int \cos w dw = 2 \operatorname{sen} w + c = 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} + c$$

e quindi

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \left[ \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2}x + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}. \quad (4)$$

Pertanto possiamo completare il grafico di fig. 4 con gli ulteriori dati

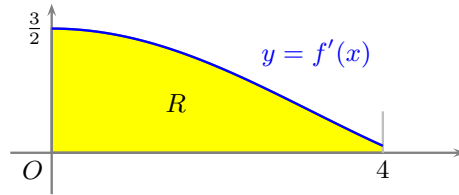
$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{3}\pi\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\right) + 2 \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \\ f\left(\frac{8}{3}\pi\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\pi\right) + 2 \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \\ f(2\pi) &= \frac{1}{2}(2\pi) + 2 \operatorname{sen} \pi = \pi \\ f(9) &= \frac{1}{2} \cdot 9 + 2 \operatorname{sen} \frac{9}{2} \approx 2,54. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Il valor medio di  $f'(x)$  con  $x \in [0, 2\pi]$  è dato dall'integrale

$$\overline{f'} = \frac{1}{(2\pi - 0)} \int_0^{2\pi} \left[ \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right] dt$$

e considerando i risultati espressi dalle (4) e (5) (è ora necessario procedere all'integrazione eseguita sopra), è pure

$$\overline{f'} = \frac{1}{2\pi} \cdot [f(2\pi) - f(0)] = \frac{1}{2\pi} \cdot (\pi - 0) = \frac{1}{2}.$$



**Fig. 5.** Grafico di  $y = f'(x)$  con  $x \in [0, 4]$  e regione  $R$ .

4. Ripreso il grafico  $\Sigma$  di  $f'(x)$  con  $x \in [0, 4]$  (fig. 5) la regione  $R$  base del solido  $W$  è evidenziata in giallo.

Poiché è assegnata solo l'area della sezione e non la sua forma (diversamente da problemi analoghi dove si definivano sezioni di forma rettangolare, triangolare o altra figura geometrica, si veda per es. esame 2011 problema 1), rinunciamo ad una pur generica visualizzazione e calcoliamo il volume richiesto con l'integrale

$$\mathcal{V}(W) = \int_0^4 \mathcal{A}(x) dx$$

essendo  $\mathcal{A}(x)$  l'area della generica sezione. Nel caso in esame è  $\mathcal{A}(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  per cui

$$\mathcal{V}(W) = \int_0^4 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx.$$

Definita la sostituzione di variabile espressa dalle

$$\frac{\pi}{4}x = t, \quad x = \frac{4}{\pi}t, \quad dx = \frac{4}{\pi}dt,$$

l'integrale indefinito associato si riporta facilmente ad uno elementare

$$\begin{aligned} \int 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx &= 3 \int \operatorname{sen} t \cdot \frac{4}{\pi} dt = \frac{12}{\pi} \int \operatorname{sen} t dt \\ &= \frac{12}{\pi} (-\cos t) + c = -\frac{12}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + c \end{aligned}$$

e di conseguenza l'integrale definito fornisce il valore

$$\mathcal{V}(W) = \left[ -\frac{12}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right]_0^4 = -\frac{12}{\pi} \cos \pi + \frac{12}{\pi} \cos 0 = \frac{12}{\pi} + \frac{12}{\pi} = \frac{24}{\pi}.$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1. Poiché  $4 + x^2 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , il dominio della funzione assegnata

$$f(x) = \frac{8}{4 + x^2} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

è l'insieme  $\mathbb{R}$ . Sussiste inoltre l'identità

$$f(-x) = \frac{8}{4 + (-x)^2} = \frac{8}{4 + x^2} = f(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

per cui  $f$  è una funzione pari e il suo grafico  $\Phi$  sarà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. A riguardo del segno è

$$f(x) > 0 \quad \text{se e solo se} \quad 4 + x^2 > 0,$$

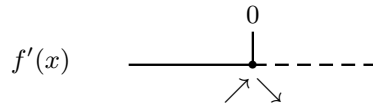
disequazione soddisfatta in tutto il dominio  $\mathbb{R}$ . La funzione  $f$  rientra nella classe delle funzioni razionali fratte ma dato che il denominatore è diverso dallo zero, essa è pure continua in  $\mathbb{R}$  e quindi vanno affrontati i soli limiti agli estremi del dominio. Il loro valore è

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 8 = 8 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 4 + x^2 = +\infty.$$

Il calcolo della derivata prima fornisce l'espressione

$$f'(x) = 8D[(4 + x^2)^{-1}] = -8 \cdot (4 + x^2)^{-1-1} \cdot 2x = \frac{-16x}{(4 + x^2)^2}$$

e la condizione  $f'(x) \geq 0$  implica che sia  $-16x \geq 0$  risolta da  $x \leq 0$  (fig. 1).



**Fig. 1.**

Ne segue che in  $x = 0$  la  $f$  presenta un massimo assoluto del valore di  $f(0) = 8/(4 + 0) = 2$ .

La derivata seconda è

$$\begin{aligned} f''(x) &= -16 \left[ \frac{(4 + x^2)^2 - x \cdot 2(4 + x^2) \cdot 2x}{(4 + x^2)^4} \right] \\ &= \frac{-16(4 + x^2 - 4x^2)}{(4 + x^2)^3} = \frac{16(3x^2 - 4)}{(4 + x^2)^3} \end{aligned}$$

e il suo segno  $f''(x) \geq 0$  dipende solo dal termine  $3x^2 - 4$  in quanto i rimanenti sono positivi. La disequazione  $3x^2 - 4 \geq 0$  ha per soluzioni

$$x^2 \geq \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

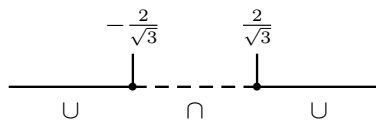


Fig. 2.

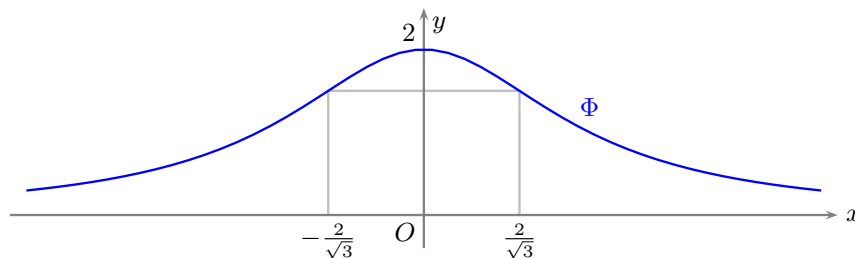


Fig. 3. Grafico  $\Phi$  della funzione  $f(x)$  nel sistema  $Oxy$ .

e la rappresentazione grafica del segno (fig. 2) evidenzia come si dispongono le concavità di  $f$ . In corrispondenza dei due punti di flesso di ascisse  $x_{1,2} = \pm 2/\sqrt{3}$  la funzione assume il valore comune  $f(x_{1,2}) = \frac{3}{2}$ . La fig. 3 rappresenta quindi il grafico richiesto  $\Phi$ .

Incidentalmente notiamo che la funzione assegnata rappresenta un caso particolare della *versiera di Gaetana Agnesi*.

Il coefficiente angolare della tangente in  $P(-2, 1)$  è

$$m_P = f'(-2) = \frac{-16(-2)}{[4 + (-2)^2]^2} = \frac{1}{2}$$

per cui la sua equazione è  $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$  cioè  $y = \frac{1}{2}x + 2$ . La tangente in  $Q(2, 1)$  è rappresentata, per simmetria, da  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  e le rette  $OP$  e  $OQ$  hanno per equazioni rispettivamente  $y = -\frac{1}{2}x$  e  $y = \frac{1}{2}x$  (fig. 4).

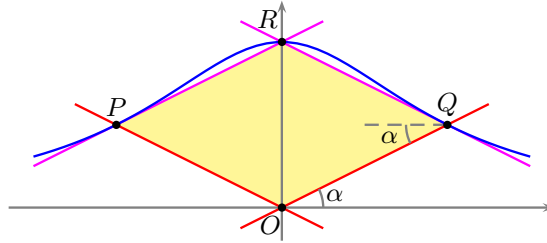
Notiamo che le rette tangenti passano entrambe per il punto di massimo  $R(0, 2)$  e che la retta  $PR$  è parallela ad  $OQ$  in quanto possiedono lo stesso coefficiente angolare: lo stesso avviene per  $OP$  e  $QR$ .  $OQRP$  è quindi un parallelogramma. Poiché inoltre

$$\overline{OP} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \overline{PR} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5},$$

cioè  $\overline{OP} = \overline{PR}$  e, per simmetria,  $\overline{OP} = \overline{PR} = \overline{OQ} = \overline{QR}$  segue che il parallelogramma è pure un rombo.

Detto  $\alpha$  l'angolo formato dalla retta  $OQ$  (fig. 4) con l'asse  $x$ , il coefficiente angolare di  $OQ$  è legato ad  $\alpha$  dalla  $m_{OQ} = \frac{1}{2} = \text{tg } \alpha$  per cui  $\alpha = \text{arctg}(\frac{1}{2})$ . Allora

$$P\hat{O}Q = 2Q\hat{O}R = 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - 2 \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 126,8699^\circ = 126^\circ 52' 12''$$

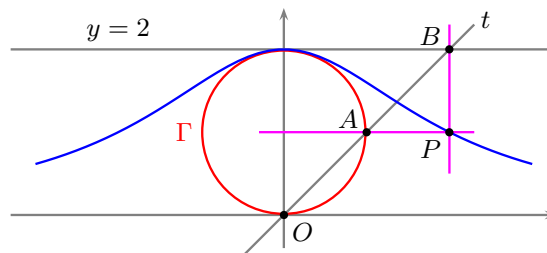


**Fig. 4.** Grafico  $\Phi$  e rombo  $OQRP$ .

mentre

$$O\hat{Q}R = 2\alpha = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 53,1301 = 53^\circ 07' 48''.$$

2. Quanto proposto dal testo ripercorre la classica costruzione parametrica della *versiera di Gaetana Agnesi*. Questa consiste nell'individuare un punto  $P(x, y)$  di tale curva tramite un parametro che rappresenta il coefficiente angolare di un fascio di rette per l'origine del sistema cartesiano. Difatti la retta  $t$  appartenente al fascio per  $O$ ,  $y = mx$  con  $m \in \mathbb{R}_0$ , incontra la retta di equazione  $y = 2$  nel punto  $B$  di coordinate



**Fig. 5.** Punto  $P \in \Phi$  e sua costruzione.

$$B : \begin{cases} y = 2 \\ y = mx \end{cases} \implies x_B = \frac{2}{m}, \quad y_B = 2.$$

La retta  $t$  incontra invece in  $A$  la circonferenza  $\Gamma$  di centro  $(0, 1)$  e raggio unitario e di equazione  $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$$A : \begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 - 2y = 0. \end{cases}$$

Esplicitato dalla prima equazione  $x = \frac{y}{m}$  e sostituito nella seconda si ottiene ( $m \neq 0$ )

$$\left(\frac{y}{m}\right)^2 + y^2 - 2y = 0 \implies \frac{y^2}{m^2} + y^2 - 2y = 0$$

da cui discende  $y = 0$  e

$$y\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = 2 \quad \implies \quad y_A = \frac{2m^2}{1 + m^2}$$

per cui, essendo  $x = x_B$  e  $y = y_A$ , il punto  $P$  su  $\Phi$  è caratterizzato dalle coordinate

$$P : \begin{cases} x = \frac{2}{m} \\ y = \frac{2m^2}{1 + m^2} \end{cases}$$

che costituisce la rappresentazione parametrica della curva. Per giungere alla rappresentazione esplicita eliminiamo il parametro sostituendo  $m = \frac{2}{x}$  ottenuta dalla prima nella seconda

$$y = 2 \left(\frac{2}{x}\right)^2 / \left[1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2\right] = \frac{2 \cdot (4/x^2)}{1 + (4/x^2)} = \frac{8}{x^2 + 4}$$

che è l'equazione aspettata.

3. La regione  $R$  è riportata in figura 6. Per determinarne l'area va risolto l'integrale

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^2 \frac{8}{4 + x^2} dx \quad (2)$$

che è associato all'integrale indefinito

$$\int \frac{8}{4 + x^2} dx. \quad (3)$$

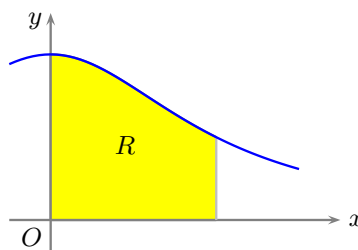


Fig. 6. Regione  $R$ .

Per la risoluzione di quest'ultimo procediamo con la sostituzione di variabile  $x^2 = 4t^2$  che implica  $x = 2t$  e  $dx = 2dt$ . L'integrale (3) si riporta ora ad uno elementare

$$\int \frac{8}{4 + 4t^2} \cdot 2 dt = 4 \int \frac{dt}{1 + t^2} = 4 \operatorname{arctg} t + c = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (4)$$

per cui l'area espressa da (2) è

$$\mathcal{A}(R) = 4 \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_0^2 = 4 (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

L'area del cerchio delimitato da  $\Gamma$  (fig. 5) è

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \pi \cdot (1)^2 = \pi$$

e risulta confermata l'equivalenza delle due figure.

L'area  $\mathcal{A}$  compresa tra  $\Phi$  e tutto l'asse  $x$  si deduce dall'integrale improprio

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4+x^2} dx$$

ma sfruttando la simmetria pari di  $\Phi$  e la definizione di integrale improprio, risulta pure

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{8}{4+x^2} dx = 2 \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{8}{4+x^2} dx.$$

In base alla (4) possiamo riscrivere la precedente

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} 4 \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_0^a = 8 \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a}{2} - \operatorname{arctg} 0 \right].$$

Considerato che  $\operatorname{arctg} 0 = 0$  e che, posto  $z = \frac{a}{2}$  è noto

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2},$$

troviamo

$$\mathcal{A} = 8 \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} z = 8 \cdot \left( \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi.$$

4. Il solido  $W$  è costituito da un cilindro avente raggio di base 2 e altezza 1, generato dal rettangolo verde di fig. 7 e avente volume pari a  $\mathcal{V}(\text{cil}) = \pi(2^2) \cdot 1 = 4\pi$  sormontato da un solido di rotazione attorno all'asse  $y$  generato dalla regione  $S$  (gialla in fig. 7).

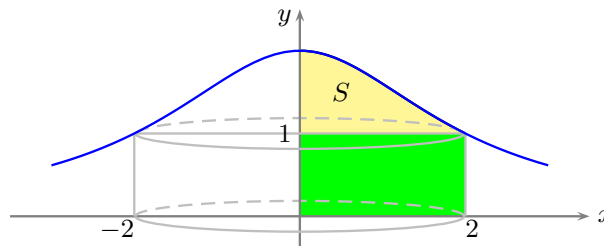


Fig. 7. Sezioni del solido  $W$ .

Notato che nell'intervallo  $[0, 2]$  la funzione  $f(x)$  è invertibile e, in  $y \in [1, 2]$  la funzione inversa  $f^{-1}$  ha equazione

$$f(x) = y = \frac{8}{4+x^2} \implies x^2 + 4 = \frac{8}{y} \implies x^2 = \frac{8}{y} - 4 = 4\left(\frac{2}{y} - 1\right)$$

da cui

$$x = \pm \sqrt{4\left(\frac{2}{y} - 1\right)},$$

tenendo conto delle limitazioni per  $x$  e  $y$  risulta infine

$$f^{-1} : \begin{cases} x = 2\sqrt{\frac{2}{y} - 1} \\ 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Pertanto, il solido generato dalla sezione  $\mathcal{S}$  ha un volume espresso da

$$\mathcal{V}(S) = \pi \int_1^2 \left(2\sqrt{\frac{2}{y} - 1}\right)^2 dy$$

per cui il volume richiesto è dato in definitiva da

$$\mathcal{V}(W) = \mathcal{V}(\text{cil}) + \mathcal{V}(S) = 4\pi + \pi \int_1^2 4\left(\frac{2}{y} - 1\right) dy.$$

Pur non richiesto dal problema l'integrale precedente si può risolvere analiticamente. Difatti notato che

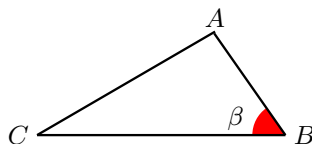
$$\int \frac{2}{y} dy = 2 \int \frac{dy}{y} = 2 \ln |y| + c$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(W) &= 4\pi + \pi \int_1^2 4\left(\frac{2}{y}\right) dy - 4\pi \int_1^2 dy \\ &= 4\pi + 4\pi [2 \ln |y|]_1^2 - 4\pi [y]_1^2 \\ &= 4\pi + 8\pi (\ln 2 - \ln 1) - 4\pi (2 - 1) = 8\pi \ln 2. \end{aligned}$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Del triangolo  $ABC$  si conoscono le misure di due lati  $\overline{AB} = 2$  e  $\overline{BC} = 3$  e l'area  $\mathcal{A}(\triangle ABC) = 3$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Triangolo  $ABC$ .

Se poniamo  $\beta = \angle ABC$ , l'area del triangolo è espressa dalla

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \operatorname{sen} \beta$$

da cui, sostituendo i valori noti deduciamo

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \operatorname{sen} \beta \implies \operatorname{sen} \beta = 1.$$

Segue quindi che  $\beta = \frac{\pi}{2}$  per cui il triangolo  $ABC$  è rettangolo con ipotenusa  $AC$ . La misura di questo terzo lato si ottiene con il teorema di Pitagora e risulta

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Le condizioni che determinano il dominio di

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$$

si riassumono nel sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0. \end{cases}$$

La prima possiede le soluzioni  $x \leq 3$  mentre la seconda comporta i passaggi

$$2 \geq \sqrt{3 - x} \implies 4 \geq 3 - x \implies x \geq -1.$$

Allo stesso modo la terza è equivalente a

$$1 \geq \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}$$

da cui, elevando al quadrato si ottiene

$$1 \geq 2 - \sqrt{3 - x} \implies \sqrt{3 - x} \geq 1,$$

e ancora

$$3 - x \geq 1^2 \implies x \leq 2.$$

L'intersezione di questi tre insiemi

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

è riportata graficamente nella fig. 1 e mostra che il dominio di  $f$  è l'intervallo chiuso  $[-1, 2]$ .



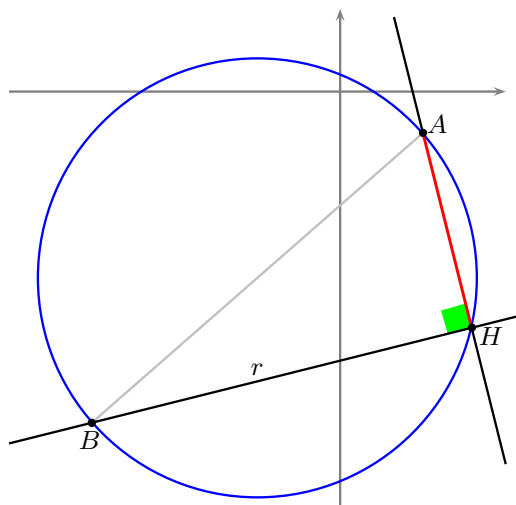
Fig. 1.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Costruito il fascio di rette per il punto  $B(-6, -8)$  (fig. 1) dato dall'equazione

$$r : y - y_B = m(x - x_B) \implies y + 8 = m(x + 6), \quad (1)$$

la distanza dal punto  $A(2, -1)$  è rappresentata dalla lunghezza del segmento  $AH$  essendo  $H$  il piede della perpendicolare ad  $r$  condotta da  $A$  (fig. 1).



**Fig. 1.** Retta  $r$  del fascio di centro  $B$  e sua distanza da  $A$ .

Notiamo che, qualsiasi sia la retta  $r$ , i punti  $A$ ,  $B$  e  $H$  formano un triangolo che è rettangolo nel vertice  $H$ . Di conseguenza possiamo identificare il luogo dei punti  $H$  con la circonferenza di diametro  $AB$ . La lunghezza del segmento  $AH$  sarà massima quando  $H$  coinciderà con  $B$ ,  $H \equiv B$ , e in tale posizione la retta  $BH$  è perpendicolare al diametro  $AB$ . Segue che, essendo il coefficiente angolare della retta  $AB$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-8 - (-1)}{-6 - 2} = \frac{-7}{-8} = \frac{7}{8},$$

il coefficiente angolare di  $r$  è in tal caso dato dalla condizione di perpendicolarità

$$m = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{7/8} = -\frac{8}{7}$$

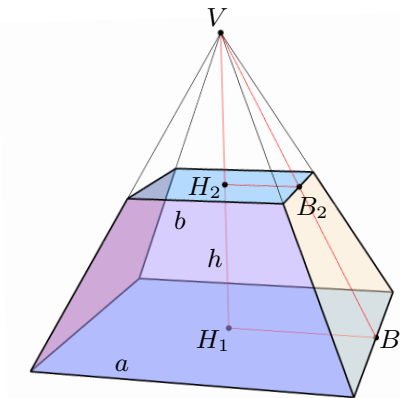
per cui, sostituito in (1) il precedente valore, la retta richiesta è

$$y + 8 = -\frac{8}{7}(x + 6) \implies y = -\frac{8}{7}x - \frac{48}{7} - 8 \implies y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}.$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico alla prima domanda del problema n. 2 dell'esame 2003 suppletiva.

Il volume richiesto si può considerare come differenza dei volumi di due piramidi, la prima  $P_1$  avente base coincidente con la base maggiore del tronco, di lato  $a$  e vertice  $V$  (fig. 1) e la seconda  $P_2$  avente lo stesso vertice ma base quella minore di lato  $b$ .



**Fig. 1.** Tronco di piramide.

Definiti i piedi delle altezze dal vertice  $V$  alle due basi,  $H_1$  appartenente alla base maggiore,  $H_2$  alla minore, per determinare tali volumi notiamo la similitudine dei triangoli  $VH_1B_1$  e  $VH_2B_2$  cosicché valgono le proporzioni

$$\frac{\overline{VH_1}}{\overline{VH_2}} = \frac{\overline{B_1H_1}}{\overline{B_2H_2}}$$

ma poiché  $B_1H_1 = \frac{a}{2}$  e  $B_2H_2 = \frac{b}{2}$  la precedente diviene

$$\frac{\overline{VH_1}}{\overline{VH_2}} = \frac{a/2}{b/2} = \frac{a}{b}. \quad (1)$$

D'altra parte, considerando l'altezza assegnata del tronco di piramide, è  $h = \overline{VH_1} - \overline{VH_2}$  per cui ne discende il sistema

$$\begin{cases} \overline{VH_1} = \frac{a}{b} \cdot \overline{VH_2} \\ \overline{VH_1} = \overline{VH_2} + h. \end{cases}$$

Sostituendo la prima nella seconda risulta

$$\frac{a}{b} \cdot \overline{VH_2} = \overline{VH_2} + h \implies \overline{VH_2} \left( \frac{a}{b} - 1 \right) = h$$

da cui

$$\overline{VH_2} = \frac{h}{\left(\frac{a}{b} - 1\right)} = \frac{bh}{a-b}.$$

Osservato che le aree di base risultano rispettivamente  $\mathcal{A}(P_1) = a^2$  e  $\mathcal{A}(P_2) = b^2$ , il volume richiesto è

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{tronco}) &= \mathcal{V}(P_1) - \mathcal{V}(P_2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \overline{VH_1} - \frac{1}{3} b^2 \cdot \overline{VH_2} \\ &= \frac{1}{3} \left[ a^2 \cdot \frac{ah}{a-b} - b^2 \cdot \frac{bh}{a-b} \right] \\ &= \frac{h}{3(a-b)} \cdot (a^3 - b^3) \end{aligned}$$

e sviluppando la differenza di cubi al numeratore otteniamo

$$\mathcal{V}(\text{tronco}) = \frac{h}{3} \cdot \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a-b} = \frac{1}{3} h \cdot (a^2 + ab + b^2).$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Siano  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , le lunghezze dei tre spigoli di una valigia assimilata ad un parallelepipedo e sia  $x$  l'aumento percentuale di queste dimensioni. Calcoliamo il corrispondente aumento percentuale del volume sapendo che inizialmente il volume è  $\mathcal{V}_0 = a \cdot b \cdot c$ . Se ciascuna dimensione aumenta di  $x$  con  $0 \leq x \leq 100$ , la lunghezza di ciascun spigolo diviene

$$a' = a + a \cdot \frac{x}{100} = a \left(1 + \frac{x}{100}\right); \quad b' = b \left(1 + \frac{x}{100}\right); \quad c' = c \left(1 + \frac{x}{100}\right),$$

e quindi il volume finale  $\mathcal{V}$  è

$$\mathcal{V} = a' \cdot b' \cdot c' = a \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot b \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot c \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

che implica

$$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 = \mathcal{V}_0 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3. \quad (1)$$

L'aumento percentuale  $\Delta\mathcal{V}\%$  è quindi

$$\Delta\mathcal{V}\% = \frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0} \cdot 100 \quad \implies \quad \Delta\mathcal{V}\% = \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_0} - 1\right) 100.$$

Dalla (1) si deduce che

$$\Delta\mathcal{V}\% = \left[ \left( 1 + \frac{x}{100} \right)^3 - 1 \right] \cdot 100$$

ossia sviluppando il cubo

$$\Delta\mathcal{V}\% = \left[ 1 + 3\frac{x}{100} + 3\frac{x^2}{100^2} + \frac{x^3}{100^3} - 1 \right] \cdot 100 = 3x + \frac{3x^2}{10^2} + \frac{x^3}{10^4}. \quad (2)$$

Da questo risultato segue che se  $x = 10\%$  l'aumento percentuale corrispondente è

$$x = 10\% \implies \Delta\mathcal{V}\% = 3 \cdot 10 + \left( \frac{3 \cdot 10^2}{10^2} + \frac{10^3}{10^4} \right) = 30 + 3 + \frac{1}{10} = 33,1\%.$$

Analogamente

$$\begin{aligned} x = 20\% \implies \Delta\mathcal{V}\% &= 3 \cdot 20 + \left( \frac{3 \cdot 20^2}{10^2} + \frac{20^3}{10^4} \right) \\ &= 60 + 12 + \frac{8}{10} = 72 + 0,8 = 72,8\% \approx 73\%; \\ x = 25\% \implies \Delta\mathcal{V}\% &= 3 \cdot 25 + \left( \frac{3 \cdot 25^2}{10^2} + \frac{25^3}{10^4} \right) = 95,31\% \approx 95\%. \end{aligned}$$

La risposta è pertanto affermativa (a parte le leggere discrepanze nel caso di  $x = 20\%$  e  $25\%$ ).

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Sfruttiamo l'usuale rappresentazione posizionale di un numero in base 10 e disponiamo le cifre più piccole cioè 1, 2, 3, 4 tra le sette assegnate, rispettivamente nelle posizioni corrispondenti alle potenze  $10^6$ ,  $10^5$ ,  $10^4$ ,  $10^3$  cioè

$$\begin{aligned} & \mathbf{1} \cdot 10^6 + \mathbf{2} \cdot 10^5 + \mathbf{3} \cdot 10^4 + \mathbf{4} \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + x \cdot 10 + x \cdot 10^0 \\ &= \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} \boxed{x} \boxed{x} \boxed{x} \end{aligned}$$

Rimangono da sistemare le cifre 5, 6, 7 da associare alle potenze  $10^2$ ,  $10^1$ ,  $10^0$  e quindi da disporre in luogo delle  $x$  nel precedente box. Ci sono  $3! = 6$  possibili permutazioni di tali cifre e sono

567, 576, 657, 675, 756, 765.

Manifestamente il minore di questi numeri è 567 e il maggiore, cioè il 6°, risulta

$$6^\circ \rightarrow \boxed{1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 7 \mid 6 \mid 5}.$$

Il 7° dovrà quindi avere in luogo della cifra 4 la cifra immediatamente superiore ossia

$$7^\circ \rightarrow \boxed{1 \mid 2 \mid 3 \mid 5 \mid x \mid x \mid x}.$$

Rimangono quindi le cifre 4, 6, 7 e il numero minore tra le 6 corrispondenti permutazioni

$$467, 476, 647, 674, 746, 764,$$

risulta

$$7^\circ \rightarrow \boxed{1 \mid 2 \mid 3 \mid 5 \mid 4 \mid 6 \mid 7}.$$

Per determinare quale sia il 721-esimo numero ragioniamo allo stesso modo: i numeri che hanno come cifra più significativa, corrispondente a  $10^6$ , la cifra 1 (cioè la minore tra 1 e 7), sono composti da tutte le possibili permutazioni delle rimanenti 6 ossia sono in numero di  $6! = 720$  e hanno la forma

$$\boxed{1 \mid x \mid x \mid x \mid x \mid x \mid x}.$$

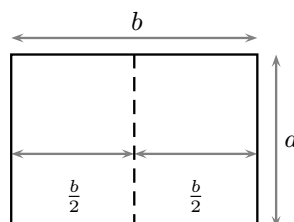
Di conseguenza il 721-esimo dovrà presentare la cifra 2 in luogo di 1 e le rimanenti dovranno apparire in ordine crescente da sinistra verso destra ossia il numero cercato è

$$\boxed{2 \mid 1 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7}.$$

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

Se  $a$  e  $b$  sono le dimensioni del foglio rettangolare (fig. 1) con  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $b > a$ , la condizione sull'area si riporta evidentemente come

$$a \cdot b = 1 \text{ m}^2. \quad (1)$$



**Fig. 1.** Foglio rettangolare e suo taglio.

Detto  $r$  il rapporto tra lato maggiore e minore  $r = b/a$  questo deve rimanere tale anche quando il foglio viene diviso a metà. Poiché le due parti che si ottengono hanno dimensioni  $a$  per il lato maggiore e  $\frac{b}{2}$  per quello minore (fig. 1), la condizione che i rettangoli siano simili a quello di partenza si traduce nella costanza del rapporto

$$r = \frac{b}{a} = \frac{a}{(b/2)}. \quad (2)$$

All'equazione (1) va quindi associata la (2) per cui va risolto il sistema

$$\begin{cases} a \cdot b = 1 \\ \frac{b}{a} = \frac{2a}{b} \\ 0 < a < b. \end{cases} \quad (3)$$

Moltiplicando entrambi i membri della seconda equazione per  $ab$  questa si può riscrivere come  $b^2 = 2a^2$  che risulta equivalente alla  $|b| = |a|\sqrt{2}$ . Data la positività di  $a$  e  $b$  la precedente si riduce a  $b = a\sqrt{2}$  che, sostituita nella prima equazione di (3), fornisce

$$a(\sqrt{2}a) = 1 \implies a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Infine deduciamo l'altra dimensione

$$b = a\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2^{1/2}}{2^{1/4}} = 2^{1/4} = \sqrt[4]{2}.$$

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

La funzione  $f$  ha il grafico di figura 1 mentre la funzione  $g$  è definita dall'integrale

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (1)$$

e quindi appare come la funzione integrale di  $f$ .

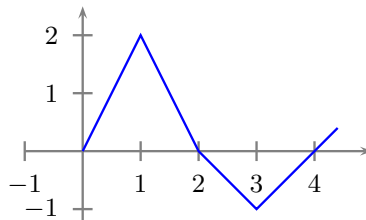
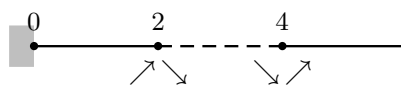


Fig. 1. Grafico della funzione  $f$ .

Per il teorema di Torricelli–Barrow sappiamo che  $g'(x) = f(x)$  per cui, volendo individuare eventuali punti di minimo di  $g$  osserviamo che, in base al grafico di  $f$ ,

$$g'(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 2 \quad \vee \quad x \geq 4.$$

Riportando tale segno in forma grafica riconosciamo facilmente gli intervalli di monotonia della funzione  $g$  e appare evidente come questa funzione presenti nel punto di ascissa 4 un minimo.



**Fig. 2.** Segno della derivata prima  $g'$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Il limite proposto

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2} \quad (1)$$

è manifestamente un caso di indeterminazione del tipo  $0/0$  per cui si dovrà risolverlo riscrivendo la funzione ad argomento in forme alternative oppure analizzare, eventualmente, l'applicabilità del teorema di De L'Hôpital.

Seguendo la prima ipotesi, possiamo riscrivere la funzione come prodotto di tre fattori

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot (-\sin x) \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (2)$$

e tale forma mette in luce la necessità di studiare separatamente i limiti di ciascun fattore. Per quanto riguarda il secondo fattore possiamo sfruttare la continuità della funzione seno per cui il limite è

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x) = -\sin(0) = 0.$$

Nel limite del terzo fattore

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (3)$$

è possibile invece riconoscere un limite importante che comunque risolveremo di seguito. Difatti moltiplicando numeratore e denominatore per  $1 + \cos x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

e tenendo presente che  $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$  possiamo riscriverlo come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}. \quad (4)$$

Ora, ricordando il limite fondamentale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

mentre la continuità in  $x = 0$  per la funzione  $f(x) = 1/(1 + \cos x)$ , fornisce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = f(0) = \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2}.$$

Il limite (4) è quindi pari a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

e di conseguenza il limite assegnato assume il valore

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot (-\operatorname{sen} x) \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= 4 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

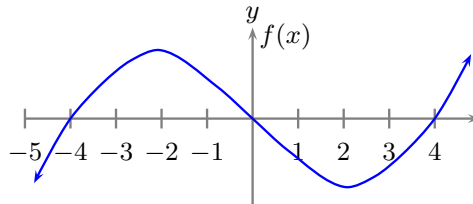
In alternativa, la soluzione del limite (3) si può ottenere osservando l'applicabilità del teorema di De L'Hôpital. Difatti esiste il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(1 - \cos x)}{D(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

per cui è possibile applicare il teorema e ottenere il medesimo risultato che in (5). Il valore di (1) ne discende poi allo stesso modo.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Il grafico della  $f(x)$ , fig. 1, mostra una funzione dispari, monotona crescente in  $] -\infty, -2[ \cup ] 2, +\infty[$ , decrescente in  $] -2, 2[$ , con un massimo relativo in  $x = -2$  e un minimo relativo proprio in  $x = 2$ .



**Fig. 1.** Grafico della funzione  $f(x)$ .

ne segue che il segno della sua derivata prima dev'essere

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 & x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[ \\ f'(x) &< 0 & x \in ]-2, 2[; \\ f'(-2) &= f'(2) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Esclusi i casi C) e D) dove la derivata prima non si annulla in  $x = \pm 2$ ,  $f'(\pm 2) \neq 0$ , rimangono possibili le opzioni A) e B). Ma in quest'ultimo caso il grafico della  $f'(x)$  mostra segni opposti a quelli già notati in (1): la risposta corretta è quindi rappresentata dall'opzione A).

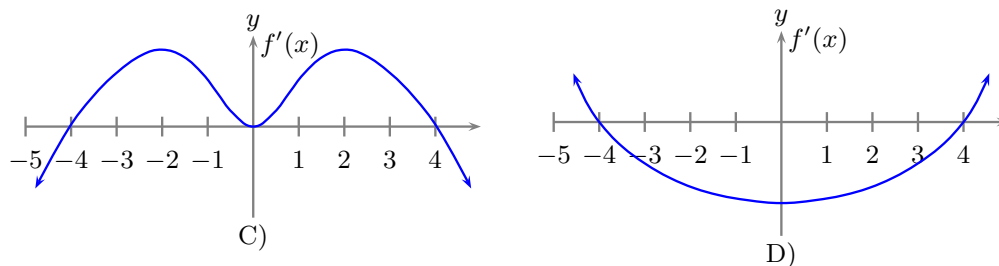


Fig. 2. Casi C) e D).

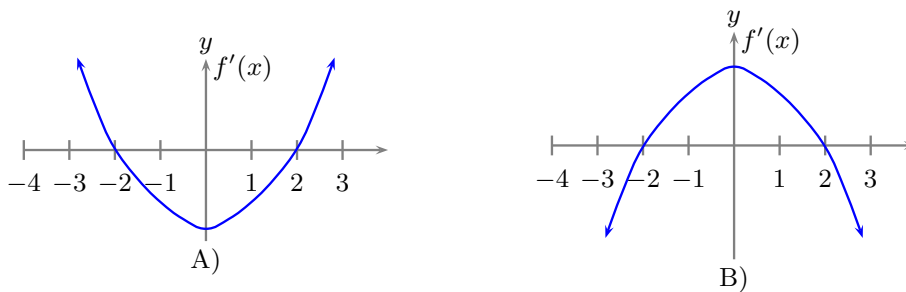


Fig. 3. Casi A) e B).

# ESAME 2013 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

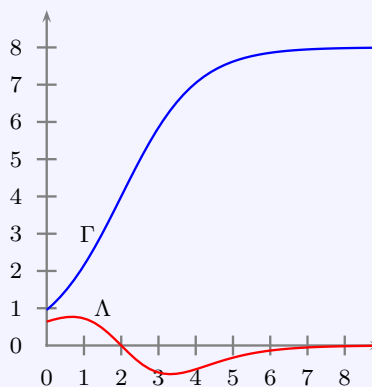
Una funzione  $f(x)$  è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in  $[0, +\infty[$  e nella figura sono disegnati i grafici  $\Gamma$  e  $\Lambda$  di  $f(x)$  e della sua derivata seconda  $f''(x)$ . La tangente a  $\Gamma$  nel suo punto di flesso, di coordinate  $(2; 4)$ , passa per  $(0; 0)$ , mentre le rette  $y = 8$  e  $y = 0$  sono asintoti orizzontali per  $\Gamma$  e  $\Lambda$ , rispettivamente.

- 1) Si dimostri che la funzione  $f'(x)$ , ovvero la derivata prima di  $f(x)$ , ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni  $x$  del dominio è:  $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ , qual è un possibile andamento di  $f'(x)$ ?

- 2) Si supponga che  $f(x)$  costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che  $\Gamma$  presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?

- 3) Se  $\Gamma$  è il grafico della funzione  $f(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}}$ , si provi che  $a = 8$  e  $b = 2$ .

- 4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da  $\Lambda$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[0, 2]$ .



Soluzione

**• Problema n. 2**

Sia  $f$  la funzione definita per tutti gli  $x$  positivi da  $f(x) = x^3 \ln x$ .

1. Si studi  $f$  e si tracci il suo grafico  $\gamma$  su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici  $Oxy$ ; accertato che  $\gamma$  presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia  $P$  il punto in cui  $\gamma$  interseca l'asse  $x$ . Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse  $y$ , passante per l'origine e tangente a  $\gamma$  in  $P$ .
3. Sia  $R$  la regione delimitata da  $\gamma$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo aperto a sinistra  $]0, 1]$ . Si calcoli l'area di  $R$ , illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in  $\text{mm}^2$  avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.
4. Si disegni la curva simmetrica di  $\gamma$  rispetto all'asse  $y$  e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di  $\gamma$  rispetto alla retta  $y = -1$ .

Soluzione

**Questionario**

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

2. Se la funzione  $f(x) - f(2x)$  ha derivata 5 in  $x = 1$  e derivata 7 in  $x = 2$ , qual è la derivata di  $f(x) - f(4x)$  in  $x = 1$ ?

Soluzione

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti  $A(2; -1)$  e  $B(-6; -8)$ . Si determini l'equazione della retta passante per  $B$  e avente distanza massima da  $A$ .

Soluzione

4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza  $h$  e i lati  $a$  e  $b$  delle due basi. Si esprima il volume  $V$  del tronco in funzione di  $a$ ,  $b$ , e  $h$ , illustrando il ragionamento seguito.

Soluzione

5. In un libro si legge: “*se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)*”. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

Soluzione

6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare  $7! = 5040$  numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?

Soluzione

7. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?

Soluzione

8. Si mostri, senza utilizzare il teorema di *l'Hôpital*, che:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin \pi}}{x - \pi} = -1.$$

Soluzione

9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

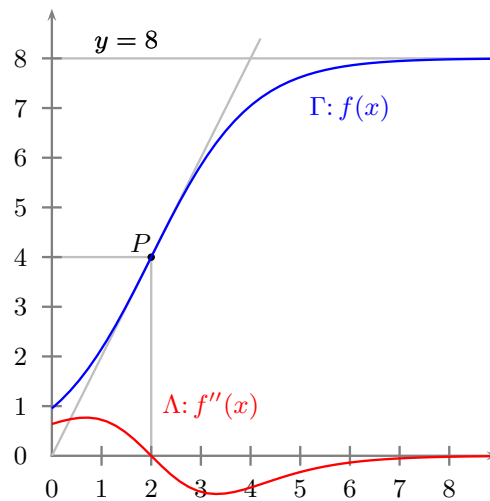
Soluzione

10. Si stabilisca per quali valori  $k \in \mathbb{R}$  l'equazione  $x^2(3-x) = k$  ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo  $[0, 3]$ . Posto  $k = 3$ , si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Il grafico  $\Gamma$  della funzione  $f(x)$  (fig. 1) mostra come questa sia continua e positiva  $\forall x \in [0, +\infty[$ , sia in tale dominio monotona strettamente crescente e tenda asintoticamente alla retta di equazione  $y = 8$ .



**Fig. 1.** Grafici  $\Gamma$  di  $f(x)$  e  $\Lambda$  di  $f''(x)$ .

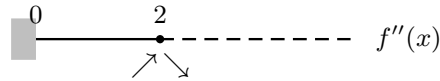
Poiché la retta tangente  $t$  a  $\Gamma$  nel punto  $P(2, 4)$  passa per l'origine la sua equazione dovrà appartenere al fascio  $y = mx$  per cui  $P \in t$  implica  $4 = m \cdot 2$  da cui  $m = 2$

e  $t : y = 2x$ . In tal modo abbiamo pure ottenuto il valore della derivata prima in  $x = 2$  cioè  $f'(2) = 2$  in quanto la derivata prima in un “punto”  $x_0$  di una funzione rappresenta geometricamente il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel medesimo punto.

Pure il grafico di  $f''(x)$  appare quello di una funzione continua e tale che

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 & 0 \leq x < 2, \\ f''(2) &= 0, \\ f''(x) &< 0 & x > 2, \end{aligned}$$

per cui, essendo questa la derivata prima di  $f'(x)$  deduciamo che in  $[0, 2[$  la  $f'(x)$  è crescente mentre in  $]2, +\infty[$  è decrescente e pertanto in tale punto presenta un massimo relativo (fig. 2)



**Fig. 2.** Segno della derivata seconda  $f''(x)$ .

Il valore di tale massimo è, per quanto dedotto appena sopra,  $f'(2) = 2$ . Osservando inoltre che per  $x \rightarrow +\infty$  la funzione ha limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 8$$

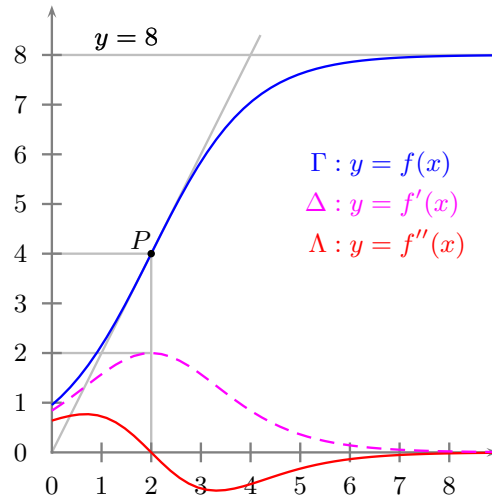
cioè presenta un asintoto orizzontale, le rette tangenti in punti di ascissa sempre maggiore dovranno avvicinarsi ad una retta orizzontale per cui dev'essere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Inoltre  $f(x)$  è crescente nel proprio dominio e quindi nel medesimo insieme è anche  $f'(x) > 0$ . Con la condizione  $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$  che stabilisce come il grafico di  $f'(x)$  debba essere compreso tra i grafici  $\Gamma$  e  $\Lambda$ , possiamo infine ipotizzare un grafico per  $f'(x)$  quale quello riportato tratteggiato in figura 3.

2. L'informazione che si può trarre circa l'evoluzione (temporale?) di una popolazione consiste nel rilevare una significativa crescita iniziale in quanto caratterizzata da un tasso di crescita (espresso da  $f'(x)$ ) nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2$  in aumento fino a quando questo raggiunge il suo valore massimo pari a 2 in  $x = 2$ . Successivamente, sebbene la popolazione continui ad aumentare, questa mostra un graduale rallentamento nel suo tasso di crescita che, per  $x = 8$ , appare sostanzialmente nullo. A questo punto la popolazione risulta stabile. In particolare, per  $0 \leq x \leq 4$  la popolazione aumenta di circa 7 volte dal valore iniziale unitario: in percentuale, l'aumento risulta pari a

$$\Delta y\% = \frac{7-1}{1} \cdot 100 = 600\%,$$



**Fig. 3.** Grafici di  $f(x)$ ,  $f''(x)$  e possibile grafico di  $f'(x)$ .

mentre successivamente per  $4 < x \leq 8$  l'aumento è solo del

$$\Delta y' \% = \frac{8 - 7}{7} \cdot 100 \approx 14\%.$$

Già per  $x = 8$  la crescita si può dire arrestata e la popolazione si è stabilizzata attorno al valore 8.

3. Se  $\Gamma$  è rappresentato dall'equazione

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}} \tag{1}$$

la determinazione dei due parametri  $a$  e  $b$  si potrà ottenere imponendo due condizioni indipendenti su tale equazione. La prima condizione deriva dalla appartenenza di  $P(2, 4)$  a  $\Gamma$  cioè

$$f(2) = 4 \implies \frac{a}{1 + e^{b-2}} = 4 \tag{2}$$

mentre la seconda dalla conoscenza acquisita sul punto di massimo ossia  $f'(2) = 2$  oppure, in alternativa, dalla conoscenza dell'andamento asintotico di  $f(x)$  ossia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1 + e^{b-x}} = 8. \tag{3}$$

Utilizzando quest'ultima condizione (l'altra implica il calcolo esplicito di  $f'(x)$ ) e posto  $t = b - x$ , poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{b-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0,$$

otteniamo dalla (3) il valore di  $a$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1 + e^{b-x}} = \frac{a}{1 + 0} = 8 \implies a = 8.$$

Introdotta nella (2) discende

$$\frac{8}{1 + e^{b-2}} = 4 \quad \text{da cui} \quad 2 = 1 + e^{b-2}$$

e quindi  $e^{b-2} = 1$  e  $b = 2$ .

4. Il calcolo dell'area della regione finita  $R$  di piano delimitata da  $\Lambda$  e dagli assi coordinati (fig. 4) si riporta alla risoluzione dell'integrale definito

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^2 f''(x) \, dx \quad (4)$$

che, per il teorema di Torricelli-Barrow risulta dato dalla differenza di  $f'(2)$  con  $f'(0)$

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^2 f''(x) \, dx = f'(2) - f'(0) \quad (5)$$

in quanto  $f'(x)$  è una primitiva di  $f''(x)$ .

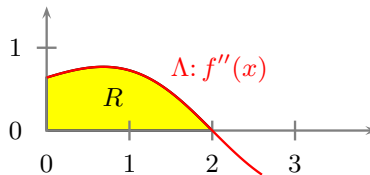


Fig. 4. Grafico di  $f''(x)$  e regione finita  $R$ .

È noto che  $f'(2) = 2$  ma per calcolare  $f'(0)$  dobbiamo procedere al calcolo esplicito di  $f'(x)$ . Allora se

$$f(x) = \frac{8}{1 + e^{2-x}}$$

risulta

$$f'(x) = D\left(\frac{8}{1 + e^{2-x}}\right) = -\frac{8(0 - e^{2-x})}{(1 + e^{2-x})^2} = \frac{8e^{2-x}}{(1 + e^{2-x})^2}$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= \int_0^2 f''(x) dx = f'(2) - f'(0) \\ &= 2 - \frac{8e^{2-0}}{(1+e^{2-0})^2} = 2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2} \\ &= \frac{2+4e^2+2e^4-8e^2}{(1+e^2)^2} = \frac{2(e^2-1)^2}{(1+e^2)^2} \\ &= 2 \left( \frac{e^2-1}{1+e^2} \right)^2 \approx 1,16005. \end{aligned}$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

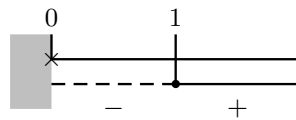
1. Il dominio della funzione

$$f(x) = x^3 \ln x \quad (1)$$

è evidentemente l'insieme  $\mathbb{R}_0^+ = ]0, +\infty[$  e quindi non può essere simmetrica né periodica. Il suo segno discende invece dallo studio dei fattori

$$x^3 > 0 \implies x > 0 \quad \text{e di} \quad \ln x \geq 0 \implies x \geq 1$$

che combinati (fig. 1) implicano  $f(x) \geq 0$  se e solo se  $x \geq 1$ .



**Fig. 1.** Segno di  $f$ .

La funzione nel proprio dominio è continua in quanto prodotto di funzioni continue per cui lo studio dei limiti si riduce agli estremi del dominio stesso ossia andranno studiati

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \quad (2)$$

Il primo rappresenta un caso di indeterminazione del tipo  $0 \cdot \infty$  per cui converrà riscrivere la funzione come

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-3}}$$

e analizzare l'applicabilità del teorema di De L'Hôpital. Passando allo studio del limite delle derivate otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(\ln x)}{D(x^{-3})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{(-3x^{-4})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{3}x^3 \right) = 0,$$

per cui l'ipotesi fondamentale dell'esistenza del limite precedente appare soddisfatta e in base a tale teorema concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0. \quad (3)$$

Il secondo limite non presenta invece particolari difficoltà in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = +\infty.$$

Questo risultato rende possibile l'esistenza di un asintoto obliquo per cui va studiato l'ulteriore limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$ . D'altra parte, in base ad osservazioni analoghe al precedente sulla applicabilità del teorema di De L'Hôpital, risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

per cui la funzione non presenta alcun asintoto obliquo.

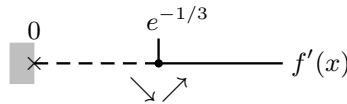
Il calcolo della derivata prima fornisce

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3 \ln x + 1) \quad (4)$$

per cui ( $x^2 > 0, \forall x > 0$ )

$$f'(x) \geq 0 \implies 3 \ln x + 1 \geq 0 \implies \ln x \geq -\frac{1}{3} \implies x \geq e^{-1/3}.$$

Tale segno, riportato in forma grafica nella fig. 2 dimostra l'esistenza di un minimo per la funzione  $f$  in corrispondenza di  $x_m = e^{-1/3}$ .



**Fig. 2.** Segno della derivata prima  $f'(x)$ .

In corrispondenza risulta

$$f(e^{-1/3}) = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3e}.$$

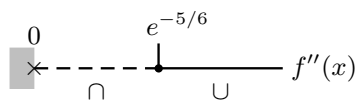
In base al risultato (4) la derivata seconda è invece

$$f''(x) = 2x(3 \ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = 6x \ln x + 2x + 3x = x(6 \ln x + 5) \quad (5)$$

e il suo segno dipende dal solo secondo fattore in quanto  $x > 0$ . Pertanto

$$f''(x) \geq 0 \implies 6 \ln x + 5 \geq 0 \implies \ln x \geq -\frac{5}{6} \implies x \geq e^{-5/6}$$

e, in tale intervallo, la  $f$  volge la concavità nel verso positivo (fig. 3).



**Fig. 3.** Segno della derivata seconda  $f''(x)$ .

L'ordinata del punto di flesso è

$$f\left(e^{-5/6}\right) = e^{-5/2} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5e^{-5/2}}{6}$$

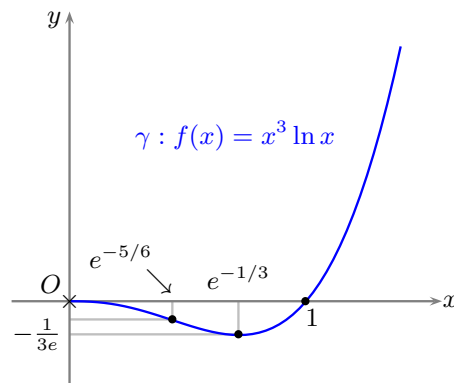
per cui i punti richiesti sono

$$\text{minimo: } \left(e^{-1/3}, -\frac{1}{3e}\right), \quad \text{flesso: } \left(e^{-5/6}, -\frac{5e^{-5/2}}{6}\right)$$

che approssimati alla terza cifra decimale risultano

$$\text{minimo: } (0,717; -0,123), \quad \text{flesso: } (0,435; -0,068).$$

Il grafico  $\gamma$  è invece riportato in fig. 4.



**Fig. 4.** Grafico  $\gamma$  di  $f(x) = x^3 \ln x$ .

2. Poiché la parabola  $g$  richiesta passa per l'origine e per il punto  $P(1, 0)$  dell'asse  $x$ , la sua equazione dovrà rientrare nella forma

$$g(x) = ax(x - 1) = ax^2 - ax$$

che assicura automaticamente l'appartenenza di  $O$  e  $P$  a  $g$ . La condizione di tangenza si traduce nell'uguaglianza delle derivate di  $f$  e  $g$  ossia  $f'(1) = g'(1)$  per cui, essendo  $g'(x) = 2ax - a$  ne deriva

$$f'(1) = g'(1) \implies 1^2(3 \ln 1 + 1) = 2a - a \implies a = 1.$$

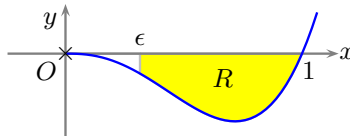
L'equazione della parabola richiesta è  $g(x) = x(x - 1)$ .

3. La regione  $R$  delimitata da  $\gamma$  e dall'asse  $x$  pur apparendo limitata è associata ad un intervallo aperto alla sinistra  $]0, 1]$  e in  $x = 0$  la funzione  $f$  non è continua. Se comunque definiamo un parametro  $\epsilon \in ]0, 1]$ , la  $f(x)$  nell'intervallo chiuso  $[\epsilon, 1]$  è continua per cui il teorema di esistenza dell'integrazione definita assicura l'esistenza dell'integrale

$$\int_{\epsilon}^1 f(x) dx.$$

Tenuto conto del segno negativo di  $f(x)$  se  $x < 1$  l'area della regione  $R$  (fig. 5) si potrà esprimere con l'integrale improprio

$$\mathcal{A}(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( -\int_{\epsilon}^1 x^3 \ln x dx \right) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^3 \ln x dx. \quad (6)$$



**Fig. 5.** Regione  $R$  di  $\gamma$  e intervallo di integrazione  $[\epsilon, 1]$ .

Dobbiamo ora risolvere l'integrale indefinito associato a (6) e poiché sappiamo che  $\int x^3 dx = x^4/4 + c$ , procediamo con il metodo per parti considerando come fattore differenziale il termine  $x^3 dx$ . Segue che

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \left( \frac{x^3}{4} \right) dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c \\ &= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + c \end{aligned}$$

per cui (6) diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^3 \ln x dx = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} \right]_{\epsilon}^1 \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \left[ \frac{1^4 \ln 1}{4} - \frac{1^4}{16} \right] - \left[ \frac{\epsilon^4 \ln \epsilon}{4} - \frac{\epsilon^4}{16} \right] \right\} \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{1}{16} - \left[ \frac{\epsilon^4 \ln \epsilon}{4} - \frac{\epsilon^4}{16} \right] \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Gli elementi che compongono l'argomento di quest'ultimo limite si possono ricondurre a limiti immediati

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon^4}{16} = 0,$$

o sostanzialmente già **discussi**

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^4 \ln \epsilon.$$

Per quest'ultimo in particolare, ripreso il limite (3), risulta

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^4 \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon (\epsilon^3 \ln \epsilon) = 0 \cdot 0 = 0$$

cosicché abbiamo

$$\mathcal{A}(R) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{1}{16} - \left[ \frac{\epsilon^4 \ln \epsilon}{4} - \frac{\epsilon^4}{16} \right] \right\} = -\left( -\frac{1}{16} \right) + \left[ \frac{0}{4} - 0 \right] = \frac{1}{16}. \quad (8)$$

In alternativa e volendo evitare l'integrale improprio (6), il calcolo dell'area della regione  $R$  si può svolgere estendendo per continuità la funzione  $f$  in  $x = 0$  ossia definendo la nuova funzione

$$F : \begin{cases} x^3 \ln x, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che, per quanto visto in (3) risulta continua nell'intervallo chiuso  $[0, 1]$  e quindi integrabile.

Infine, poiché l'unità fornita è il decimetro mentre lo si desidera in  $\text{mm}^2$ , il risultato (8) si riscrive come

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= \frac{1}{16} \text{ dm}^2 = 0,0625 \text{ dm}^2 \\ &= 0,0625 \cdot (10^2 \text{ mm})^2 = 0,0625 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 = 625 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

4. La curva  $\gamma'$  simmetrica a  $\gamma$  rispetto all'asse  $y$  si ottiene applicando la trasformazione di simmetria

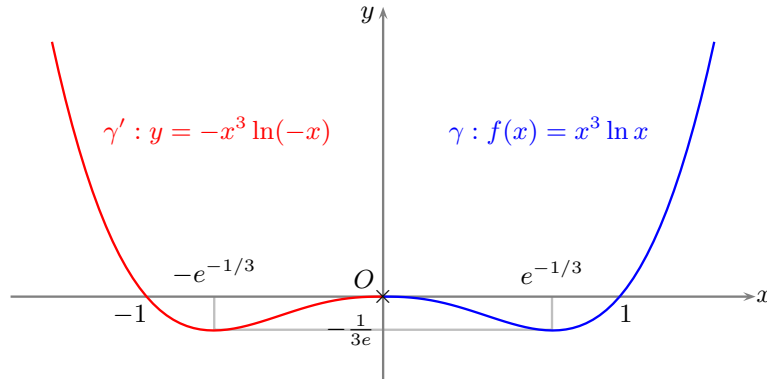
$$\sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

che ha per inversa

$$\sigma_y^{-1} : \begin{cases} x = -x' \\ y = y'. \end{cases}$$

Sostituendo queste due ultime equazioni in  $y = x^3 \ln x$  abbiamo

$$y' = (-x')^3 \ln(-x') \implies \gamma' : y' = -(x')^3 \ln(-x')$$



**Fig. 6.** Grafici  $\gamma$  e  $\gamma'$ .

che, eliminati per brevità gli apici, ha il grafico di figura 6.

Allo stesso modo, il grafico  $\gamma''$  simmetrico di  $\gamma$  rispetto alla retta  $y = 1$  si ottiene applicando la trasformazione assiale che discende dalle condizioni

$$\sigma_{y=1} : \begin{cases} x' = x \\ \frac{y + y'}{2} = -1. \end{cases}$$

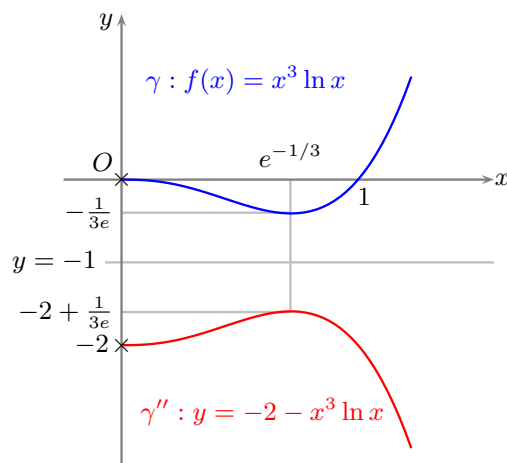
La trasformazione inversa che fornisce la coppia  $(x, y)$  in termini di  $(x', y')$  è

$$\sigma_{y=1}^{-1} : \begin{cases} x = x' \\ y = -y' - 2 \end{cases}$$

per cui sostituita ancora in  $y = x^3 \ln x$  otteniamo

$$-y' - 2 = (x')^3 \ln(x') \quad \implies \quad y' = -2 - (x')^3 \ln(x').$$

Eliminati ancora una volta gli apici, quest'ultima ha il grafico di figura 7.



**Fig. 7.** Grafici  $\gamma$  e  $\gamma''$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame del corso di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 1.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Posto

$$F(x) = f(x) - f(2x) \quad \text{e} \quad G(x) = f(x) - f(4x),$$

le rispettive derivate sono, per il teorema della derivata della funzione composta,

$$F'(x) = f'(x) - f'(2x) \cdot D(2x) = f'(x) - 2 \cdot f'(2x) \quad (1)$$

$$G'(x) = f'(x) - f'(4x) \cdot D(4x) = f'(x) - 4 \cdot f'(4x). \quad (2)$$

Imponendo le condizioni del quesito sulla funzione  $F(x)$  cioè

$$\begin{cases} F'(1) = 5 \\ F'(2) = 7 \end{cases}$$

ne discende dalla (1) il sistema

$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7. \end{cases} \quad (3)$$

D'altra parte si chiede di conoscere il valore di  $G'(1)$  che dalla (2) si esprime come

$$G'(1) = f'(1) - 4f'(4).$$

La struttura del sistema (3) permette di eliminare la dipendenza dal valore  $f'(2)$ : difatti moltiplichiamo la seconda equazione per il fattore 2

$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ 2f'(2) - 4f'(4) = 14. \end{cases}$$

e quindi sommiamo in colonna i due membri

$$[f'(1) - 2f'(2)] + [2f'(2) - 4f'(4)] = 5 + 14.$$

Ma, eliminati i termini opposti, a primo membro compare  $G'(1)$  cosicché risulta

$$G'(1) = f'(1) - 4f'(4) = 19.$$

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame del corso di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 3.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

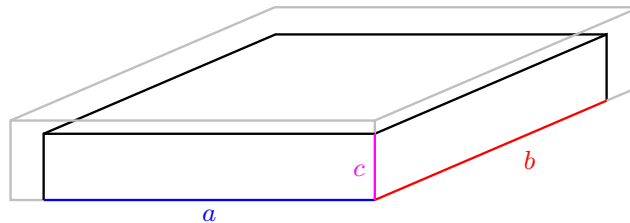
Il quesito è identico a quello proposto nell'esame del corso di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 4.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

La struttura del quesito, pur con testo apparentemente diverso, segue la traccia proposta nel quesito n. 5 di Ordinamento e pure nella domanda c) del primo problema dell'esame 2006 Ordinamento. Sviluppiamo pertanto deduzioni analoghe: se quindi  $x$  rappresenta l'aumento percentuale di ciascuna dimensione  $a$ ,  $b$ ,  $c$  di un solido, per esempio un parallelepipedo rettangolo (fig. 1), e  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$  sono le dimensioni finali dev'essere

$$\begin{aligned} a' &= a + a \cdot x = a(1 + x), \\ b' &= b + b \cdot x = b(1 + x), \\ c' &= c + c \cdot x = c(1 + x) \end{aligned} \quad (1)$$

in quanto i termini  $ax$ ,  $bx$  e  $cx$  rappresentano gli aumenti effettivi di ciascuna dimensione.



**Fig. 1.** Parallelepipedo rettangolo e sue dimensioni.

Se  $\mathcal{V} = abc$  è il volume iniziale, il volume complessivo dopo tali variazioni risulta

$$\mathcal{V}' = a'b'c' = a(1+x) \cdot b(1+x) \cdot c(1+x) = abc(1+x)^3 = \mathcal{V}(1+x)^3$$

e sviluppando il cubo otteniamo

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}(1 + 3x + 3x^2 + x^3). \quad (2)$$

Se ora ipotizziamo per  $x$  valori prossimi allo zero (il testo esemplifica con  $x = 0,38\% = 0,0038$ ) potremo trascurare i termini quadratici e cubici mantenendo solo la dipendenza lineare da  $x$  ossia

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}(1 + 3x + 3x^2 + x^3) \approx \mathcal{V}(1 + 3x) \quad (3)$$

e quindi osservare che, ad un aumento percentuale  $x$  di ciascuna dimensione

$$x = \frac{a' - a}{a} = \frac{b' - b}{b} = \frac{c' - c}{c},$$

si può dedurre dalla (3)

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} + 3x \cdot \mathcal{V} \implies \mathcal{V}' - \mathcal{V} = 3x \cdot \mathcal{V}$$

un aumento percentuale triplo per il volume

$$3x = \frac{\mathcal{V}' - \mathcal{V}}{\mathcal{V}}.$$

Pertanto nell'esempio proposto, se  $x = 0,38\% = 0,0038$  allora il volume aumenta del  $3 \cdot 0,38\% = 1,14\%$ .

In modo simile si procede per l'aumento della superficie. Difatti, a seguito della variazione delle dimensioni, l'area di una faccia (del parallelepipedo) è data

$$\mathcal{A}' = a' \cdot b' = a(1+x) \cdot b(1+x) = ab(1+x)^2 = \mathcal{A}(1+2x+x^2),$$

che, nell'ipotesi  $x \approx 0$ , si può ridurre a

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}(1+2x+x^2) \approx \mathcal{A}(1+2x)$$

e quindi concludere che l'aumento percentuale dell'area è doppio di quello subito da ciascuna dimensione. Ne segue che se  $x = 0,38\%$  l'aumento percentuale dell'area è pari a  $2 \cdot 0,38\% = 0,76\%$ .

#### Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

Sfruttiamo l'usuale rappresentazione posizionale di un numero in base 10 e disponiamo le cifre più grandi cioè 7, 6, 5, 4 tra le sette assegnate, rispettivamente nelle posizioni corrispondenti alle potenze  $10^6$ ,  $10^5$ ,  $10^4$ ,  $10^3$  cioè

$$\begin{aligned} & \mathbf{7} \cdot 10^6 + \mathbf{6} \cdot 10^5 + \mathbf{5} \cdot 10^4 + \mathbf{4} \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + x \cdot 10 + x \\ & = \boxed{7 \mid 6 \mid 5 \mid 4 \mid x \mid x \mid x} \end{aligned}$$

Rimangono da sistemare le cifre 1, 2, 3 da associare alle potenze  $10^2$ ,  $10^1$ ,  $10^0$  e quindi da disporre in luogo delle  $x$  nel precedente box. Le  $3! = 6$  permutazioni di queste ultime cifre sono, in ordine crescente sono

$$\begin{array}{cccccc} 123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 5035 & 5036 & 5037 & 5038 & 5039 & 5040 \end{array}$$

e dove si sono riportati i valori corrispondenti dell'indice che ne identifica la posizione tra le  $7! = 5040$  permutazioni. Ne segue che il valore che corrisponde al 5036 è

$$\boxed{7 \mid 6 \mid 5 \mid 4 \mid 1 \mid 3 \mid 2}.$$

Per individuare il numero che occupa la 1441-esima posizione notiamo che le permutazioni che hanno come cifra più significativa 1 ammontano a

$$\boxed{1 \mid x \mid x \mid x \mid x \mid x \mid x} \implies 6! = 720$$

essendo sei le cifre che si possono disporre in luogo delle  $x$  nel box precedente. Seguono poi valori maggiori dove la cifra più significativa è la 2 ossia

$$\boxed{2 \mid x \mid x \mid x \mid x \mid x \mid x} \implies 6! = 720.$$

Pertanto tutti i numeri che iniziano con le cifre 1 o, alternativamente 2, sono in totale 1440. Seguiranno quindi i valori con la cifra 3 più significativa e il minore tra questi si ottiene disponendo le cifre rimaste in ordine decrescente da sinistra a destra. Il valore cercato è quindi

$$\boxed{3 \mid 1 \mid 2 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7}.$$

### Quesito n. 7: soluzione. (testo del quesito)

La probabilità  $p$  richiesta si può determinare utilizzando la definizione classica di probabilità: questa è definita come il rapporto tra il numero  $n_f$  dei casi favorevoli ad un dato evento e il numero  $n$  dei casi possibili e nell'ipotesi che ognuno di questi abbia la medesima probabilità di accadere cioè

$$p = \frac{n_f}{n}. \quad (1)$$

Nel nostro caso il numero dei casi possibili equivale al numero di coppie che si possono selezionare a partire da un gruppo di 10 persone ossia è il numero delle combinazioni semplici di 10 elementi a gruppi di 2 cioè

$$n = \binom{10}{2} = 45.$$

Poiché tra le 10 persone il 60% ha gli occhi azzurri e quindi ve ne sono 6, segue che solo 4 persone non hanno gli occhi azzurri. Il numero di coppie che si possono formare in modo che la caratteristica degli occhi azzurri non sia presente corrisponde ora alle combinazioni semplici di 4 elementi a gruppi di 2 ossia

$$n_f = \binom{4}{2} = 6.$$

Per la definizione (1) abbiamo in definitiva

$$p = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} \approx 0,13. \quad (2)$$

In alternativa possiamo sfruttare il teorema della probabilità composta. Difatti definiti i due eventi

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\text{la prima persona scelta non ha gli occhi azzurri}\} \\ E_2 &= \{\text{la seconda persona scelta non ha gli occhi azzurri}\}, \end{aligned}$$

questi sono eventi stocasticamente indipendenti per cui la probabilità che accada l'evento

$$E = E_1 \cap E_2 = \{\text{entrambe le persone scelte non hanno gli occhi azzurri}\}$$

è, per tale teorema,

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E_2). \quad (3)$$

D'altra parte, riprendendo ancora la definizione classica (1), i casi favorevoli all'evento  $E_1$  sono 4 su 10 mentre successivamente, favorevoli all'evento  $E_2$ , sono 3 su 9 ossia

$$p(E_1) = \frac{4}{10}, \quad p(E_2) = \frac{3}{9}.$$

Per il teorema (3) deduciamo che

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

in accordo a quanto già ottenuto in (2).

### Quesito n. 8: soluzione. (testo del quesito)

Risolviamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\text{sen } x} - e^{\text{sen } \pi}}{x - \pi} \quad (1)$$

riportando la funzione ad argomento ad una forma più semplice con la sostituzione  $t = x - \pi$  e osservando che

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) = 0, \quad e^{\text{sen } \pi} = e^0 = 1 \quad \text{e} \quad \text{sen}(t + \pi) = -\text{sen } t.$$

Ne deriva che

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\text{sen } x} - e^{\text{sen } \pi}}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\text{sen}(t+\pi)} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\text{sen } t} - 1}{t}. \quad (2)$$

La forma ottenuta suggerisce di moltiplicare numeratore e denominatore della funzione ad argomento del limite per  $-\operatorname{sen} t$  così da riportare il limite a forme note. Difatti

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{t} \cdot \frac{(-\operatorname{sen} t)}{(-\operatorname{sen} t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{-\operatorname{sen} t} \right) \cdot \left( \frac{-\operatorname{sen} t}{t} \right).\end{aligned}\quad (3)$$

Una seconda sostituzione  $z = -\operatorname{sen} t$  e  $\lim_{t \rightarrow 0} (-\operatorname{sen} t) = 0$  permette di riscrivere il primo fattore del limite (3) come

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{-\operatorname{sen} t} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z}$$

e riconoscere quindi un limite importante che vale\*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.\quad (4)$$

Il secondo fattore è pure un limite fondamentale e risulta

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( -\frac{\operatorname{sen} t}{t} \right) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = -1.\quad (5)$$

In definitiva, per (3), (4) e (5), otteniamo per il limite iniziale

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-\operatorname{sen} t} - 1}{-\operatorname{sen} t} \right) \cdot \left( \frac{-\operatorname{sen} t}{t} \right) \\ &= 1 \cdot (-1) = -1.\end{aligned}$$

In alternativa possiamo risolvere il limite (1) osservando come la sua struttura sia coerente con la definizione di rapporto incrementale di una funzione  $f(x)$  nel punto  $x_0$ . Difatti il limite del rapporto incrementale si scrive pure come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e questo si riduce al limite (1) se identifichiamo  $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$  e  $x_0 = \pi$ .

Ma poiché sappiamo che la precedente funzione  $f(x)$  è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$  in quanto funzione composta di funzioni derivabili, allora tale limite esiste ed esprime il valore della derivata prima in  $x_0$  ossia  $f'(x_0)$ . Il calcolo di  $f'(x)$  fornisce

$$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$$

---

\* Si veda la dispensa <http://www.lorenzoroi.net/dispenseMatematica.html>.

per cui è immediato ottenere

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} = f'(\pi) = e^{\operatorname{sen} \pi} \cdot \cos \pi = e^0 \cdot (-1) = -1.$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Per confrontare il numero di elementi compresi in due insiemi si ricorre alla definizione di *cardinalità* o *potenza* che formalizza e generalizza l'operazione del contare il numero degli elementi contenuti in un insieme.

In particolare due insiemi  $A$  e  $B$  hanno la medesima cardinalità, e in tal caso si dicono *equipotenti*, se è possibile definire una funzione biunivoca che associ ad ogni elemento di  $A$  uno e un solo elemento di  $B$ .

Se invece la  $\operatorname{card}(B) > \operatorname{card}(A)$  vuol dire che è possibile definire una funzione iniettiva da  $A$  in  $B$  ma non esiste invece una analoga funzione iniettiva di  $B$  in  $A$ .

Se ora consideriamo l'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  e l'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$ , entrambi contenenti infiniti elementi, è stato dimostrato da G. Cantor che la loro cardinalità è la medesima cioè

$$\operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\mathbb{N}).$$

In questo caso si dice che

$\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Q}$  possiedono la *cardinalità del numerabile*

e il simbolo che identifica tale “numero” è  $\aleph_0$  (che si legge *aleph-zero*, dove il simbolo *aleph*,  $\aleph$ , è la prima lettera dell'alfabeto ebraico). Si scrive quindi

$$\operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

Si veda a tal fine la soluzione del quesito 4 dell'Esame 2012 PNI dove si richiama il cosiddetto “primo metodo diagonale”.

D'altra parte G. Cantor nel 1874, tramite la tecnica dimostrativa del “secondo metodo diagonale”, ha dimostrato che l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  ha cardinalità maggiore del numerabile

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}) > \operatorname{card}(\mathbb{Q}) \tag{1}$$

ossia non esiste una corrispondenza biunivoca di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{Q}$ . Si dice che

$\mathbb{R}$  ha la *cardinalità del continuo*.

Infine se  $I$  rappresenta l'insieme dei numeri irrazionali,  $\mathbb{R}$  si può rappresentare come l'insieme unione

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I.$$

Ma poiché  $\mathbb{Q}$  è numerabile discende che  $I$  deve avere cardinalità maggiore del numerabile altrimenti dovrebbe essere  $\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(\mathbb{Q})$  contro quanto espresso dalla (1).

Pertanto possiamo concludere che sono più numerosi i numeri irrazionali di quelli razionali e conseguentemente l'affermazione corretta, seppure qualitativa nel caso di insiemi infiniti, è di Luisa.

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Si tratta di discutere le soluzioni dell'equazione parametrica

$$x^2(3-x) = k \quad \text{con la condizione} \quad 0 \leq x \leq 3 \quad (1)$$

ma, posto  $y = k$ , queste soluzioni sono pure quelle del sistema

$$\begin{cases} y = x^2(3-x) \\ y = k \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases} \quad (2)$$

D'altra parte questo sistema si può interpretare geometricamente come la ricerca dei punti di intersezione tra il grafico della cubica rappresentata dalla  $y = x^2(3-x)$  e con ascisse appartenenti all'intervallo  $[0, 3]$  e il fascio di rette orizzontali di equazione  $y = k$ .

A tal fine osserviamo che la cubica  $y = x^2(3-x)$  ha segno positivo per

$$y > 0 \implies 3-x > 0 \implies x < 3 \wedge x \neq 0,$$

mentre

$$y = 0 \iff x = 0 \vee x = 3.$$

I limiti agli estremi di  $\mathbb{R}$  sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2(3-x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left( -1 + \frac{3}{x} \right) = \mp\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( -1 + \frac{3}{x} \right) = -1 + 0 = -1.$$

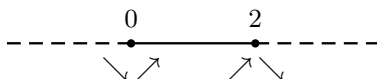
La derivata prima è

$$y' = D(3x^2 - x^3) = 6x - 3x^2$$

e risulta positiva per

$$y' \geq 0 \implies 6x - 3x^2 \geq 0 \implies 0 \leq x \leq 2$$

cosicché la cubica è monotona strettamente crescente in  $]0, 2[$ . Riportato graficamente il suo segno nella fig. 1, è facile riconoscere la presenza di un minimo relativo in  $x = 0$  e di un massimo relativo in  $x = 2$ .

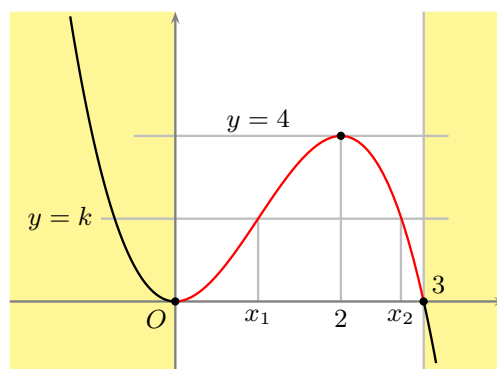


**Fig. 1.** Segno della derivata prima di  $y = x^2(3-x)$ .

I valori delle ordinate sono rispettivamente

$$y(0) = 0^2(3 - 0) = 0, \quad y(2) = 2^2(3 - 2) = 4$$

e il grafico della funzione cubica (lo studio di  $y''$  non è necessario in questo caso) è rappresentato in fig. 2.



**Fig. 2.** Grafico di  $y = x^2(3 - x)$  (non isometrico).

Possiamo ora concludere osservando che, per  $0 \leq k \leq 4$ , il fascio intersecherà la cubica in tre punti ma solo due,  $x_1$  e  $x_2$ , hanno ascisse in  $[0, 3]$ .

Poiché per  $k = 4$  le due soluzioni sono coincidenti, il sistema (2) ha due soluzioni distinte per  $0 \leq k < 4$ .

Posto  $k = 3$  l'equazione (1) diviene  $x^2(3 - x) = 3$  che riscriviamo come

$$-x^3 + 3x^2 - 3 = 0. \quad (3)$$

Se ora definiamo la funzione

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$$

il calcolo della maggiore tra le due soluzioni di (3),  $x_2$ , si riduce al calcolo delle ascisse di intersezione della funzione  $f$  con l'asse  $x$ . Pertanto se consideriamo l'intervallo di valori di  $x \in [2, 3]$  che, per lo studio precedente (fig. 2), contiene certamente la sola  $x_2$ , per dedurre una sua approssimazione applichiamo il metodo delle tangenti (o di Newton) alla funzione  $f$ . Calcolata la derivata prima  $f'(x) = -3x^2 + 6x$ , il metodo si basa sulla relazione di ricorrenza

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4)$$

a partire da un valore iniziale  $x_0$ : la precedente si riduce nel nostro caso alla

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{(-x_n^3 + 3x_n^2 - 3)}{(-3x_n^2 + 6x_n)} \quad (5)$$

dove abbiamo introdotto, per comodità delle scritture successive, la funzione  $g(x_n)$ .

Consideriamo come valore iniziale  $x_0 = 3$  (va evitato il valore  $x_0 = 2$  in quanto  $f'(2) = 0$  e (5) perde di significato) nella prima iterazione si ottiene

$$x_1 = g(3) = 3 - \frac{(-3^3 + 3 \cdot 3^2 - 3)}{(-3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3)} = 3 - \frac{(-3)}{(-9)} \approx 2,66666.$$

Introdotto tale risultato nella (5), la seconda applicazione del metodo dà

$$x_2 = g(2,66666) \approx 2,548611,$$

mentre il terzo passo fornisce

$$x_3 = g(2,548611) \approx 2,532390,$$

ed infine il quarto

$$x_4 = g(2,532390) \approx 2,532088.$$

Questi risultati, assieme alla differenza  $x_{n+1} - x_n$ , sono riportati nella **tabella** sottostante e mostrano come una stima numerica con tre cifre decimali corrette della radice richiesta sia  $x_2 \approx 2,532$ .

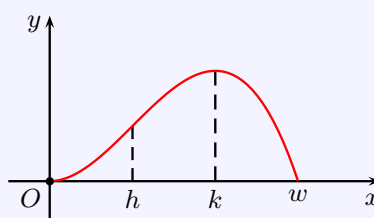
$n$	$x_n$	$x_{n+1}$	$x_{n+1} - x_n$
0	3	2,666666	-0,33333
1	2,666666	2,548611	-0,11805
2	2,548611	2,532390	-0,01622
3	2,532390	2,532088	-0,00030

# ESAME 2014

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Nella figura a lato è disegnato il grafico  $\Gamma$  di  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$  con  $f$  funzione definita sull'intervallo  $[0, w]$  e ivi continua e derivabile.  $\Gamma$  è tangente all'asse  $x$  nell'origine  $O$  del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per  $x = h$  e  $x = k$ .



- 1) Si determinino  $f(0)$  e  $f(k)$ ; si dica se il grafico della funzione  $f$  presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
- 2) Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che  $g(x)$  sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri  $h$  e  $k$  dividono l'intervallo  $[0, w]$  in tre parti uguali.
- 3) Si determini l'espressione di  $g(x)$  nel caso  $w = 3$  e  $g(1) = \frac{2}{3}$  e si scrivano le equazioni delle normali a  $\Gamma$  nei punti in cui esso è tagliato dalla retta  $y = \frac{2}{3}$ .
- 4) Si denoti con  $R$  la regione che  $\Gamma$  delimita con l'asse  $x$  e sia  $W$  il solido che essa descrive nella rotazione completa attorno all'asse  $y$ . Si spieghi perché il volume di  $W$  si può ottenere calcolando:

$$\int_0^3 (2\pi x)g(x) dx.$$

Supposte fissate in decimetri le unità di misura del sistema monometrico  $Oxy$ , si dia la capacità in litri di  $W$ .

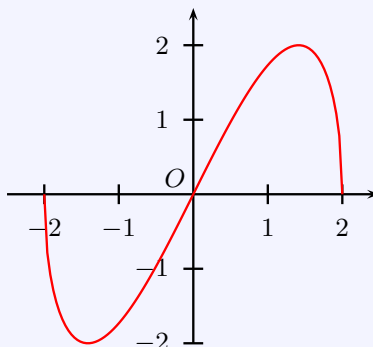
Soluzione

• **Problema n. 2**

A lato è disegnato il grafico  $\Gamma$  della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}.$$

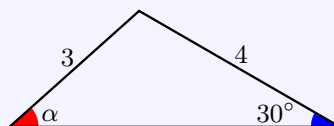
1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di  $f(x)$ .
2. Si dica se l'origine  $O$  è centro di simmetria per  $\Gamma$  e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in  $O$  a  $\Gamma$  forma con la direzione positiva dell'asse  $x$ .
3. Si disegni la curva d'equazione  $y^2 = x^2(4-x^2)$  e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Sia  $h(x) = \text{sen}(f(x))$  con  $0 \leq x \leq 2$ . Quanti sono i punti del grafico di  $h(x)$  di ordinata 1? Il grafico di  $h(x)$  presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di  $k$  l'equazione  $h(x) = k$  ha 4 soluzioni distinte?



Soluzione

**Questionario**

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di  $\alpha$ ?



Soluzione

2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.

Soluzione

3. Nello sviluppo di  $(2a^2 - 3b^3)^n$  compare il termine  $-1080a^4b^9$ . Qual è il valore di  $n$ ?

Soluzione

4. Un solido  $\Omega$  ha per base la regione  $R$  delimitata dal grafico di  $f(x) = e^{1/x}$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[-2, -1]$ . In ogni punto di  $R$  di ascissa  $x$ , l'altezza del solido è data da  $h(x) = \frac{1}{x^2}$ . Si calcoli il volume del solido.

Soluzione

5. Dei numeri  $1, 2, 3, \dots, 6000$ , quanti non sono divisibili né per 2, né 3 né per 5?

Soluzione

6. Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?

Soluzione

7. Il valor medio della funzione  $f(x) = x^3$  sull'intervallo chiuso  $[0, k]$  è 9. Si determini  $k$ .

Soluzione

8. Del polinomio di quarto grado  $P(x)$  si sa che assume il suo massimo valore 3 per  $x = 2$  e  $x = 3$  e, ancora, che  $P(1) = 0$ . Si calcoli  $P(4)$ .

Soluzione

9. Si determini il dominio della funzione:  $f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x + 5)}$ .

Soluzione

10. Si determinino i valori reali di  $x$  per cui:

$$\left(\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26)\right)^{x^2 - 6x + 1} = 1.$$

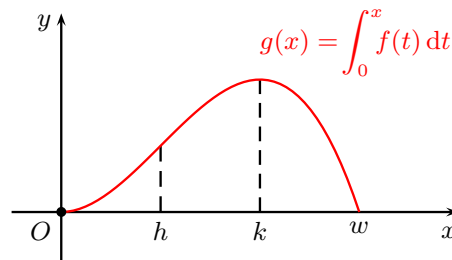
Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Il problema assegna il grafico  $\Gamma$  (fig. 1) della funzione integrale

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

e intende risalire ad alcune caratteristiche della funzione integranda  $f$ .



**Fig. 1.** Grafico  $\Gamma$  di  $g(x)$ .

Per rispondere quindi alla richiesta si deve considerare che, in base al teorema di Torricelli-Barrow, la derivata della funzione integrale  $g'(x)$  è pari alla funzione integranda calcolata nell'estremo superiore di integrazione ossia vale

$$g'(x) = D \left[ \int_0^x f(t) dt \right] = f(x). \quad (1)$$

Pertanto è pure  $f(0) = g'(0)$  e siccome il testo afferma che il grafico  $\Gamma$  è tangente all'asse  $x$  nell'origine, significa che  $g'(0) = 0$  per cui  $f(0) = 0$ . Poiché inoltre il medesimo grafico presenta in  $x = k$  un massimo relativo (e assoluto) proprio e la funzione  $f$ , cioè la  $g'(x)$  è continua e derivabile, questa passa con continuità da valori positivi in un intorno sinistro di  $x = k$  a valori negativi in un intorno destro assunto in  $x = k$  il valore nullo ossia  $f(k) = g'(k) = 0$ .

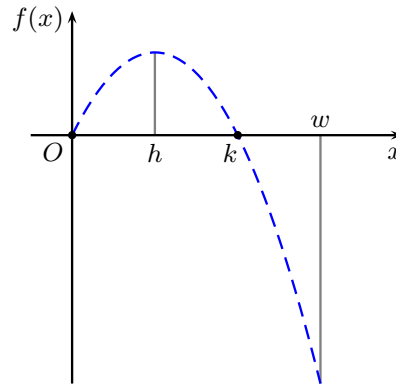
Inoltre nell'intervallo  $]0, k[$  il grafico  $\Gamma$  appare strettamente crescente per cui

$$f(x) = g'(x) > 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < k,$$

mentre risulta strettamente decrescente in  $]k, w]$  e quindi

$$f(x) = g'(x) < 0 \quad \text{se} \quad k < x \leq w.$$

Seppure in modo qualitativo osserviamo che il coefficiente angolare della retta tangente a  $\Gamma$  in  $[0, k]$  (cioè  $g'(x)$ ) assume all'aumentare di  $x$  in  $[0, h]$  valori sempre maggiori, mentre successivamente in  $[h, k]$  i suoi valori decrescono gradualmente fino ad annullarsi in  $x = k$  per poi in  $[k, w]$ , ulteriormente diminuire fino a  $x = w$ .



**Fig. 2.** Possibile grafico di  $f(x)$ .

Con tali informazioni possiamo quindi ipotizzare un andamento qualitativo per il grafico di  $f(x)$  e rappresentarlo in fig. 2.

2. Nell'ipotesi che la  $g(x)$  sia esprimibile in termini di un polinomio di terzo grado potremo scrivere la funzione  $g$  come

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2)$$

con  $a, b, c, d$  coefficienti da determinare.

La condizione  $g(0) = 0$  implica subito che sia  $d = 0$  e l'espressione precedente si riduce alla

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c). \quad (3)$$

Il testo afferma pure la tangenza del grafico di  $g$  nell'origine cosicché l'equazione  $g(x) = 0$  deve presentare in  $x = 0$  una radice di molteplicità 2. Il secondo fattore nella precedente (3) deve annullarsi in  $x = 0$  per cui anche il termine  $c$  deve esser nullo  $c = 0$  e la  $g$  si riduce alla

$$g(x) = x^2(ax + b). \quad (4)$$

Infine poiché  $g(w) = 0$ , la (4) comporta

$$w^2(aw + b) = 0 \quad \implies \quad aw + b = 0 \quad \implies \quad b = -aw$$

e in definitiva, l'equazione rappresentativa della funzione  $g$  si è ridotta alla

$$g(x) = x^2(ax - aw) = ax^2(x - w) = ax^3 - awx^2. \quad (5)$$

I punti in corrispondenza dei quali  $g'(x) = 0$  si deducono dalla

$$g'(x) = D[ax^3 - awx^2] = 3ax^2 - 2awx = ax(3x - 2w) = 0$$

da cui  $x = 0$  e  $x = \frac{2}{3}w$ . Sia  $x = 0$  che  $x = \frac{2}{3}w$  sono i valori aspettati e, in particolare, quest'ultimo rappresenta il valore di  $k$  richiesto dal testo.

La derivata seconda è  $g''(x) = 6ax - 2aw$  e, posta pari allo zero, fornisce l'ascissa del punto di flesso ossia  $h$ . In tal caso risulta

$$6ax - 2aw = 0 \implies x = \frac{1}{3}w = h$$

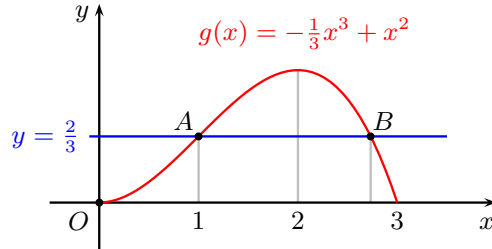
e ciò dimostra come le ascisse  $h = \frac{1}{3}w$  e  $k = \frac{2}{3}w$ , rispettivamente dei punti di flesso e di massimo per  $g$ , dividano l'intervallo  $[0, w]$  in tre parti uguali.

3. Le condizioni  $w = 3$  e  $g(1) = \frac{2}{3}$  permettono di definire i valori numerici dei due parametri ancora incogniti nell'equazione (5)

$$g(1) = a(1)^2(1 - 3) = \frac{2}{3} \implies a = -\frac{1}{3}$$

per cui risulta definita la funzione

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^2(x - 3) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2. \quad (6)$$



**Fig. 3.** Grafico  $\Gamma$  di  $g(x)$  e retta  $y = \frac{2}{3}$ .

Per determinare le ascisse dei punti  $A$  e  $B$  di intersezione del grafico  $\Gamma$  con quello della retta di equazione  $y = \frac{2}{3}$  (fig. 3) va evidentemente risolta l'equazione

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \implies 2 = -x^3 + 3x^2 \implies x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

della quale però, per la condizione  $g(1) = \frac{2}{3}$ , conosciamo la soluzione  $x_A = 1$ . Con il metodo di Ruffini scomponiamo il polinomio  $x^3 - 3x^2 + 2$

	1	-3	0	2
1		1	-2	-2
	1	-2	-2	0

nel prodotto  $(x-1)(x^2-2x-2) = 0$  per cui l'ascissa del secondo punto di intersezione discende dall'equazione

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

dove, per l'appartenenza all'intervallo  $[0, 3]$ , accettiamo solo  $x_B = 1 + \sqrt{3}$ .  
Il calcolo della derivata prima di (6)  $g'(x) = -x^2 + 2x$  nei punti appena determinati

$$A\left(1, \frac{2}{3}\right), \quad B\left(1 + \sqrt{3}, \frac{2}{3}\right),$$

fornisce

$$g'(x_A) = g'(1) = -1 + 2 = 1$$

$$g'(x_B) = g'(1 + \sqrt{3}) = -(1 + \sqrt{3})^2 + 2(1 + \sqrt{3}) = -2$$

per cui, sapendo che i coefficienti angolari delle normali sono l'antireciproco di quelli delle rispettive tangenti, le equazioni delle rette normali a  $\Gamma$  sono

$$n_A : y - y_A = -\frac{1}{g'(x_A)}(x - x_A), \quad n_B : y - y_B = -\frac{1}{g'(x_B)}(x - x_B)$$

ed esplicitamente

$$n_A : y - \frac{2}{3} = -(x - 1), \quad n_B : y - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x - 1 - \sqrt{3}),$$

da cui

$$n_A : y = -x + \frac{5}{3}, \quad n_B : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. La regione  $R$  rappresentata in giallo nella fig. 4 genera in una rotazione completa attorno all'asse  $y$  il solido  $W$  la cui sezione nel piano  $xy$  è la regione in colore nella medesima figura.

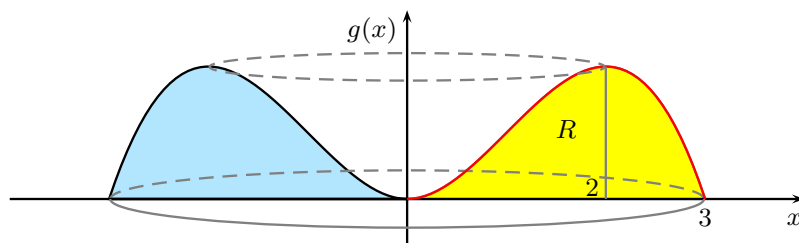
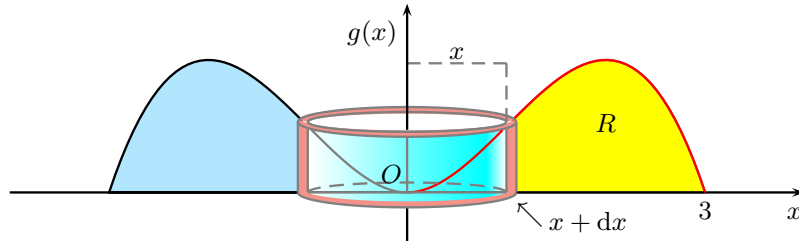
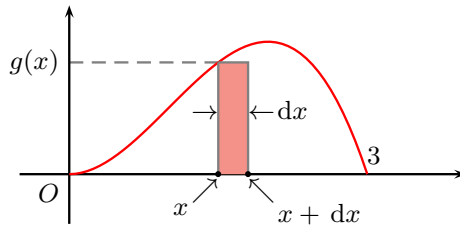


Fig. 4. Grafico di  $g(x)$ , regione  $R$  e sezione piana del solido  $W$ .



**Fig. 5.** Guscio cilindrico di raggio interno  $x$  ed esterno  $x + dx$ .



**Fig. 6.** Spessore ed altezza di una sezione del “guscio” cilindrico.

Per giustificare la formula proposta per il calcolo del volume di  $W$  consideriamo i punti di ascissa  $x \in [0, 3]$  e  $x + dx$ , quest'ultimo ottenuto sommando ad  $x$  il suo differenziale. Entrambi i valori si possono interpretare come i raggi di due cilindri (fig. 5), disposti uno interno all'altro, aventi per asse comune l'asse  $y$  e come altezza il valore della funzione in un qualsiasi punto compreso nell'intervallo  $[x, x + dx]$ . Supporremo che tale altezza sia il valore  $g(x)$  raggiunto nell'estremo sinistro di  $[x, x + dx]$  (fig. 6) ma per quanto seguirà ogni altro valore può andar bene.

Il volume del cilindro interno di raggio  $x$  è dato da

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}(x) \cdot g(x) = \pi x^2 \cdot g(x) \quad (7)$$

mentre per quello più esterno e raggio  $x + dx$  è

$$\mathcal{V}' = \mathcal{A}(x + dx) \cdot g(x) = \pi(x + dx)^2 \cdot g(x). \quad (8)$$

La differenza  $\mathcal{V}' - \mathcal{V} = d\mathcal{V}$  rappresenta quindi il volume di un guscio cilindrico avente spessore  $dx$  e altezza  $g(x)$ . Inserendo le espressioni (7) e (8) otteniamo che il volume di tale guscio è

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &= \pi(x + dx)^2 g(x) - \pi x^2 g(x) = \pi g(x) \cdot [x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2] \\ &= \pi g(x) \cdot [2x dx + (dx)^2]. \end{aligned}$$

Se supponiamo  $dx$  piccolo a piacere cioè infinitesimo, possiamo trascurare il termine quadratico  $(dx)^2$  rispetto a  $dx$  per cui

$$d\mathcal{V} = \pi g(x) [2x dx + (dx)^2] \approx \pi g(x) \cdot 2x dx = 2\pi x \cdot g(x) dx. \quad (9)$$

Abbiamo in tal modo ottenuto il differenziale del volume del solido  $W$  in funzione di  $x$  cosicché il suo volume risulta espresso dalla somma di tali gusci infinitesimi al variare di  $x$  nell'intervallo  $[0, 3]$  ossia dall'integrale definito

$$\mathcal{V}(W) = \int_0^3 d\mathcal{V} = \int_0^3 (2\pi x)g(x) dx \quad (10)$$

che è il risultato che si voleva dimostrare.

Il valore numerico del volume si ottiene risolvendo l'integrale (10) che, dopo aver sostituito l'espressione esplicita (6) della  $g(x)$  e posti a fattore termini costanti, diviene

$$\mathcal{V}(W) = \int_0^3 2\pi x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) dx = -\frac{2\pi}{3} \int_0^3 x^4 dx + 2\pi \int_0^3 x^3 dx. \quad (11)$$

Poiché

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c \quad \text{e} \quad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c,$$

gli integrali in (11) si risolvono in

$$\mathcal{V}(W) = -\frac{2\pi}{3} \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 + 2\pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

per cui

$$\mathcal{V}(W) = -\frac{2\pi}{3} \left[\frac{3^5}{5} - 0\right] + 2\pi \left[\frac{3^4}{4} - 0\right] = 2\pi \cdot 3^4 \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{81}{10}\pi \text{ dm}^3.$$

Il volume di  $W$  in litri è pertanto  $\mathcal{V}(W) = 8,1\pi \approx 25,4469 \text{ dm}^3 = 25,4469$  litri.

### Problema n. 2: soluzione. (testo del problema)

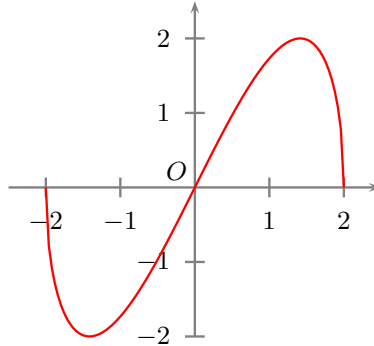
1. Il grafico  $\Gamma$  (fig. 1) della funzione  $f$

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2} \quad (1)$$

mostra come il massimo e il minimo assoluti nell'intervallo  $[-2, 2]$  siano raggiunti in punti interni caratterizzati da una retta tangente orizzontale e quindi con derivata prima nulla.

Notata la simmetria dispari di  $f$ ,

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x) \quad \forall x \in [-2, 2]$$



**Fig. 1.** Grafico  $\Gamma$  della funzione  $f$ .

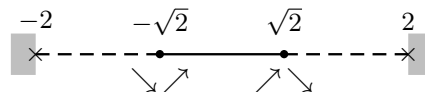
il calcolo della derivata prima  $f'(x)$  fornisce

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} \quad x \in ]-2, 2[. \end{aligned} \quad (2)$$

Lo studio del suo segno dipende dal solo numeratore per cui la disequazione  $f'(x) \geq 0$  presenta le soluzioni

$$2 - x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

e quindi le ascisse dei punti di minimo e di massimo assoluti (fig. 2) sono, rispettivamente,  $x_m = -\sqrt{2}$  e  $x_M = \sqrt{2}$ .



**Fig. 2.** Segno della derivata prima  $f'$ .

In corrispondenza la funzione assume i valori estremi

$$f(x_m) = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2} = -2, \quad f(x_M) = 2$$

cosicché il suo codominio è pure l'intervallo  $[-2, 2]$ .

2. La simmetria centrale del grafico  $\Gamma$  rispetto all'origine  $O$  è già stata dimostrata nel punto 1: qui intendiamo ottenerla in forme più generali applicando direttamente le sue equazioni rappresentative

$$\sigma_O : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad (3)$$

all'equazione di  $f$  riscritta come

$$y = x\sqrt{4-x^2}. \quad (4)$$

Pertanto ottenute dalle (3) le equazioni della trasformazione inversa  $\sigma_O^{-1}$ ,

$$\sigma_O^{-1} : \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

e sostituite in (4) abbiamo

$$-y' = -x'\sqrt{4-(-x')^2} \implies y' = x'\sqrt{4-(x')^2}$$

equazione identica alla (4) e che conferma come  $\Gamma$  sia un insieme unito rispetto alla trasformazione  $\sigma_O$ .

L'angolo richiesto si deduce determinando innanzitutto il coefficiente angolare  $m$  della retta tangente a  $\Gamma$  nell'origine, grandezza che sappiamo essere rappresentata dalla  $m = f'(0)$ . Ripresa l'espressione (2) abbiamo

$$f'(0) = \frac{2(2-0)}{\sqrt{4-0}} = 2$$

per cui, ricordato il significato trigonometrico di coefficiente angolare  $m = \operatorname{tg} \alpha$  con  $\alpha$  angolo definito dalla retta e dal semiasse positivo  $x$ , abbiamo

$$f'(0) = \operatorname{tg} \alpha = 2 \implies \alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63,4349^\circ = 63^\circ 26' 06''.$$

3. Poiché  $y^2 \geq 0$ , evidentemente l'equazione

$$y^2 = x^2(4-x^2) \quad (5)$$

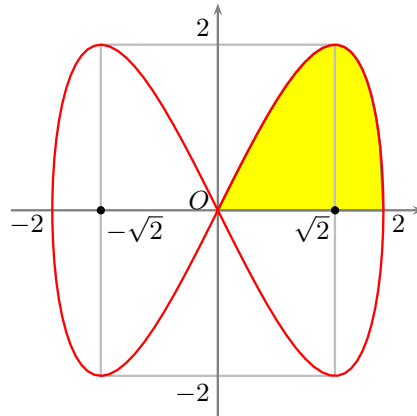
ammette soluzioni  $(x, y)$  solo nel caso che sia  $4-x^2 \geq 0$  ossia per  $x \in [-2, 2]$ . In tale intervallo l'equazione è equivalente alla

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2(4-x^2)}$$

che può risciversi come

$$|y| = |x|\sqrt{4-x^2} \quad (6)$$

e, nell'ipotesi che  $x$  e  $y$  abbiano segno concorde, quest'ultima si riduce alla funzione studiata e al grafico  $\Gamma$ . Nel caso invece che le coordinate abbiano segno discorde ossia che il punto rappresentato dalla coppia  $(x, y)$  appartenga al II o IV quadrante, la (6) si riduce alla  $y = -x\sqrt{4-x^2}$  che, evidentemente, rappresenta



**Fig. 3.** Grafico della curva di equazione  $y^2 = x^2(4 - x^2)$ .

la curva simmetrica rispetto all'asse  $x$  della (1). In sostanza, le equazioni (5) o (6) sono invarianti se ad esse si applica una delle seguenti trasformazioni

$$\sigma_O : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad \sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad \sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

rappresentative, rispettivamente, di una simmetria centrale di centro l'origine degli assi, di una simmetria assiale di asse  $x$  e, infine, di una simmetria assiale di asse  $y$ . Il grafico di (5) è quindi rappresentato dalla fig. 3.

Per le simmetrie di tale curva, l'area  $\mathcal{A}_{tot}$  richiesta è pari a 4 volte l'area  $\mathcal{A}$  della regione compresa nel primo quadrante (fig. 3) e questa è riconducibile all'integrale definito

$$\mathcal{A} = \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx. \quad (7)$$

L'integrale indefinito associato

$$\int x \sqrt{4 - x^2} dx \quad (8)$$

si può risolvere con la sostituzione  $t = 4 - x^2$  che implica la relazione tra i differenziali

$$dt = -2x dx \quad \implies \quad -\frac{1}{2} dt = x dx.$$

L'integrale (8) diviene quindi

$$\int x \sqrt{4 - x^2} dx = \int \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2} dt\right) = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt$$

e, rientrando tra gli elementari, è risolto da

$$\int x \sqrt{4 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} + c = -\frac{\sqrt{t^3}}{3} + c = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(4 - x^2)^3} + c.$$

L'area complessiva richiesta è perciò

$$\mathcal{A}_{tot} = 4 \cdot \mathcal{A} = 4 \left[ -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(4-x^2)^3} \right]_0^2 = 4 \left[ 0 - \left( -\frac{1}{3} \right) \sqrt{4^3} \right] = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

4. La funzione  $h$

$$h(x) = \text{sen}[f(x)] = \text{sen}\left(x\sqrt{4-x^2}\right) \quad (9)$$

risulta essere composta dalle funzioni  $f$  e dal seno, entrambe definite e continue in  $[0, 2]$ : è pertanto una funzione continua in tale intervallo. Agli estremi la funzione  $h$  risulta nulla

$$h(0) = \text{sen } f(0) = \text{sen } 0 = 0 \quad \text{così come} \quad h(2) = \text{sen } f(2) = \text{sen } 0 = 0,$$

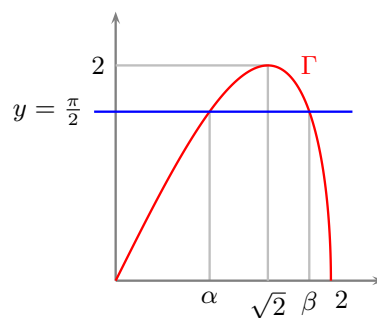
mentre se  $x \in ]0, 2[$  è pure  $f(x) \in ]0, 2[$ , e quindi  $h(x) > 0$  in quanto  $]0, 2[ \subset ]0, \pi[$ . La condizione

$$h(x) = \text{sen}[f(x)] = 1 \quad (10)$$

si traduce nelle equazioni  $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ : tra tutte queste e a seguito della conoscenza del codominio della funzione  $f$ , solo la

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

può fornire delle soluzioni. Quest'ultima può essere interpretata graficamente come la ricerca delle intersezioni del grafico  $\Gamma$  di  $f$  con la retta rappresentata da  $y = \frac{\pi}{2}$ , cosicché il confronto grafico di fig. 4 suggerisce l'esistenza di due soluzioni,  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Fig. 4.** Grafico di  $f(x)$  con  $0 \leq x \leq 2$ .

Difatti, procedendo formalmente, la (11) si esplicita nella

$$x\sqrt{4-x^2} = \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

che nell'intervallo  $[0, 2]$  è equivalente all'equazione

$$x^2(4 - x^2) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Riordinata, è pure

$$x^4 - 4x^2 + \frac{\pi^2}{4} = 0$$

per cui, posto  $t = x^2$  si riduce alla  $t^2 - 4t + \pi^2/4 = 0$  che ha, per soluzioni,

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}$$

entrambi valori positivi. Ne derivano quindi i quattro valori

$$x_{1,2} = \pm\alpha = \pm\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}} \approx \pm 0,8729$$

$$x_{3,4} = \pm\beta = \pm\sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}} \approx \pm 1,7994,$$

tra i quali sono accettabili solo quelli compresi in  $[0, 2]$  cioè

$$x_2 = \alpha = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}} \approx 0,8729, \quad x_4 = \beta = \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}} \approx 1,7994.$$

Sono quindi due i punti del grafico di  $h(x)$  di ordinata unitaria che sono soluzioni dell'equazione (10).

Per quanto osservato **inizialmente** circa il segno di  $h(x)$ , la funzione  $h$  presenta un minimo assoluto pari allo zero che viene raggiunto nei due estremi dell'intervallo. Per la ricerca dei minimi relativi calcoliamo invece la derivata prima

$$h'(x) = \cos[f(x)] \cdot f'(x) = \cos\left(x\sqrt{4 - x^2}\right) \cdot \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

dove si è ripresa la già calcolata espressione (2) di  $f'(x)$ . Lo studio del segno dei fattori non positivi implica

$$\cos\left(x\sqrt{4 - x^2}\right) \geq 0$$

per cui, considerando che l'argomento del coseno può essere un valore dell'intervallo  $[0, 2]$ , dev'essere

$$x\sqrt{4 - x^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Per risolvere tale disequazione ripercorriamo gli stessi passaggi algebrici svolti per la risoluzione dell'equazione (12) per cui abbiamo

$$x^2(4 - x^2) \leq \frac{\pi^2}{4} \implies x^4 - 4x^2 + \frac{\pi^2}{4} \geq 0.$$

Posto  $t = x^2$  la disequazione  $t^2 - 4t + \pi^2/4 \geq 0$  è risolta dalle

$$x^2 \leq \alpha^2 \quad \vee \quad x^2 \geq \beta^2$$

dalle quali discendono i valori

$$-\alpha \leq x \leq \alpha \quad \vee \quad x \leq -\beta \quad \vee \quad x \geq \beta$$

che, intersecati con  $[0, 2]$  implicano

$$\cos(x\sqrt{4 - x^2}) \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \alpha \quad \vee \quad \beta \leq x \leq 2.$$

Il fattore  $2 - x^2$  di  $h'(x)$  è evidentemente positivo quanto

$$2 - x^2 \geq 0 \implies -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

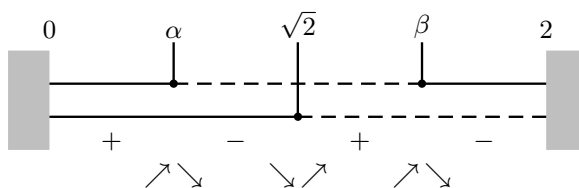


Fig. 5. Segno della derivata prima  $h'$ .

per cui il segno di  $h'(x)$  si ottiene combinando i due fattori come mostrato in fig. 5: si può concludere quindi che

$$h'(x) \geq 0 \iff x \in [0, \alpha] \cup [\sqrt{2}, \beta].$$

La funzione  $h$  presenta quindi un minimo relativo in corrispondenza di  $x_m = \sqrt{2}$  di ordinata  $h(\sqrt{2}) = \text{sen}[f(\sqrt{2})] = \text{sen } 2$  che si affianca al minimo assoluto nullo raggiunto agli estremi.

Nella figura 6 riportiamo un possibile andamento del grafico  $\Gamma'$  della funzione  $h(x)$  evidenziando, in particolare, i punti dove la funzione assume valori estremi.

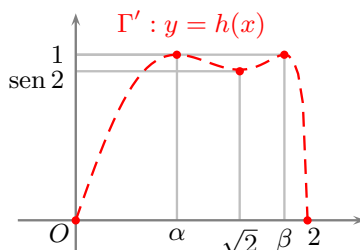


Fig. 6. Possibile grafico di  $h(x)$  con  $0 \leq x \leq 2$ .

Infine, la ricerca del numero delle soluzioni dell'equazione parametrica  $h(x) = k$  è equivalente alla ricerca delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = h(x) \\ y = k. \end{cases}$$

Noto quindi il grafico  $\Gamma'$  di  $y = h(x)$  e, interpretata l'equazione  $y = k$  come la rappresentazione di un fascio di rette orizzontali, possiamo osservare come quest'ultimo incontri  $\Gamma'$  in quattro punti solo se il fascio è compreso tra le ordinate del minimo relativo e del massimo assoluto ossia se  $k \in [\text{sen } 2, 1]$ .

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

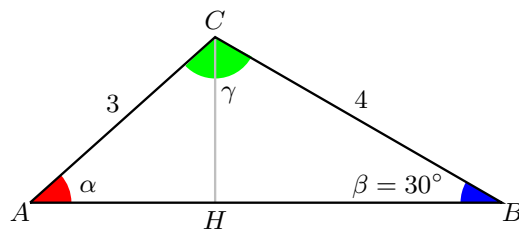
Gli elementi assegnati per il triangolo (fig. 1) cioè la lunghezza di due lati,

$$\overline{AC} = b = 3, \quad \overline{BC} = a = 4$$

e un angolo non compreso,  $\widehat{ABC} = \beta = 30^\circ$ , permettono di classificare questo come il caso Lato-Lato-Angolo (LLA) in cui, la risoluzione del triangolo può presentare anche due triangoli che soddisfano alle condizioni poste. Questa eventualità si verifica quando è soddisfatta la condizione

$$\overline{CH} < \overline{AC} < \overline{BC} \quad \text{ossia} \quad \overline{BC} \text{sen } \beta < \overline{AC} < \overline{BC}$$

essendo  $CH$  l'altezza di vertice  $C$ . Con i valori del problema tale relazione risulta effettivamente soddisfatta in quanto  $\overline{BC} \text{sen } \beta = 4 \text{sen } 30^\circ = 2$  e  $2 < 3 < 4$ .



**Fig. 1.** Il triangolo assegnato.

Difatti, applicando il teorema dei seni abbiamo

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \beta} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen } \alpha} \implies \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{a}{\text{sen } \alpha}$$

da cui ricaviamo

$$\text{sen } \alpha = \frac{4 \text{sen } \beta}{3} = \frac{4 \text{sen } 30^\circ}{3} \implies \text{sen } \alpha = \frac{2}{3}.$$

Quest'ultima fornisce due soluzioni accettabili cioè appartenenti all'intervallo  $[0, \pi]$ ,

$$\alpha_1 = \arcsen\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41,81^\circ \quad \text{oppure} \quad \alpha_2 = \pi - \arcsen\left(\frac{2}{3}\right) \approx 138,19^\circ$$

e, in corrispondenza, il terzo angolo è

$$\gamma_1 = \pi - \alpha_1 - \beta \approx 108,19^\circ, \quad \gamma_2 = \pi - \alpha_2 - \beta \approx 11,81^\circ.$$

Ovviamente, osservata la figura proposta dal testo, il triangolo cercato è il primo in quanto, manifestamente, l'angolo  $\alpha_1$  appare acuto.

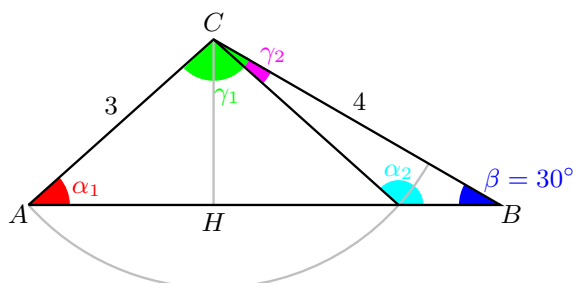
Volendo completare la risoluzione del triangolo, il terzo lato si ottiene riapplicando il teorema dei seni tramite la

$$\frac{c_1}{\text{sen } \gamma_1} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \implies c_1 = \frac{b \text{sen } \gamma_1}{\text{sen } \beta} \approx 5,7,$$

mentre per il secondo triangolo si ottiene

$$c_2 = \frac{b \text{sen } \gamma_2}{\text{sen } \beta} \approx 1,23.$$

Per completezza, nella figura 2 evidenziamo comunque entrambi i triangoli.



**Fig. 2.** I due triangoli soluzioni.

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

I poliedri regolari (detti pure *solidi platonici*) sono quei solidi che hanno per facce dei poligoni regolari tutti congruenti. Nel caso in esame le facce dovranno essere degli esagoni regolari che possiedono angoli di  $120^\circ$  ad ogni vertice. Per poter comunque generare un solido, in un suo vertice devono convergere almeno tre facce (e in tal modo formare un angoloide) e quindi si dovranno disporre almeno tre esagoni. D'altra parte in geometria solida, un importante teorema (peraltro

intuitivo) stabilisce che la somma degli angoli di tutte le facce uscenti da uno stesso vertice debba essere minore dell'angolo giro mentre la somma degli angoli di tre esagoni uscenti da un vertice comune risulta essere pari all'angolo giro. Si potranno quindi disporre gli esagoni in un piano (e difatti si può in tal modo ricoprire un piano con mattonelle esagonali) ma questi non potranno formare un angoloide e quindi un poliedro regolare.

Per una discussione più dettagliata si veda il quesito 2 dell'esame 2006 e il quesito 4 del 2009.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Per riconoscere il valore di  $n$  nello sviluppo di Newton del binomio  $(2a^2 - 3b^3)^n$  poniamo

$$A = 2a^2, \quad B = -3b^3 \quad (1)$$

e, in tal modo, possiamo riportare il binomio alla forma standard

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \quad (2)$$

dove  $n$  si riconosce come somma  $n = k + (n - k)$  degli esponenti di ciascun addendo dello sviluppo. Con le posizioni precedenti è quindi

$$a^2 = \frac{A}{2}, \quad b^3 = -\frac{B}{3}$$

per cui il termine  $-1080a^4b^9$  si riscrive

$$-1080a^4b^9 = -1080 \left(\frac{A}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{B}{3}\right)^3 = -1080 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) A^2 B^3 = 10 A^2 B^3.$$

Dal confronto con (2) riconosciamo quindi che

$$n = 2 + 3 = 5 \quad \text{e che} \quad k = 2 \quad \text{in quanto} \quad \binom{5}{2} = 10.$$

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

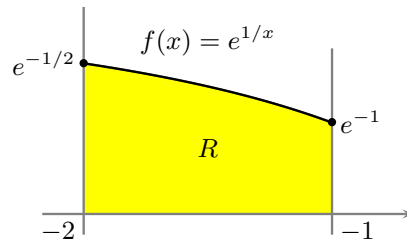
Innanzitutto svolgiamo uno studio approssimativo del grafico della funzione data  $f(x) = e^{1/x}$  limitandoci strettamente all'intervallo  $[-2, -1]$  così da individuare la regione  $R$ . In questo insieme la funzione  $f$  è evidentemente continua in quanto composta da funzioni continue e risulta pure positiva essendo un esponenziale. Poiché il segno della sua derivata prima è  $f'(x)$

$$f'(x) = e^{1/x} \cdot D\left[\frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x} < 0 \quad \implies \quad x \in [-2, -1],$$

essa è pure monotona strettamente decrescente. Volendo essere un po' più precisi calcoliamo pure la derivata seconda

$$\begin{aligned} f''(x) &= -D\left[x^{-2} e^{1/x}\right] = -\left[-2x^{-3} e^{1/x} + x^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x}\right] \\ &= \frac{2}{x^3} e^{1/x} - \frac{1}{x^4} e^{1/x} = \frac{1}{x^4} \cdot (2x - 1) e^{1/x} \end{aligned}$$

e poiché  $2x - 1 < 0$  se  $x \in [-2, -1]$  allora in questo intervallo  $f''(x) < 0$ . Un grafico approssimativo è rappresentato in fig. 1 dove si è pure evidenziata la regione  $R$  base del solido  $\Omega$ .



**Fig. 1.** Grafico di  $f(x)$  con  $-2 \leq x \leq -1$  e regione  $R$ .

Il volume di questo solido si ottiene risolvendo l'integrale

$$\mathcal{V}(\Omega) = \int_{-2}^{-1} \mathcal{A}(x) dx \quad (1)$$

essendo  $\mathcal{A}(x)$  l'area di una sua generica sezione perpendicolare all'asse  $x$ . Pertanto se consideriamo un generico valore di  $x \in [-2, -1]$  come fissato, la sezione ha come base il segmento di estremi  $(x, 0)$  e  $(x, f(x))$  e un'altezza  $h(x) = 1/x^2$  che è indipendente dalle ordinate  $y$  comprese tra 0 e  $f(x)$ . La figura geometrica di una generica sezione è quindi un rettangolo per cui l'area risulta

$$\mathcal{A}(x) = (f(x) - 0) \cdot h(x) = e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}$$

e, ripresa la (1), il volume è dato da

$$\mathcal{V}(\Omega) = \int_{-2}^{-1} e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} dx. \quad (2)$$

L'integrale indefinito associato a quest'ultimo

$$\int e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

si risolve con la sostituzione  $t = \frac{1}{x}$  che si traduce in termini differenziali in

$$dt = -\frac{1}{x^2} dx \quad \implies \quad -dt = \frac{dx}{x^2},$$

per cui

$$\int e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int e^t (-dt) = -\int e^t dt = -e^t + c = -e^{1/x} + c$$

cosicché (2) si risolve in

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Omega) &= \int_{-2}^{-1} e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \left[ -e^{1/x} \right]_{-2}^{-1} = -e^{-1} + e^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{e} - 1}{e} \approx 0,2387. \end{aligned}$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

Poiché il minimo comune multiplo di 2, 3 e 5 è  $m.c.m. = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  contiamo quanti numeri  $x$  tra 1 e 30 non sono divisibili né per 2, né per 3, né per 5. Se  $x \neq 2n$  con  $n \in \mathbb{N}$  rimangono i 15 numeri dispari

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.$$

Da questi vanno esclusi i multipli di 3 per cui

$$1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29.$$

Infine escludiamo i numeri  $x \neq 5n$  con  $n \in \mathbb{N}$  e otteniamo l'insieme  $A$

$$A = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \quad (1)$$

che ne contiene 8.

Se ora consideriamo i numeri tra 31 e 60, questi si ottengono dai precedenti  $\{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$  sommando ad essi 30. Allora, nel caso che siano multipli di 2, 3 o 5, lo saranno pure i numeri di questo intervallo in quanto 30 contiene come fattori 2, 3 e 5: per esempio  $51 = 21 + 30$  ma  $51 = 3(7 + 10)$ . I valori dell'insieme  $A$  non potranno essere multipli di 2, 3 e 5 ( $41 = 11 + 30$  ma 11 non possiede fattori comuni con 30) per cui ritroveremo altri 8 numeri che soddisfano alla proprietà richiesta.

In generale, indicato con  $x$  un elemento di  $A$ , i numeri  $y$  non divisibili per 2, 3 o 5, si potranno scrivere come

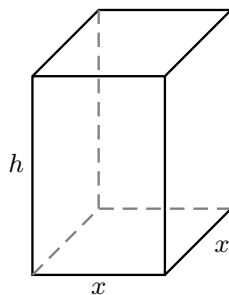
$$x \in A, \quad y = x + m \cdot 30$$

con  $m \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq m \leq 200$  in quanto il numero più grande tra questi è  $y_{max} = 6000$  per cui esistono  $6000/30 = 200$  intervalli multipli interi di  $A$ . Il numero totale  $n_{tot}$  di valori richiesti è quindi pari a

$$n_{tot} = 8 \cdot 200 = 1600.$$

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Poniamo  $V_0 = 5$  L e sia  $x$  il lato della base quadrata della lattina e  $h$  la sua altezza (fig. 1).



**Fig. 1.** Lattina a base quadrata.

Il volume  $\mathcal{V}_0$  si esprime come

$$\mathcal{V}_0 = x^2 \cdot h \quad (1)$$

e, in quanto costante, la lunghezza  $x$  del lato potrà assumere qualsiasi valore positivo,  $x > 0$ : di conseguenza, se  $x \rightarrow 0$ , l'altezza dovrà tendere all'infinito cioè  $h \rightarrow +\infty$  e viceversa,  $x \rightarrow +\infty$  implica  $h \rightarrow 0$ .

La superficie totale è data dalla somma delle aree delle due basi,  $2x^2$ , con la superficie laterale pari a  $4 \cdot hx$  per cui

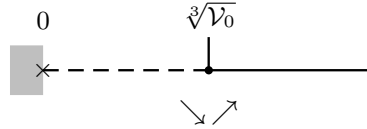
$$\mathcal{S} = 2x^2 + 4hx \quad (2).$$

La precedente appare essere una funzione di due variabili ma potremo ridurla ad una sola variabile ricavando  $h$  dalla (1) e sostituendola in (2). Abbiamo quindi

$$\mathcal{S} = 2x^2 + 4x \left( \frac{\mathcal{V}_0}{x^2} \right) = 2x^2 + \frac{4\mathcal{V}_0}{x}, \quad x > 0. \quad (3)$$

La ricerca del minimo di tale funzione passa per lo studio del segno della derivata prima  $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{S}' = 4x + 4\mathcal{V}_0 \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \frac{4(x^3 - \mathcal{V}_0)}{x^2}$$



**Fig. 2.** Segno di  $S'$ .

per cui  $S' \geq 0$  implica

$$x^3 - \mathcal{V}_0 \geq 0 \implies x \geq \sqrt[3]{\mathcal{V}_0}.$$

La rappresentazione grafica di tale segno (fig. 2) evidenzia che il minimo (assoluto) della funzione (3) è raggiunto in corrispondenza del valore del lato

$$x_m = \sqrt[3]{\mathcal{V}_0} \quad \text{che equivale a} \quad x_m^3 = \mathcal{V}_0. \quad (4)$$

Di conseguenza, espresso il volume  $\mathcal{V}_0$  in  $\text{mm}^3$  cioè

$$\mathcal{V}_0 = 5 \text{ L} = 5 \text{ dm}^3 = 5 \times (10^2 \text{ mm})^3 = 5 \times 10^6 \text{ mm}^3,$$

la lunghezza del lato di base è

$$x_m = \sqrt[3]{\mathcal{V}_0} = \sqrt[3]{5 \times 10^6} = 170,997 \text{ mm} \approx 171 \text{ mm},$$

mentre per dedurre l'altezza vanno riprese la (1) e (4): da queste ritroviamo il valore

$$h = \frac{\mathcal{V}_0}{x_m^2} = \frac{x_m^3}{x_m^2} = x_m \approx 171 \text{ mm}$$

per cui il parallelepipedo assume la forma di un cubo.

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Il valor medio  $\bar{f}$  di una funzione  $f$  continua in un intervallo  $[a, b]$  è rappresentato dall'integrale definito

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

L'intervallo dato dal testo presuppone implicitamente che sia  $k > 0$  e poiché il valor medio è  $\bar{f} = 9$ , l'espressione precedente (1) si riscrive come

$$9 = \frac{1}{k-0} \int_0^k x^3 dx. \quad (2)$$

L'integrale indefinito associato si risolve facilmente in quanto

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

e (2) diviene

$$9 = \frac{1}{k} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^k \implies 9 = \frac{1}{k} \cdot \left[ \frac{k^4}{4} - 0 \right] \implies 9 = \frac{k^3}{4}.$$

L'unica soluzione reale dell'equazione

$$k^3 = 9 \cdot 4 \implies k^3 = 36$$

è  $k = \sqrt[3]{36}$  ed essendo positiva risulta accettabile.

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Il polinomio richiesto deve rientrare nella forma generale

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (1)$$

mentre le condizioni cui deve soddisfare sono

$$\begin{cases} P(2) = 3 \\ P(3) = 3 \\ P(1) = 0 \\ P'(2) = 0 \\ P'(3) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Le prime tre sono immediate ed esprimono, geometricamente, l'appartenenza dei punti  $(2, 3)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(1, 0)$  al grafico di  $P(x)$  mentre le ultime due traducono l'annullarsi della derivata nei punti di massimo di ascissa 2 e 3 in quanto è nota la derivabilità in  $\mathbb{R}$  dei polinomi. Poiché il calcolo della derivata prima di  $P(x)$  fornisce  $P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ , il sistema (2) si esplicita in

$$\begin{cases} 16a + 8b + 4c + 2d + e = 3 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 81a + 27b + 9c + 3d + e = 3 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32a + 12b + 4c + d = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 108a + 27b + 6c + d = 0 & (7) \end{cases}$$

e non resta che dedurre i valori incogniti di  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  ed  $e$  per poi calcolare  $P(4)$ .

Pertanto, sottratta la (3) dalla (4) per eliminare l'incognita  $e$ , formalmente (4)–(3), otteniamo il sistema ridotto

$$\begin{cases} 65a + 19b + 5c + d = 0 & (8) \\ 32a + 12b + 4c + d = 0 & (9) \\ 108a + 27b + 6c + d = 0 & (10) \end{cases}$$

dal quale, ancora per sottrazione, (8)–(9), e (10)–(8),

$$\begin{cases} 33a + 7b + c = 0 & (11) \\ 43a + 8b + c = 0. & (12) \end{cases}$$

La combinazione (12)–(11) fornisce

$$10a + b = 0 \implies b = -10a$$

e quindi dalla (11) abbiamo

$$33a - 70a + c = 0 \implies c = 37a.$$

Introdotti questi risultati nella (8) discende

$$65a - 190a + 185a + d = 0 \implies d = -60a,$$

e inseriti questi valori in (5)

$$a - 10a + 37a - 60a + e = 0 \implies e = 32a.$$

Infine sfruttando la (3) otteniamo

$$16a - 80a + 148a - 120a + 32a = 3 \implies -4a = 3 \implies a = -\frac{3}{4}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} b &= -10\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{2}, & c &= 37\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{111}{4}, \\ d &= -60\left(-\frac{3}{4}\right) = 45, & e &= 32\left(-\frac{3}{4}\right) = -24. \end{aligned}$$

Il polinomio (1) è quindi

$$P(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^3 - \frac{111}{4}x^2 + 45x - 24$$

e il suo valore in  $x = 4$  risulta

$$\begin{aligned} P(4) &= -\frac{3}{4} 4^4 + \frac{15}{2} 4^3 - \frac{111}{4} 4^2 + 45 \cdot 4 - 24 \\ &= -192 + 480 - 444 + 180 - 24 = 0. \end{aligned}$$

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Le condizioni che determinano il dominio della funzione di equazione rappresentativa

$$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x + 5)} \quad (1)$$

si traducono nella disequazione  $x - 5 > 0$  necessaria per poter calcolare il logaritmo e nell'ulteriore condizione  $3 - \log_2(x + 5) \geq 0$  per l'esistenza della radice quadrata. Il sistema da risolvere è quindi

$$\begin{cases} x + 5 > 0 \\ 3 - \log_2(x + 5) \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

La prima è immediata,  $x > -5$  mentre la seconda implica

$$-\log_2(x + 5) \geq -3 \implies \log_2(x + 5) \leq 3.$$

Riscritto il secondo membro come  $3 = \log_2(2^3)$ , la monotonia crescente del logaritmo a base 2 implica che

$$\log_2(x + 5) \leq \log_2(2^3) \implies x + 5 \leq 2^3 \implies x \leq 3.$$

In definitiva il sistema (2) si riduce a

$$\begin{cases} x > -5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

per cui il dominio della funzione (1) è l'intervallo  $] -5, 3]$ .

**Quesito n. 10: soluzione.** (testo del quesito)

Le soluzioni dell'equazione esponenziale

$$\left( \frac{1}{5} (x^2 - 10x + 26) \right)^{x^2 - 6x + 1} = 1 \quad (1)$$

si deducono tenendo innanzitutto presente la condizione che garantisce significato alla scrittura

$$[f(x)]^{g(x)}$$

dove dev'essere  $f(x) > 0$ . Nel caso proposto tale condizione diventa

$$\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26) > 0 \implies x^2 - 10x + 26 > 0$$

e poiché il discriminante dell'equazione associata è  $\Delta/4 = 25 - 26 < 0$ , ne segue che il primo membro della (1) è sempre definito e positivo. Per l'iniettività della funzione logaritmo,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(x_2) = \ln(x_1) \iff x_2 = x_1$$

possiamo considerare il logaritmo di entrambi i membri della (1) e ottenere

$$(x^2 - 6x + 1) \ln \left[ \frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26) \right] = 0$$

dove, in base alla proprietà  $\ln(a^b) = b \ln a$  si è posto a fattore l'esponente dell'argomento del logaritmo. Deduciamo quindi

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \implies x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2},$$

oppure

$$\ln \left[ \frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26) \right] = 0 \implies \frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26) = 1.$$

Quest'ultima si riduce all'equazione

$$x^2 - 10x + 26 = 5 \implies x^2 - 10x + 21 = 0$$

che ha per soluzioni

$$x_{3,4} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 7. \end{matrix}$$

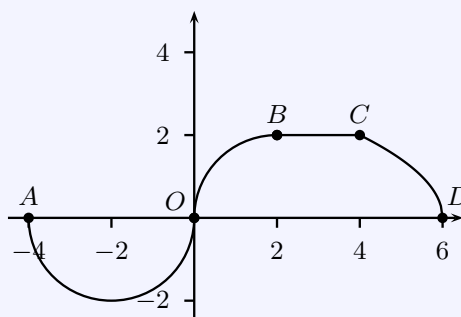
In definitiva l'equazione (1) ha per soluzioni  $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ ,  $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $x_3 = 3$  e  $x_4 = 7$ .

# ESAME 2014 PNI

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

## • Problema n. 1

Sia  $g(x)$  una funzione continua sull'intervallo chiuso  $[-4, 6]$ . Il grafico di  $g(x)$ , disegnato a lato, passa per i punti  $A(-4; 0)$ ,  $O(0; 0)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(4; 2)$ ,  $D(6; 0)$  e consiste della semicirconferenza di diametro  $AO$ , dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi  $O$  e  $B$ , del segmento  $BC$  e dell'arco  $CD$  di una parabola avente per asse di simmetria l'asse  $x$ .



1. Si dica, giustificando la risposta, se  $g(x)$  è derivabile nei punti  $A$ ,  $O$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .
2. Posto  $f(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$ , si calcolino:  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(4)$ ,  $f(6)$ .
3. Per quali valori di  $x \in [-4, 6]$ ,  $f(x)$  è positiva, negativa o nulla? E per quali  $x$  è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda  $f''(x)$ ?
4. La funzione  $f(x)$  presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di  $f(x)$ ?

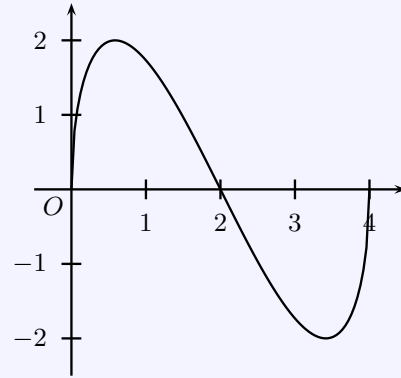
Soluzione

## • Problema n. 2

Sia  $f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$ .

1. Di seguito è disegnato il grafico  $\Gamma$  di  $f(x)$ . Si dimostri che  $(2; 0)$  è centro di simmetria di  $\Gamma$  e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a  $\Gamma$  forma con la direzione positiva dell'asse  $x$ .

2. Si dimostri che, qualunque sia  $t$ ,  $0 < t < 2$ , le rette tangenti a  $\Gamma$  nei suoi punti di ascisse  $2 + t$  e  $2 - t$  sono parallele. Esistono rette tangenti a  $\Gamma$  che siano parallele alla retta  $21x + 10y + 31 = 0$ ? E che siano parallele alla retta  $23x + 12y + 35 = 0$ ?



3. Si calcoli l'area della regione compresa tra  $\Gamma$  e l'asse  $x$ .
4. Sia  $h(x) = \text{sen}(f(x))$ . Quanti sono i punti del grafico di  $h(x)$  di ordinata 1? Il grafico di  $h(x)$  presenta punti di minimo, assoluti o relativi?

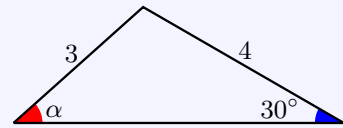
Per quali valori reali di  $k$  l'equazione  $h(x) = k$  ha 4 soluzioni distinte?

Qual è il valore di  $\int_0^4 h(x) dx$ ?

Soluzione

### Questionario

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di  $\alpha$ ?



Soluzione

2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.

Soluzione

3. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:

- esattamente una pallina è rossa,
- le tre palline sono di colori differenti.

Soluzione

4. Un solido  $\Omega$  ha per base la regione  $R$  delimitata dal grafico di  $f(x) = e^{1/x}$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[-2, -1]$ . In ogni punto di  $R$  di ascissa  $x$ , l'altezza del solido è data da  $h(x) = \frac{1}{x^2}$ . Si calcoli il volume del solido.

Soluzione

5. In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma  $180^\circ$ .

Soluzione

6. Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio  $\sqrt{3}$ .

Soluzione

7. Se  $f'(x) = \ln x - x + 2$ , per quale dei seguenti valori approssimati di  $x$ ,  $f$  ha un minimo relativo?

(A) 5,146      (B) 3,146      (C) 1,000      (D) 0,159      (E) 0.

Soluzione

8. La "zara" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.

Soluzione

9. Le lettere  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo  $\aleph_0$  (*aleph-zero*) indica la cardinalità di  $\mathbb{N}$ . Gli insiemi  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  hanno anch'essi cardinalità  $\aleph_0$ ? Si motivi la risposta.

Soluzione

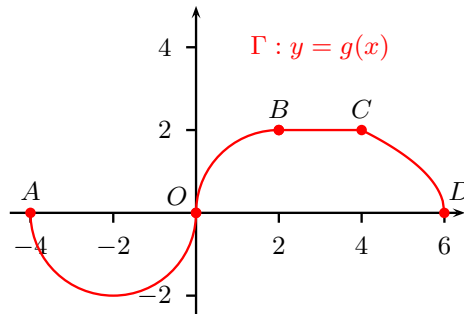
10. Si stabilisca per quali valori reali di  $a$  e  $b$ , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + bx} - 2}{x} = 1.$$

Soluzione

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

1. Un'analisi del grafico  $\Gamma$  della funzione  $g(x)$  nell'intervallo  $[-4, 6]$ , fig. 1, permette di rispondere con relativa immediatezza alla prima domanda in quanto sono note le proprietà delle curve componenti.



**Fig. 1.** Grafico  $\Gamma$  di  $g(x)$ .

Difatti considerando il significato geometrico di derivata di una funzione, sappiamo che una funzione è derivabile in un punto quando in tale punto possiede una retta tangente che non sia verticale ossia parallela all'asse  $y$ .

In base a ciò possiamo quindi affermare che in  $A$  non esiste la derivata (destra) in quanto la retta tangente è, appunto, parallela all'asse  $y$  e ciò avviene perché  $\Gamma$  è formato da una semicirconferenza di diametro  $AO$ . Per lo stesso motivo  $g$  non è derivabile pure in  $O$  e in  $D$ . In quest'ultimo caso la retta tangente è parallela a  $y$  in quanto il punto  $D$  giace sull'asse  $x$  che è asse di simmetria della parabola della quale si considera l'arco  $CD$ :  $D$  è quindi il vertice della parabola.

Nel punto  $B$  la retta tangente in un suo intorno sinistro è orizzontale ( $OB$  è un quadrante di circonferenza) e lo è, evidentemente, anche in quello destro: la funzione  $g$  sarà perciò derivabile e la derivata sarà nulla.

Infine non potrà esserlo in  $C$  in quanto la tangente nell'intorno sinistro è orizzontale ma in un intorno destro esiste una retta tangente con coefficiente angolare negativo: il punto  $C$  è pertanto un punto angoloso avendo rispettivamente una retta tangente destra distinta da quella sinistra.

In definitiva l'unico punto di derivabilità per la  $g$  tra quelli citati nel quesito è  $B$ .

2. Il calcolo dei valori richiesti di

$$f(x) = \int_{-4}^x g(t) dt \quad (1)$$

si può ottenere evitando di scrivere esplicitamente la  $g(x)$  per poi procedere successivamente all'integrazione. Sfruttiamo a tal fine la conoscenza di  $\Gamma$  e il significato geometrico di integrale definito come l'area, con opportuno segno, del trapezoide formato dalla funzione, dall'asse  $x$  e dalle rette che individuano gli estremi di integrazione.

In particolare risulta

$$f(-4) = \int_{-4}^{-4} g(t) dt = 0 \quad (2)$$

per la proprietà dell'annullarsi della funzione integrale al coincidere degli estremi di integrazione.

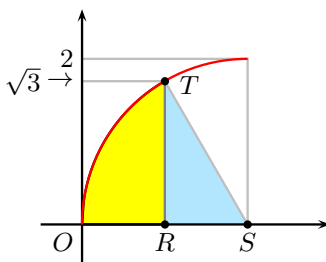
Il secondo valore richiesto,  $f(0)$ , esprime l'opposto dell'area della semicirconferenza di diametro  $\overline{AO} = 4$  in quanto per  $x \in [-4, 0]$  risulta  $g(x) \leq 0$ : abbiamo quindi

$$f(0) = \int_{-4}^0 g(t) dt = -\mathcal{A}(\text{semicfr}) = -\frac{\pi \cdot 2^2}{2} = -2\pi. \quad (3)$$

Per determinare  $f(1)$  conviene innanzitutto suddividere l'integrale richiesto in due parti e tener presente il risultato (3)

$$f(1) = \int_{-4}^1 g(t) dt = \int_{-4}^0 g(t) dt + \int_0^1 g(t) dt = -2\pi + \int_0^1 g(t) dt \quad (4)$$

e dove l'ultimo integrale esprime l'area della regione evidenziata in giallo nella figura 2.



**Fig. 2.** Particolare della funzione  $g(x)$  e trapezoide.

Per determinarla notiamo che l'ampiezza dell'angolo  $\angle RST = \angle OST$  è di  $\pi/3$  in quanto  $\cos(\angle RST) = \overline{RS}/\overline{ST} = 1/2$ . Ricordando che l'area di un settore

circolare che insiste su un angolo al centro di  $\alpha$  radianti è  $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\alpha r^2$ , segue che

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t) dt &= \mathcal{A}(ORT) = \mathcal{A}(\text{settore } OST) - \mathcal{A}(\triangle RST) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \overline{OS}^2 - \frac{1}{2} \overline{RS} \cdot \overline{RT},\end{aligned}$$

e poiché  $\overline{RT} = \overline{ST} \sin(\angle RST) = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$  otteniamo

$$\int_0^1 g(t) dt = \frac{\pi}{6} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e quindi per (4)

$$f(1) = -2\pi + \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -5,0548. \quad (5)$$

Il calcolo di  $f(2)$  è immediato in quanto, suddividendo come sopra l'integrale che lo esprime

$$f(2) = \int_{-4}^2 g(t) dt = \int_{-4}^0 g(t) dt + \int_0^2 g(t) dt = -2\pi + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = -\pi \quad (6)$$

in quanto l'integrale di estremi 0 e 2 rappresenta nient'altro che l'area di un quarto di cerchio di raggio 2.

Allo stesso modo,

$$f(4) = \int_0^4 g(t) dt = \int_0^2 g(t) dt + \int_2^4 g(t) dt = -\pi + (4-2)2 = 4 - \pi \quad (7)$$

rappresentando l'integrale di estremi 2 e 4 l'area del quadrato sotteso dal segmento  $BC$ .

Infine il valore  $f(6)$  discende dalla suddivisione

$$f(6) = \int_0^6 g(t) dt = \int_0^4 g(t) dt + \int_4^6 g(t) dt = 4 - \pi + \int_4^6 g(t) dt. \quad (8)$$

Quest'ultimo integrale si può calcolare utilizzando la formula di Archimede per il segmento parabolico nella forma

$$\mathcal{A}(\text{segPar}) = \frac{1}{6}|a| \cdot |x_2 - x_1|^3 \quad (9)$$

dove  $a$  rappresenta il coefficiente del termine quadratico della parabola mentre  $x_1, x_2$  sono le ascisse, ma nel nostro caso le ordinate, di intersezione della retta che definisce il segmento con la parabola. Poiché la parabola deve rientrare nella forma

$$x = ay^2 + 6$$

in quanto il vertice possiede coordinate  $(6, 0)$  e appartiene all'asse  $x$ , la condizione di appartenenza del punto  $(4, 2)$  permette di determinare il parametro  $a$  incognito,

$$x = ay^2 + 6 \implies 4 = 4a + 6 \implies a = -\frac{1}{2}.$$

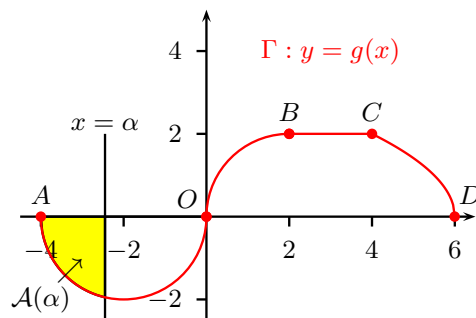
L'integrale in (8) rappresenta la metà dell'area del segmento parabolico per cui applicando la (9)

$$\int_4^6 g(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left| -\frac{1}{2} \right| \cdot |2 - (-2)|^3 = \frac{1}{24} \cdot 4^3 = \frac{8}{3}$$

e, in definitiva,

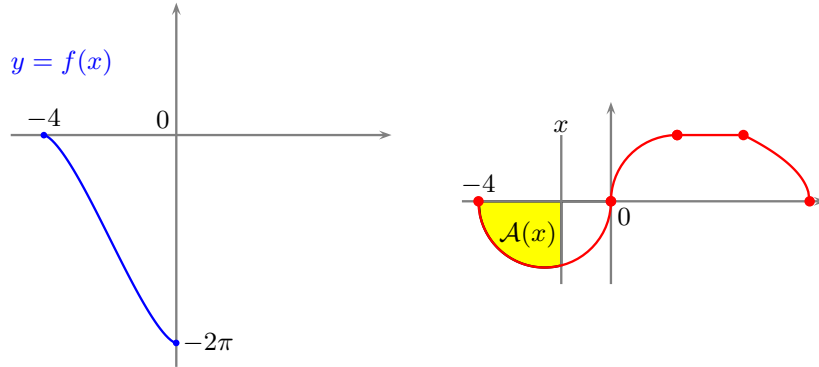
$$f(6) = 4 - \pi + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} - \pi \approx 3,5251. \quad (10)$$

3. Riprendiamo il grafico  $\Gamma$  di  $g(x)$  e notiamo che, per ottenere l'andamento qualitativo di  $f(x)$ , dovremo studiare come varia l'area della figura compresa tra  $\Gamma$ , l'asse delle  $x$  e dalla retta  $x = \alpha$  con  $-4 \leq \alpha \leq 6$  (fig. 3).



**Fig. 3.** Grafico  $\Gamma$  e area, variabile, del trapezoide.

Tenendo ovviamente presenti i valori calcolati nel punto precedente e in base al significato geometrico di integrale definito, l'area  $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(x)$  del trapezoide deve aumentare per  $\alpha$  crescente in  $[-4, 0]$  ma, poiché la  $g(x) \leq 0$ , la funzione  $f(x) = -\mathcal{A}(x)$  non potrà che diminuire per raggiungere, quando  $x = 0$ , il valore già calcolato  $f(0) = -\mathcal{A}(0) = -2\pi$ . In termini formali, poiché  $f'(x) = g(x) \leq 0$ ,



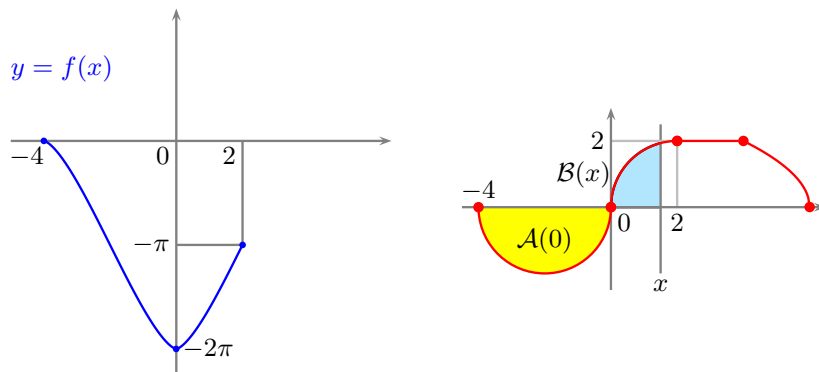
**Fig. 4.** Grafico (qualitativo) di  $f(x)$  con  $-4 \leq x \leq 0$ .

la funzione  $f$  dev'essere decrescente: il suo grafico in tale intervallo è rappresentato qualitativamente in fig. 4.

Nel successivo intervallo  $]0, 2]$  la funzione  $g$  è positiva e a  $f(0)$  si aggiunge l'area  $\mathcal{B}(x) \geq 0$  del trapezoide compreso nel primo quadrante:  $f$  non può quindi che aumentare e ciò accade anche per tutte le  $x$  comprese tra 0 e 6 dove  $f$  ha derivata prima positiva. In ogni caso, per

$$f(x) = f(0) + \mathcal{B}(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt, \quad 0 < x \leq 2$$

e, per  $x = 2$  assume il valore (6) già calcolato  $f(2) = -\mathcal{A}(0) + \mathcal{B}(2) = -\pi$ . Il grafico è rappresentato in fig. 5.



**Fig. 5.** Grafico (qualitativo) di  $f(x)$  con  $-4 \leq x \leq 2$ .

Se  $x \in ]2, 4]$  possiamo interpretare la  $f$  come espressa dalla somma

$$f(x) = -\mathcal{A}(0) + \mathcal{B}(2) + \mathcal{C}(x), \quad 2 < x \leq 4$$

essendo  $\mathcal{C}(x)$  l'area del rettangolo con il lato di base di lunghezza  $x - 2$  e altezza 2 ossia

$$f(x) = -\mathcal{A}(0) + \mathcal{B}(2) + 2(x - 2) = -2\pi + \pi + 2(x - 2). \quad (11)$$

Tale relazione è evidentemente lineare per cui il corrispondente grafico sarà rappresentato da un segmento di retta che collega il punto  $(2, f(2)) \equiv (2, -\pi)$  con  $(4, f(4)) \equiv (4, 4 - \pi)$  (fig. 6). Poiché  $f(4) = 4 - \pi > 0$  in  $]2, 4]$  la funzione  $f$  si annulla in un punto che deduciamo dalla (11) ponendo

$$f(x) = 0 \implies -\pi + 2x - 4 = 0 \implies x = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

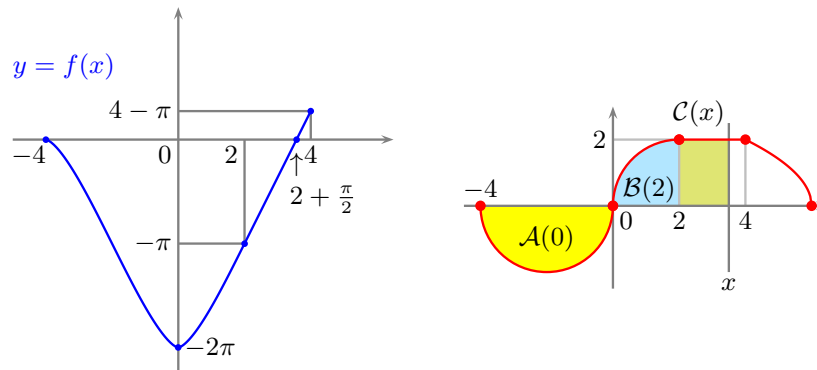


Fig. 6. Grafico (qualitativo) di  $f(x)$  con  $-4 \leq x \leq 4$ .

Infine se  $x \in ]4, 6]$  abbiamo che

$$f(x) = -\mathcal{A}(0) + \mathcal{B}(2) + \mathcal{C}(4) + \mathcal{D}(x), \quad 4 < x \leq 6$$

e  $f$  è ancora crescente fino al suo valore massimo che, per la (10), vale  $f(6) = \frac{20}{3} - \pi \approx 3,5251$  (fig. 7).

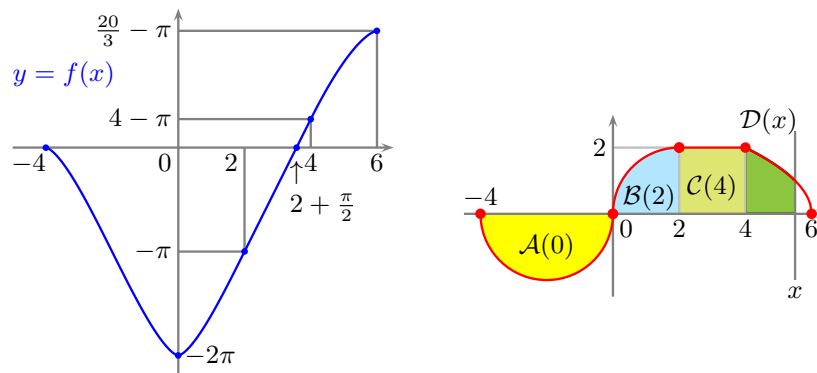


Fig. 7. Grafico (qualitativo) di  $f(x)$  con  $-4 \leq x \leq 6$ .

Il segno di  $f$  è quindi riassunto di seguito

$$\begin{aligned} f(x) > 0 & \text{ per } 2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6, \\ f(x) \leq 0 & \text{ per } -4 \leq x \leq 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Il segno della derivata seconda, là dove esiste tale funzione, lo possiamo dedurre osservando l'andamento della  $g(x)$ . In particolare, poiché  $g$  è decrescente in

$$x \in ]-4, -2[ \cup ]4, 6[ \quad \text{risulta} \quad g'(x) = f''(x) < 0$$

mentre  $g$  è crescente in

$$x \in ]-2, 0[ \cup ]0, 2[ \quad \implies \quad g'(x) = f''(x) > 0.$$

Abbiamo invece  $g'(-2) = f''(-2) = 0$  in quanto  $g$  possiede tangente orizzontale in  $x = -2$  mentre, poiché nei punti  $x = -4, 0, 4, 6$ , la  $g$  non è derivabile per cui nemmeno esiste la  $f''$ . Infine

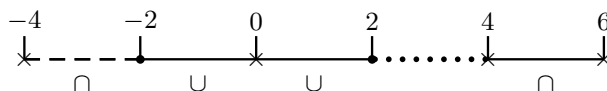
$$x \in ]2, 4[ \quad f''(x) = g'(x) = 0$$

essendo  $g$  pari ad una costante e poiché

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g'(x) = 0$$

in quanto la tangente sinistra in  $x = 2$  è orizzontale come quella destra, risulta pure  $f''(2) = g'(2) = 0$ .

4. Riassumiamo questi risultati nel grafico di fig. 8 evidenziando di conseguenza la disposizione delle concavità/convessità: in particolare, per  $x \in [2, 4[$ , la funzione, come detto, risulta un segmento di retta. Un grafico finale coerente con queste ultime osservazioni è rappresentato dalla fig. 9: la funzione presenta quindi un minimo assoluto in  $x = 0$  dove assume il valore  $f(0) = -2\pi$  mentre il massimo assoluto è raggiunto nell'estremo destro del dominio dove  $f(6) = \frac{20}{3} - \pi$ .



**Fig. 8.** Segno della derivata seconda  $f''$ .

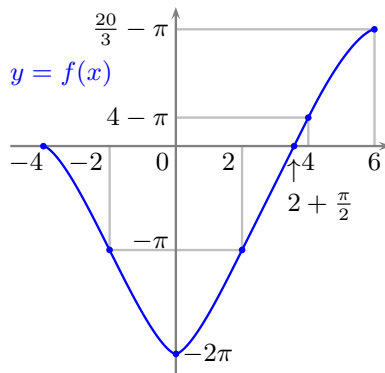


Fig. 9. Grafico (qualitativo) di  $f(x)$  con  $-4 \leq x \leq 6$ .

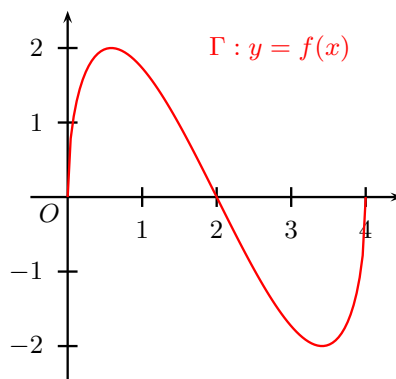


Fig. 1. Grafico  $\Gamma$  di  $f(x)$ .

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

1. Il grafico  $\Gamma$  (fig. 1) della funzione  $f : [0, 4] \rightarrow [-2, 2]$  di equazione

$$f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2} \tag{1}$$

è simmetrico rispetto al punto  $(2, 0)$ . Per dimostrarlo richiamiamo le equazioni di una simmetria centrale di centro  $(a, b)$  ossia

$$\sigma : \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b. \end{cases}$$

Queste diventano, nel nostro caso,

$$\sigma : \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = -y \end{cases} \tag{2}$$

per cui sostituendo le inverse

$$\sigma^{-1} : \begin{cases} x = -x' + 4 \\ y = -y' \end{cases} \quad (3)$$

in (1) abbiamo

$$-y' = [2 - (-x' + 4)]\sqrt{4(-x' + 4) - (-x' + 4)^2}$$

dalla quale discende

$$-y' = (x' - 2)\sqrt{-4x' + 16 - (x')^2 - 16 + 8x'}$$

e quindi

$$y' = (2 - x')\sqrt{4x' - (x')^2} \quad (4)$$

che, essendo identica alla (1), conferma come l'insieme  $\Gamma$  sia unito rispetto alla trasformazione (2).

L'angolo richiesto discende dal calcolo della derivata prima  $f'(x)$  e dalla sua interpretazione geometrica quale tangente goniometrica dell'angolo che la retta tangente in un punto ad una curva determina con l'asse delle ascisse. Il calcolo fornisce

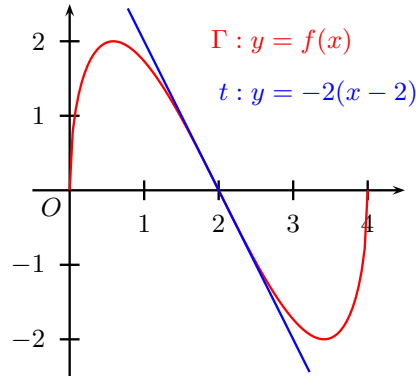
$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \cdot \sqrt{4x - x^2} + (2 - x) \cdot \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} \\ &= -\sqrt{4x - x^2} + \frac{(2 - x)^2}{\sqrt{4x - x^2}} \\ &= \frac{-4x + x^2 + 4 + x^2 - 4x}{\sqrt{4x - x^2}} \\ &= \frac{2(x^2 - 4x + 2)}{\sqrt{4x - x^2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

con la condizione che sia  $0 < x < 4$ : posto  $\operatorname{tg} \alpha = f'(2)$  discende

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(2^2 - 4 \cdot 2 + 2)}{\sqrt{4 \cdot 2 - 2^2}} = -2 \quad (6)$$

e l'equazione della tangente è  $t : y = -2(x - 2)$  (fig. 2). L'angolo richiesto si deduce dall'inversa e vale

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-2) \approx -63,4348^\circ = -63^\circ 26' 06''.$$



**Fig. 2.** Grafico  $\Gamma$  di  $f(x)$  e retta tangente in  $(2, 0)$ .

2. Per dimostrare il parallelismo delle rette tangenti a  $\Gamma$  nei punti di ascissa  $2 - t$  e  $2 + t$  dovremo calcolare  $f'(2 - t)$  e  $f'(2 + t)$  e verificare che sono uguali. Difatti, dalla (5) discende

$$\begin{aligned} f'(2 - t) &= \frac{2[(2 - t)^2 - 4(2 - t) + 2]}{\sqrt{4(2 - t) - (2 - t)^2}} = \frac{2(4 + t^2 - 4t - 8 + 4t + 2)}{\sqrt{8 - 4t - 4 - t^2 + 4t}} \\ &= \frac{2(t^2 - 2)}{\sqrt{4 - t^2}}, \quad 0 < t < 2 \end{aligned}$$

così come

$$\begin{aligned} f'(2 + t) &= \frac{2[(2 + t)^2 - 4(2 + t) + 2]}{\sqrt{4(2 + t) - (2 + t)^2}} = \frac{2(4 + t^2 + 4t - 8 - 4t + 2)}{\sqrt{8 + 4t - 4 - t^2 - 4t}} \\ &= \frac{2(t^2 - 2)}{\sqrt{4 - t^2}}, \quad 0 < t < 2 \end{aligned}$$

e quindi  $f'(2 - t) = f'(2 + t)$  come volevasi.

Le rette assegnate  $r_1 : 21x + 10y + 31 = 0$  e  $r_2 : 23x + 12y + 35 = 0$  possiedono rispettivamente i coefficienti angolari

$$m_1 = -\frac{21}{10}, \quad m_2 = -\frac{23}{12}$$

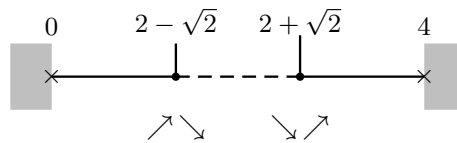
entrambi negativi. Se quindi esisteranno rette parallele a  $r_1$  e  $r_2$  e tangenti a  $\Gamma$  queste dovranno appartenere all'arco di  $\Gamma$  compreso tra il massimo e il minimo, dove la derivata prima  $f'(x) < 0$ . Determiniamo innanzitutto tale insieme studiando il segno di  $f'$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x + 2)}{\sqrt{4x - x^2}} \leq 0 \quad \implies \quad x^2 - 4x + 2 \leq 0$$

in quanto il denominatore è positivo come il fattore 2. Le soluzioni dell'equazione associata sono  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$  per cui

$$x^2 - 4x + 2 \leq 0 \implies 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2} \quad (7)$$

e di conseguenza  $x_1 = 2 - \sqrt{2}$  e  $x_2 = 2 + \sqrt{2}$  sono rispettivamente le ascisse del massimo assoluto e del minimo assoluto della funzione  $f$  tra le quali  $f$  è decrescente.



**Fig. 3.** Segno della derivata prima  $f'$ .

In base quindi all'andamento di  $\Gamma$  osserviamo ora che al variare di  $x$  a partire dall'ascissa  $x_1$ , il coefficiente angolare assume inizialmente il valore nullo e quindi dovrà gradualmente diminuire per raggiungere il suo minimo negativo in  $x = 2$ . Dovrà poi aumentare, riprendendo gli stessi valori, per annullarsi infine quando  $x = x_2$ . Pertanto se il minimo, come calcolato in (6), è pari a  $-2$ , allora  $r_1$  non potrà essere parallela a qualche retta di  $\Gamma$  in quanto  $m_1 < -2$ ,

$$m_1 = -\frac{21}{10} < -2 \implies -21 < -20 \implies 21 > 20.$$

Il viceversa accade per  $r_2$  in quanto il suo coefficiente angolare risulta

$$m_2 = -\frac{23}{12} > -2 \implies -23 > -24 \implies 23 < 24 :$$

per la simmetria già evidenziata, dovranno quindi esistere due rette che soddisfano alle condizioni poste.

La formalizzazione dell'approccio intuitivo appena esposto comporta lo studio della funzione  $f'(x)$  in modo da determinare formalmente il suo minimo e quindi confrontarlo con  $m_1$  e  $m_2$ . A tal fine studiamo il segno della sua derivata prima che è la derivata seconda della funzione originaria  $f$ . Dalla (5) abbiamo

$$\begin{aligned} f''(x) &= D[f'(x)] \\ &= 2 \cdot \left[ (2x - 4)\sqrt{4x - x^2} - (x^2 - 4x + 2) \cdot \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} \right] \cdot \frac{1}{4x - x^2} \\ &= \frac{2}{4x - x^2} \left[ \frac{(2(x - 2)(4x - x^2) - (x^2 - 4x + 2)(2 - x))}{\sqrt{4x - x^2}} \right] \\ &= \frac{2}{(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}} [(x - 2)(8x - 2x^2 + x^2 - 4x + 2)] \\ &= \frac{2(x - 2)(-x^2 + 4x + 2)}{(4x - x^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

per cui, trascurando i termini positivi costituiti dal fattore 2 e dal denominatore,  $f''(x) \geq 0$  implica  $x - 2 \geq 0$  da cui  $x \geq 2$  e

$$-x^2 + 4x + 2 \geq 0 \implies x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6} \implies 2 - \sqrt{6} \leq x \leq 2 + \sqrt{6}.$$

Poiché ci interessa il segno assunto da  $f''(x)$  nell'intervallo  $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$  il fattore di II grado risulta positivo per cui il segno, che riassumiamo graficamente in fig. 4, è determinato dal solo termine di primo grado.

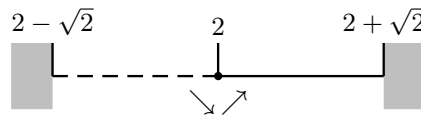


Fig. 4. Segno di  $f''(x)$ .

Appare ora evidente che  $f'$  assume il suo valore minimo in corrispondenza di  $x = 2$  dove risulta  $f'(2) = -2$ : le supposizioni iniziali sono quindi confermate per cui l'equazione

$$f'(x) = -\frac{21}{10} \quad \text{cioè} \quad \frac{2(x^2 - 4x + 2)}{\sqrt{4x - x^2}} = -\frac{21}{10}$$

non ammette soluzioni essendo il minimo del primo membro pari a  $-2$ . Tradotto ciò in termini geometrici potremo dire che la retta  $y = -\frac{21}{10}$  non può intersecare la curva espressa dalla  $f'(x)$ . Diversamente accade per l'equazione

$$f'(x) = -\frac{23}{12} \quad \text{cioè} \quad \frac{2(x^2 - 4x + 2)}{\sqrt{4x - x^2}} = -\frac{23}{12}:$$

questa potrà intersecare il grafico della funzione a primo membro e quindi presenterà due soluzioni simmetricamente disposte rispetto al punto  $(2, 0)$ .

3. L'area  $\mathcal{A}_{tot}$  della regione evidenziata in colore nella figura 5 è evidentemente il doppio dell'area della regione  $R$ ,  $\mathcal{A}(R)$  compresa nel primo quadrante.

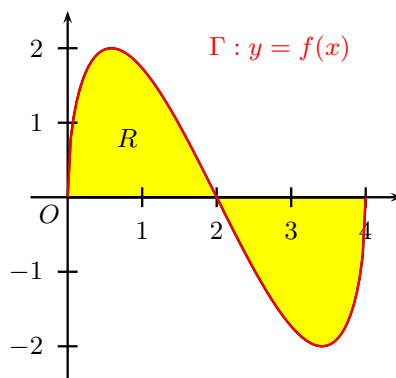


Fig. 5. Area compresa tra  $\Gamma$  e l'asse  $x$ .

Dovremo quindi calcolare l'integrale

$$\mathcal{A}_{tot} = 2\mathcal{A}(R) = 2 \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (4-2x)\sqrt{4x-x^2} dx \quad (8)$$

cioè determinare una primitiva dell'integrale indefinito

$$\int (4-2x)\sqrt{4x-x^2} dx. \quad (9)$$

Per risolverlo, osserviamo che  $(4-2x) dx$  è il differenziale di  $4x-x^2$ . Ciò suggerisce di procedere con la sostituzione  $t = 4x - x^2$  e quindi, calcolato il differenziale  $dt = (4-2x) dx$ , sostituire tutto ciò in (9). L'integrale si riduce ad uno elementare

$$\int (4-2x)\sqrt{4x-x^2} dx = \int \sqrt{t} \cdot dt = \int t^{1/2} dt$$

per cui

$$\int t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{(3/2)} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(4x-x^2)^3} + c.$$

Dalla (8) otteniamo infine

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{tot} &= \int_0^2 (4-2x)\sqrt{4x-x^2} dx = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{(4x-x^2)^3} \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(8-4)^3} - 0 = \frac{2}{3} \sqrt{4^3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

4. Posto

$$h(x) = \text{sen}[f(x)] = \text{sen}\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\right] \quad (10)$$

notiamo che la funzione  $h$  è la composizione della funzione  $f$  e della funzione seno, entrambe definite e continue in  $[0, 4]$ :  $h$  è pertanto una funzione continua nel dominio  $[0, 4]$ . Inoltre, poiché il seno è una funzione simmetrica rispetto allo zero, le proprietà di simmetria di  $f$  rispetto al punto  $(2, 0)$  si mantengono pure per la  $h$ . Difatti, riprese le equazioni (3) della simmetria e sostituite in (10) implicano

$$-y' = \text{sen}\left[(2 - (-x' + 4))\sqrt{4(-x' + 4) - (-x' + 4)^2}\right]$$

e quindi si giunge alla

$$-y' = \text{sen}\left[(x' - 2)\sqrt{4x' - (x')^2}\right].$$

Moltiplicando per  $-1$  e tenendo presente che  $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$  otteniamo l'equazione

$$y' = -\sin\left[(x' - 2)\sqrt{4x' - (x')^2}\right] \implies y' = \sin\left[(2 - x')\sqrt{4x' - (x')^2}\right]$$

che coincide con (10). Vale pertanto l'identità,

$$h(4 - x) = -h(x). \quad (11)$$

La ricerca dei punti aventi ordinata unitaria si traduce nell'equazione

$$h(x) = 1 \implies \sin[f(x)] = \sin\left[(2 - x)\sqrt{4x - x^2}\right] = 1$$

che evidentemente implica

$$(2 - x)\sqrt{4x - x^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

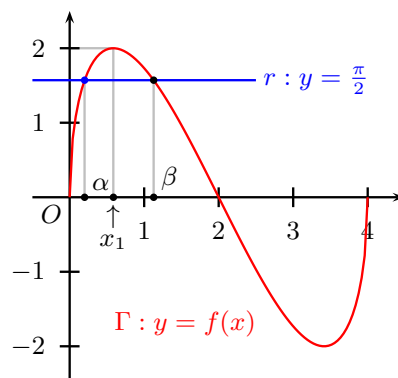
e che si riduce alla sola

$$(2 - x)\sqrt{4x - x^2} = \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

dato che il codominio di  $f$  risulta  $f(x) \in [-2, 2]$ . Possiamo riscrivere quest'ultima equazione come

$$\begin{cases} y = (2 - x)\sqrt{4x - x^2} \\ y = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e questo permette di riportare la ricerca delle soluzioni di (12) alla ricerca dei punti di intersezione tra il grafico  $\Gamma$  di  $f$  e la retta rappresentata da  $y = \frac{\pi}{2}$  (fig. 6).



**Fig. 6.** Intersezioni tra  $\Gamma$  e retta  $r: y = \frac{\pi}{2}$ .

Ricordando che il **massimo** 2 viene raggiunto nel punto  $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ , e sulla base della conoscenza di  $\Gamma$ , possiamo concludere che  $\Gamma$  e  $r$  si intersecano in due punti aventi ascisse  $\alpha \in ]0, x_1[$  e  $\beta \in ]x_1, 2[$ .

Per la ricerca dei punti di massimo e di minimo di  $h$  procediamo al calcolo della sua derivata prima

$$h'(x) = D[\text{sen } f(x)] = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$$

dove  $f'(x)$  è già stata calcolata ed è data dalla (5). Il segno di  $h'(x)$  dipende dal segno di entrambi i fattori ma, per lo studio già svolto di  $f'(x)$  (si veda (7)) abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq 2 - \sqrt{2} \vee x \geq 2 + \sqrt{2}. \quad (13)$$

Il segno del primo fattore implica invece

$$\cos[f(x)] \geq 0 \implies -\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Limitando, per la simmetria di  $h$  tale studio all'intervallo  $[0, 2]$ , la precedente si riduce alla  $f(x) \leq \frac{\pi}{2}$  che, in base alle precedenti **osservazioni** relative all'equazione  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  e alla conoscenza di  $\Gamma$ , ci permette di individuare l'insieme dove il grafico  $\Gamma$  giace al di sotto della retta  $r$ : questo è rappresentato dai valori

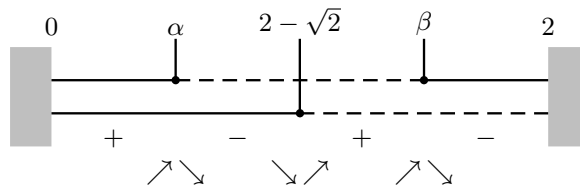
$$f(x) \leq \frac{\pi}{2} \iff 0 \leq x \leq \alpha \vee \beta \leq x \leq 2. \quad (14)$$

Riportati in fig. 7 gli insiemi (13) e (14), risulta che la funzione  $h(x)$  in  $[0, 2]$  presenta due massimi in corrispondenza di  $x = \alpha$  e  $x = \beta$

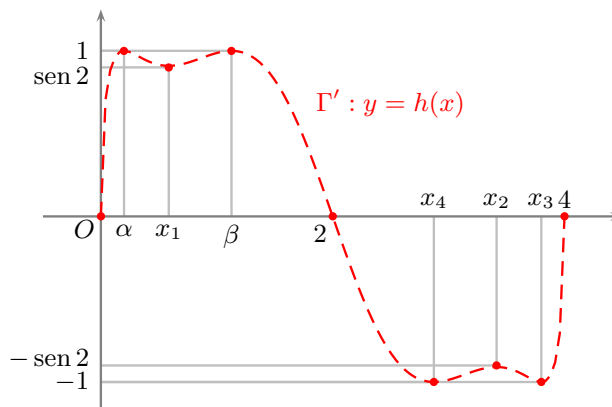
$$h(\alpha) = \text{sen}[f(\alpha)] = \text{sen}[f(\beta)] = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

e un minimo pari a

$$h(x_1) = \text{sen}[f(x_1)] = \text{sen } 2.$$



**Fig. 7.** Segno della derivata prima  $h'$ .



**Fig. 8.** Possibile grafico di  $h(x)$  con  $0 \leq x \leq 4$ .

Notato che  $h(0) = h(2) = \text{sen } f(0) = \text{sen } f(2) = \text{sen } 0 = 0$  e ricordata la simmetria centrale di  $h$  rispetto a  $(2, 0)$  per cui ad  $\alpha, x_1$  e  $\beta$  corrispondono rispettivamente le ascisse  $x_3 = 4 - \alpha, x_2 = 2 + \sqrt{2}$  e  $x_4 = 4 - \beta$ , possiamo ora proporre un grafico qualitativo  $\Gamma'$  di  $h$  (fig. 8).

In definitiva, nel dominio  $[0, 4]$  di  $h$ , i punti di massimo sono  $\alpha, \beta$  e  $x_2$ , mentre le ascisse dei minimi corrispondono a  $x_1, x_4$  e  $x_3$ .

La ricerca del numero delle soluzioni dell'equazione parametrica  $h(x) = k$  è invece equivalente alla ricerca delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = h(x) \\ y = k. \end{cases}$$

Noto quindi il grafico  $\Gamma'$  di  $y = h(x)$  e, interpretata l'equazione  $y = k$  come la rappresentazione di un fascio di rette orizzontali, possiamo osservare come quest'ultimo incontri  $\Gamma'$  in quattro punti solo se il fascio è compreso tra le ordinate dei valori estremi, sia nel primo che nel quarto quadrante: in particolare dev'essere  $k \in [\text{sen } 2, 1] \cup [-1, -\text{sen } 2]$ .

Infine, per la simmetria di  $\Gamma'$  l'integrale richiesto dev'essere nullo in quanto esso esprime la somma algebrica di due regioni aventi area uguale ma la seconda, appartenente al quarto quadrante, è delimitata da una funzione di segno negativo. Difatti l'integrale si può suddividere come

$$\int_0^4 h(x) \, dx = \int_0^2 h(x) \, dx + \int_2^4 h(x) \, dx$$

e, eseguita la sostituzione nel secondo addendo  $x' = 4 - x$  che comporta pure  $dx' = -dx$  e l'aggiornamento degli estremi di integrazione, abbiamo

$$\int_0^4 h(x) \, dx = \int_0^2 h(x) \, dx + \int_{4-2}^{4-4} h(4-x')(-dx').$$

Poiché, come visto in (11),  $h(4 - x') = -h(x')$  abbiamo in definitiva

$$\begin{aligned} \int_0^4 h(x) dx &= \int_0^2 h(x) dx - \int_2^0 h(4 - x') dx' \\ &= \int_0^2 h(x) dx - \int_2^0 [-h(x')] dx' \\ &= \int_0^2 h(x) dx + \int_2^0 h(x') dx' \\ &= \int_0^2 h(x) dx - \int_0^2 h(x') dx' = 0 \end{aligned}$$

e dove, nell'ultimo passaggio, si sono invertiti gli estremi di integrazione.

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame del corso di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 1.

**Quesito n. 2: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame del corso di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 2.

**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Il numero delle palline rosse  $n_r$ , verdi  $n_v$ , gialle  $n_g$  e bianche  $n_b$  è per ciascun colore lo stesso e pari a 5 cosicché il numero totale di palline nell'urna è

$$n = n_r + n_v + n_g + n_b = 20.$$

L'estrazione di una pallina alla volta senza la reimbussolamento nell'urna modifica evidentemente il numero delle palline nell'urna e di conseguenza la probabilità di estrazione. Indichiamo con

$$E = \{\text{una sola pallina rossa dopo tre estrazioni}\}, \quad (1)$$

l'evento che comporta l'estrazione di una sola pallina rossa dopo tre estrazioni. Questo può presentarsi come composto da eventi elementari. Difatti, l'estrazione della pallina rossa può accadere alla prima estrazione, evento che indichiamo con  $E_1(r)$ , ma dev'essere poi seguita nella seconda e terza estrazione da palline di altro colore, eventi che indichiamo rispettivamente come  $E_2(\bar{r})$  e  $E_3(\bar{r})$  con  $\bar{r} = \{\text{non rossa}\}$ . Formalmente quindi  $E_1$  è l'intersezione di tre eventi

$$E_1 = E_1(r) \cap E_2(\bar{r}) \cap E_3(\bar{r}). \quad (2)$$

Ovviamente la pallina rossa potrà presentarsi anche solo alla seconda estrazione per cui andrà considerato pure l'evento

$$E_2 = E_1(\bar{r}) \cap E_2(r) \cap E_3(\bar{r}). \quad (3)$$

e, infine, solo alla terza

$$E_3 = E_1(\bar{r}) \cap E_2(\bar{r}) \cap E_3(r). \quad (4)$$

L'evento (1)  $E$  si può quindi strutturare come composto da tre eventi

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

ciascuno incompatibile con gli altri due:  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  sono quindi eventi incompatibili. In tal caso il teorema della probabilità totale per eventi incompatibili garantisce che la probabilità è data da

$$p(E) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3). \quad (5)$$

D'altra parte, il teorema della probabilità composta ci permette di calcolare le probabilità di ciascuno dei tre addendi in (5). Per il primo discende da (2) che

$$p(E_1) = p(E_1(r)) \cdot p(E_2(\bar{r})) \cdot p(E_3(\bar{r})) \quad (6)$$

e dove le probabilità dei singoli fattori sono:

$$p(E_1(r)) = \frac{n_r}{n_r + n_v + n_g + n_b} = \frac{5}{20}$$

in quanto nella prima estrazione i casi favorevoli all'estrazione di una pallina rossa sono 5 su 20 possibili, nella seconda

$$p(E_2(\bar{r})) = \frac{n_v + n_g + n_b}{(n_r - 1) + n_v + n_g + n_b} = \frac{15}{19}$$

essendoci 15 palline di colore diverso dal rosso ma nell'urna vi sono 19 palline. Allo stesso modo avremo

$$p(E_3(\bar{r})) = \frac{n_v + n_g + n_b - 1}{(n_r - 1) + (n_v + n_g + n_b - 1)} = \frac{14}{18}$$

perché nell'urna sono rimaste 14 palline non rosse più 4 rosse. Risulta quindi dalla (6)

$$p(E_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{35}{228}.$$

Ragionando allo stesso modo per gli eventi (3) e (4)

$$p(E_2) = p(E_1(\bar{r})) \cdot p(E_2(r)) \cdot p(E_3(\bar{r})) = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{35}{228},$$

mentre per l'evento  $E_3$  abbiamo

$$p(E_3) = p(E_1(\bar{r})) \cdot p(E_2(\bar{r})) \cdot p(E_3(r)) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{35}{228}.$$

In definitiva, richiamata la (5), otteniamo

$$p(E) = \frac{35}{228} + \frac{35}{228} + \frac{35}{228} = 3 \cdot \frac{35}{228} = \frac{35}{76} \approx 0,4605.$$

Per determinare invece la probabilità dell'evento  $E_{3col}$  ossia che le tre palline nelle tre estrazioni siano tutte di diverso colore valutiamo innanzitutto il numero di combinazioni di quattro colori a gruppi di tre. Poiché, per ora, l'ordine non è importante, questo numero è rappresentato da

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

e quindi le terne di colore accettabili (R=rosso, V=verde, G=giallo, B=bianco) sono solamente le seguenti

$$\text{RVG, RVB, VGB, RGB.}$$

Ciascuna terna (o evento) può comunque presentarsi in un ordine qualsiasi nelle tre estrazioni: per esempio i colori RGV possono essere estratti nell'ordine RVG, VGR, GRV, RGV, VRG, GVR, ossia in  $3! = 6$  permutazioni distinte. La probabilità per ciascuna di queste terne ordinate, per esempio per RVG, è

$$\begin{aligned} p &= \frac{n_r}{n_r + n_v + n_g + n_b} \cdot \frac{n_v}{(n_r - 1) + n_v + n_g + n_b} \\ &\quad \cdot \frac{n_g}{(n_r - 1) + (n_v - 1) + n_g + n_b} \\ &= \frac{5}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5^3}{20 \cdot 19 \cdot 18} \end{aligned} \quad (7)$$

ed è la stessa per qualsiasi permutazione dei medesimi colori in quanto il colore estratto è sempre diverso. Per l'incompatibilità di ciascuna successione di colori con qualsiasi altra successione, il teorema della probabilità totale permette di individuare la probabilità per ciascuna delle terne come

$$p(\text{RVG}) = p(\text{RVB}) = p(\text{VGB}) = p(\text{RGB}) = 3! \cdot p = 3! \cdot \left( \frac{5^3}{20 \cdot 19 \cdot 18} \right)$$

per cui la probabilità cercata è

$$\begin{aligned}
 p(E_{3col}) &= p(RVG) + p(RVB) + p(VGB) + p(RGB) \\
 &= 4 \cdot \left[ 3! \cdot \left( \frac{5^3}{20 \cdot 19 \cdot 18} \right) \right] = \frac{4 \cdot 3! \cdot 5^3}{20 \cdot 19 \cdot 18} \\
 &= \frac{25}{57} \approx 0,4386.
 \end{aligned} \tag{8}$$

In alternativa, possiamo considerare una terna qualsiasi che realizza l'evento  $E_{3col}$  come la disposizione semplice di 4 oggetti, i colori, a gruppi di 3. In tal caso il numero delle terne possibili è dato dalle disposizioni semplici di 4 oggetti di classe 3 ossia  $D_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ . La probabilità di ciascuna è ancora data dalla (7) per cui ritroviamo il risultato (8)

$$p(E_{3col}) = 24 \cdot p = 24 \cdot \left( \frac{5^3}{20 \cdot 19 \cdot 18} \right) = \frac{25}{57}.$$

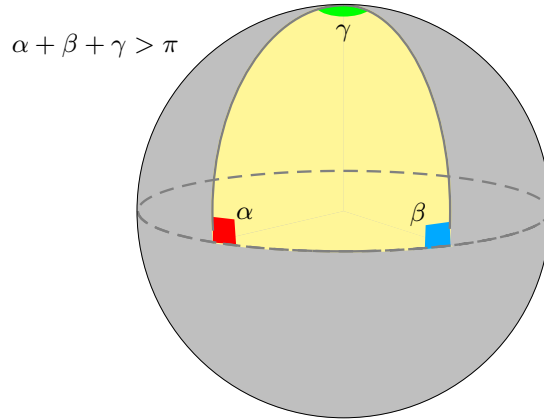
**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è identico a quello proposto nell'esame del corso di Ordinamento: si veda la soluzione del quesito n. 4.

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

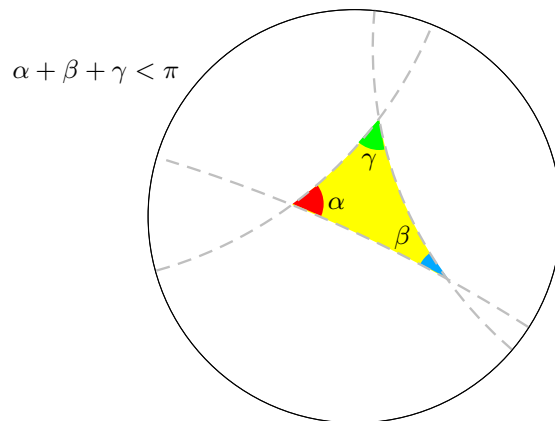
Riprendiamo qui e in parte, quanto esposto a commento del quesito 5 dell'anno 2007 PNI. Il quinto postulato della geometria euclidea afferma l'esistenza di una e una sola retta parallela ad una data retta  $r$  e passante per un punto  $P$  non appartenente ad  $r$ . Se si sostituisce tale postulato con altri si possono dedurre altri tipi di geometrie.

Allora, se si postula che da un punto  $P$  non appartenente alla retta  $r$ , non esistano parallele ad  $r$ , si ottiene la geometria ellittica il cui modello fisico è la geometria su una superficie sferica. Difatti in tale modello una retta viene rappresentata da una circonferenza massima ossia dalla circonferenza che si ottiene intersecando la sfera con un piano passante per il suo centro. Ne segue che per un punto  $P$  non appartenente ad una circonferenza massima  $r$ , non è possibile trovare altre circonferenze massime che non incontrino  $r$  cioè che siano ad essa parallele. Inoltre in questa geometria la somma degli angoli interni di un triangolo può essere maggiore dell'angolo piatto. In fig. 1 ciò appare evidente in quanto il triangolo in giallo, definito con terminologia terrestre, dall'equatore della sfera e da due suoi meridiani, possiede gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  retti cosicché la misura dell'angolo  $\gamma$  fornisce di quanto la somma degli angoli interni del medesimo triangolo eccede  $\pi$ .



**Fig. 1.** Geometria ellittica su una superficie sferica.

Nella geometria iperbolica dato un punto  $P$  ed una retta  $r$  con  $P \notin r$ , esistono almeno due rette parallele a  $r$  passanti per  $P$  (e quindi, si può dimostrare, ne esistono infinite). La fig. 2 rappresenta un triangolo nel piano di Poincaré come intersezione di tre rette. Difatti in questo “piano”, tutto confinato entro l’*orizzonte* della circonferenza limite, le rette sono rappresentate dagli archi di circonferenze che intersecano ortogonalmente la circonferenza limite. In tale contesto la somma degli angoli di un triangolo è minore di  $\pi$ .



**Fig. 2.** Un triangolo nella geometria iperbolica del piano di Poincaré.

**Quesito n. 6: soluzione.** (testo del quesito)

Il quesito è geometricamente analogo al quesito 1 proposto nell’anno 2011 all’esame di Ordinamento. Posto  $r = \sqrt{3}$  e definita come incognita la lunghezza del

segmento  $OH$  cioè la distanza di una base del cilindro dal centro  $O$  della sfera,  $x = \overline{OH}$  (fig. 1), l'altezza del cilindro è pari a  $h = 2x$  e le limitazioni per l'incognita sono  $0 \leq 2x \leq 2r$  da cui  $0 \leq x \leq r$ .

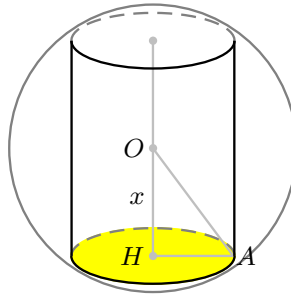


Fig. 1. Sfera e cilindro inscritto.

Indicato con  $A$  un punto qualsiasi della circonferenza di base,  $OA$  è un raggio della sfera per cui il quadrato del raggio di base del cilindro si deduce con il teorema di Pitagora applicato a  $\triangle OHA$  (fig. 1)

$$\overline{AH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OH}^2 \implies \overline{AH}^2 = r^2 - x^2, \quad (1)$$

e il suo volume è quindi

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \pi \overline{AH}^2 \cdot (2\overline{OH}) = 2\pi(r^2 - x^2)x \\ 0 \leq x \leq r. \end{cases}$$

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$\mathcal{V}' = 2\pi[-2x \cdot x + r^2 - x^2] = 2\pi(-3x^2 + r^2)$$

e quest'ultima è positiva

$$\mathcal{V}' \geq 0 \quad \text{se} \quad -3x^2 + r^2 \geq 0 \implies -\frac{r}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Considerando le limitazioni per  $x$ , il segno di  $\mathcal{V}'$  (fig. 2) permette di riconoscere la presenza di un massimo in corrispondenza del valore  $x_m$

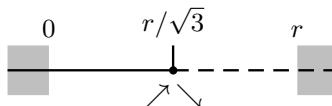


Fig. 2. Segno di  $\mathcal{V}'$ .

$$x_m = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1.$$

Di conseguenza l'altezza del cilindro di volume massimo è  $h_{max} = 2x_m = 2$  e il suo raggio di base si ottiene dalla radice quadrata di (1)

$$r_b = \sqrt{r^2 - x_m^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}.$$

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

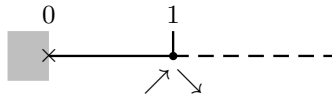
Per individuare il minimo relativo della funzione  $f$  nota la sua derivata prima

$$f'(x) = \ln x - x + 2, \quad (1)$$

studiamo il segno di quest'ultima nel dominio  $x \in \mathbb{R}_0^+$  cioè per  $x > 0$ . D'altra parte, non potendo risolvere l'equazione  $f'(x) = 0$  in quanto coinvolge come addendi sia funzioni trascendenti che razionali, analizziamo il segno della sua derivata prima ossia

$$f''(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}. \quad (2)$$

Poiché  $x > 0$ , la disequazione  $f''(x) > 0$  è soddisfatta quando  $1 - x \geq 0$  cioè per  $x \leq 1$  e quindi  $f''(x) \geq 0$  se  $0 < x \leq 1$ ,  $f''(x) < 0$  per  $x > 1$ .



**Fig. 1.** Segno di  $f''(x)$ .

Tale segno indica che la  $f'(x)$  presenta un massimo in  $x = 1$  dove assume il valore  $f'(1) = \ln(1) - 1 + 2 = 1$ . Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 2) = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

la  $f'(x)$  presenta in  $x = 0$  un asintoto verticale e, data la sua continuità, dovrà esistere un valore  $\alpha < 1$  tale che, in  $0 < x < \alpha$ , si abbia  $f'(x) < 0$ .

Il limite a  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 2) \quad (3)$$

si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 2.$$

Per determinarlo, studiamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D[\ln x]}{D[x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{1} = 0$$

per cui, applicando il teorema di De L'Hôpital è pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1.$$

Il limite (3) è quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 2) = -\infty$$

e di conseguenza possiamo proporre in fig. 2 un andamento qualitativo della  $f'(x)$ .

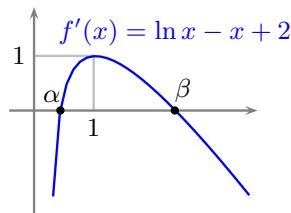


Fig. 2. Grafico qualitativo di  $f'(x)$ .

Esistono perciò due valori di  $x$ ,  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta > 1$ , in corrispondenza dei quali  $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ : per la continuità di  $f'$  il segno della funzione  $f'$  nel suo dominio dovrà essere

$$f'(x) \geq 0 \iff \alpha \leq x \leq \beta$$

come riassunto graficamente dalla fig. 3.

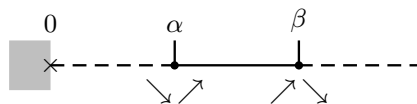


Fig. 3. Segno di  $f'(x)$  e monotonia di  $f$ .

Il minimo relativo di  $f$  è quindi raggiunto in un punto di ascissa compresa tra 0 e 1 per cui la risposta corretta è la D.

Una risposta indiretta discende dal calcolo esplicito di  $f'(0,159)$

$$f'(0,159) = \ln(0,159) - 0,159 - 2 \approx 0,0021$$

che conferma l'annullarsi della  $f'$  in  $\alpha$  (ma, per completezza, pure in  $f'(3,146)$  per cui  $\beta \approx 3,146$ ).

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Per ottenere una somma di 9 con un lancio di tre dadi potranno presentarsi le terne

$$a_1 = 162, \quad a_2 = 153, \quad a_3 = 144, \quad a_4 = 252, \quad a_5 = 243, \quad a_6 = 333$$

e ciascuna potrà assumere un ordine diverso nei lanci. Per ottenere il loro numero osserviamo che le terne  $a_1$ ,  $a_2$ , e  $a_5$  sono costituite da numeri distinti per cui ciascuna di queste potrà uscire in  $3! = 6$  modi diversi pari al numero delle permutazioni di 3 oggetti. Le terne  $a_3 = 144$  e  $a_4 = 252$  presentano invece due numeri uguali per cui potranno dar origine solo a tre lanci

$$144, \quad 441, \quad 414 \quad \text{oppure} \quad 252, \quad 522, \quad 225$$

pari al numero di permutazioni di 3 oggetti con solo due distinti ossia

$$n(144) = n(252) = \frac{3!}{2!} = 3.$$

Infine la terna  $a_5 = 333$  potrà apparire solo in un modo per cui il numero totale di lanci con somma 9,  $n_9$ , è in definitiva

$$n_9 = 3! \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 = 18 + 6 + 1 = 25.$$

Ragionando allo stesso modo le terne che danno esiti con somma 10 sono

$$b_1 = 163, \quad b_2 = 154, \quad b_3 = 262, \quad b_4 = 253, \quad b_5 = 244, \quad b_6 = 343.$$

Tra queste,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_4$  danno origine a  $3! = 6$  permutazioni ciascuna in quanto sono presenti numeri distinti mentre  $b_3$ ,  $b_5$  e  $b_6$  originano 3 permutazioni ciascuna. Il numero totale di esiti con somma 10 è quindi

$$n_{10} = 3! \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18 + 9 = 27.$$

Infine, il numero  $n$  di tutte le possibili combinazioni di 6 numeri a gruppi di 3 è dato da  $n = 6^3 = 216$  per cui le probabilità richieste si deducono dalla definizione classica dai rapporti

$$p_9 = \frac{n_9}{n} = \frac{25}{216} \approx 0,1157, \quad p_{10} = \frac{n_{10}}{n} = \frac{27}{216} \approx 0,125 :$$

concludiamo quindi con l'affermazione che  $p_9 < p_{10}$ .

**Quesito n. 9: soluzione.** (testo del quesito)

Gli insiemi degli interi relativi  $\mathbb{Z}$ , e dei razionali  $\mathbb{Q}$ , hanno la medesima cardinalità dell'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  ossia la cardinalità del numerabile

$$\text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0.$$

Difatti, per dimostrare che  $\text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$  è sufficiente individuare una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  che sia biunivoca. A tal fine poniamo

$$f : \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Questa funzione dà origine alla successione

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbb{N}: & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}: & 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & -1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & -2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & -3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

che “manifestamente” fa corrispondere ad ogni numero naturale uno e uno solo numero relativo esaurendo comunque l'insieme  $\mathbb{Z}$ . In particolare fa corrispondere ai naturali pari i relativi positivi, ai dispari, lo zero e quelli negativi.

La dimostrazione della sua iniettività procede negando questa proprietà e quindi supponendo che

$$n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \quad n_1 \neq n_2 \implies f(n_1) = f(n_2). \quad (1)$$

Seguono tre possibilità:

a) sia  $n_1$  che  $n_2$  sono pari per cui da

$$f(n_1) = f(n_2) \implies \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \implies n_1 = n_2$$

contro l'ipotesi in (1) che siano diversi.

b) sia  $n_1$  che  $n_2$  sono dispari per cui da

$$f(n_1) = f(n_2) \implies \frac{1-n_1}{2} = \frac{1-n_2}{2} \implies n_1 = n_2$$

ancora contro l'ipotesi in (1).

c)  $n_1$  pari e  $n_2$  dispari (l'opposto è del tutto analogo): allora

$$f(n_1) = f(n_2) \implies \frac{n_1}{2} = \frac{1-n_2}{2} \implies n_1 = 1-n_2$$

ma  $n_1 > 0$  e  $1-n_2 \leq 0$  per cui si cade in una contraddizione.

La suriettività afferma che  $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $f(n) = z$ . Difatti nel caso che sia  $z > 0$ , l'equazione ammette sempre la soluzione

$$z = \frac{n}{2} \implies n = 2z \in \mathbb{N}$$

ed  $n$  è pari. Se invece  $z \leq 0$ , l'equazione

$$z = \frac{1-n}{2} \implies 2z = 1-n \implies n = 1+(-2z) \in \mathbb{N}$$

in quanto al numero pari e positivo  $-2z$  si aggiunge 1 ottenendo un numero certamente dispari.

La dimostrazione che

$$\text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$$

è del tutto simile a quella presentata in relazione al quesito 4 proposto nel 2012 nel corso P.N.I. e dove si segue il cosiddetto "primo argomento diagonale" di Cantor.

Non è invece possibile determinare una funzione biunivoca tra  $\mathbb{N}$  e l'insieme  $\mathbb{R}$ . Cantor ha dimostrato che l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei numeri reali positivi *non* ha la cardinalità del numerabile. Questa dimostrazione procede per assurdo ipotizzando

$$\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{R}) \tag{2}$$

ossia che esista una funzione biunivoca  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e quindi sia possibile associare ad ogni numero naturale  $i$  ogni numero reale  $r_i$ . Riportiamo tale successione in (3) dove i numeri reali  $f(i) = r_i > 0$  sono rappresentati, per la parte intera, dalle cifre  $a_i$  e per la parte decimale, dalle cifre  $b_{ij}$ .

$$\begin{aligned} f(1) &= +a_1, b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15} \dots \\ f(2) &= +a_2, b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}b_{25} \dots \\ f(3) &= +a_3, b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}b_{35} \dots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f(i) &= +a_i, b_{i1}b_{i2}b_{i3}b_{i4}b_{i5} \dots b_{ii} \dots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned} \tag{3}$$

I secondi membri di tale successione dovrebbero, per l'ipotesi (2) e la suriettività di  $f$ , esaurire tutti i numeri reali positivi. Ma seguendo la linea dimostrativa di Cantor (tale modalità viene oggi indicata come “secondo argomento diagonale”) costruiamo il numero reale  $r$  avente come parte intera una cifra qualsiasi, mentre la parte frazionaria si ottiene sostituendo alla cifra  $b_{11}$  una cifra  $c_{11}$  diversa, a  $b_{22}$  la cifra  $c_{22} \neq b_{22}$  e così sequenzialmente,

$$c_{11} \rightarrow b_{11}, \quad c_{22} \rightarrow b_{22}, \quad \dots \quad c_{ii} \rightarrow b_{ii}, \quad c_{ii} \neq b_{ii}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

In sostanza alle cifre “diagonali” nella (3) e indicate in colore, si sono sostituite delle cifre diverse. Il numero formato in tal modo (e con la cifra della parte intera scelta arbitrariamente, per esempio  $a_1$  in (4))

$$r = a_1, c_{11} c_{22} c_{33} \dots c_{ii} \dots \quad (4)$$

è un numero reale  $r$  che non è immagine di alcun numero naturale in quanto ha almeno una cifra dopo la virgola diversa da  $f(i)$  qualsiasi sia il numero naturale  $i$  ossia

$$r \neq f(i) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tale numero non è quindi compreso nella successione (3) per cui l'ipotesi che questa esaurisse l'insieme  $\mathbb{R}$  è falsa.

Cantor di conseguenza ha ipotizzato una cardinalità per l'insieme  $\mathbb{R}$  maggiore del numerabile,  $\text{card}(\mathbb{R}) > \aleph_0$  e questa viene definita come *cardinalità del continuo*.

#### Quesito n. 10: soluzione. (testo del quesito)

Innanzitutto se fosse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{a + bx} - 2 \neq 0$$

il limite richiesto sarebbe divergente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + bx} - 2}{x} = \infty$$

e non si potrebbe soddisfare la condizione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + bx} - 2}{x} = 1. \quad (1)$$

Dev'essere quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{a + bx} - 2 = 0 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{a + bx} = 2 \quad (2)$$

ma, poiché  $\lim_{x \rightarrow 0} bx = 0$ , è pure ( $t = a + bx$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{a + bx} = \lim_{t \rightarrow a} \sqrt{t} = \sqrt{a}, \quad (3)$$

e, per confronto con (2),

$$\sqrt{a} = 2 \implies a = 4.$$

Il limite (1) si può ora riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + bx} - 2}{x} = 1. \quad (4)$$

ma, presentandosi come un caso di indeterminazione del tipo  $0/0$ , razionalizziamo il numeratore

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + bx} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{4 + bx} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4 + bx} + 2}{\sqrt{4 + bx} + 2} \right) = 1.$$

L'espressione ottenuta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + bx - 4}{x(\sqrt{4 + bx} + 2)} = 1$$

ci permette di semplificare il termine responsabile dell'annullamento del numeratore e denominatore

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x(\sqrt{4 + bx} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{\sqrt{4 + bx} + 2} = 1 \quad (5)$$

e quindi, osservato che è pure

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{\sqrt{4 + bx} + 2} = \frac{b}{\sqrt{4 + 0} + 2} = \frac{b}{4}, \quad (6)$$

in quanto  $\lim_{x \rightarrow 0} bx = 0$ , il confronto tra (5) e (6) implica

$$\frac{b}{4} = 1 \implies b = 4.$$

In definitiva i valori richiesti sono  $a = b = 4$ .

# APPENDICE

Nelle pagine seguenti proponiamo, senza soluzioni, i testi delle prove assegnate nelle sessioni suppletive dei corsi di Ordinamento e PNI.

## Indice delle prove suppletive

Esame 2001 suppletiva . . . . .	670
Esame 2001 PNI suppletiva . . . . .	672
Esame 2002 suppletiva . . . . .	674
Esame 2002 PNI suppletiva . . . . .	677
Esame 2003 suppletiva . . . . .	679
Esame 2003 PNI suppletiva . . . . .	681
Esame 2004 suppletiva . . . . .	684
Esame 2004 PNI suppletiva . . . . .	687
Esame 2005 suppletiva . . . . .	690
Esame 2005 PNI suppletiva . . . . .	693
Esame 2006 suppletiva . . . . .	696
Esame 2006 PNI suppletiva . . . . .	699
Esame 2007 suppletiva . . . . .	702
Esame 2007 PNI suppletiva . . . . .	704
Esame 2008 suppletiva . . . . .	706
Esame 2008 PNI suppletiva . . . . .	708
Esame 2009 suppletiva . . . . .	710
Esame 2009 PNI suppletiva . . . . .	712
Esame 2010 suppletiva . . . . .	715
Esame 2010 PNI suppletiva . . . . .	717
Esame 2011 suppletiva . . . . .	719
Esame 2011 PNI suppletiva . . . . .	721
Esame 2012 suppletiva . . . . .	723
Esame 2012 PNI suppletiva . . . . .	725
Esame 2013 suppletiva . . . . .	727
Esame 2013 PNI suppletiva . . . . .	729
Esame 2014 suppletiva . . . . .	731
Esame 2014 PNI suppletiva . . . . .	733

# Esame 2001 suppletiva

## Problemi

1) Si consideri la funzione reale  $f_m$  di variabile reale  $x$  tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m}$$

dove  $m$  è un parametro reale non nullo. *a)* Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione. *b)* Indicata con  $C_1$  la curva rappresentativa della funzione  $f_1(x)$  corrispondente ad  $m = 1$ , studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto  $A$  di ascissa 2. *c)* Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva  $C_1$  e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto  $A$ .

2) Una piramide retta, di vertice  $V$ , ha per base il triangolo  $ABC$ , rettangolo in  $A$ , la cui area è  $24a^2$  dove  $a$  è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che  $\frac{AB}{BC} = 3/5$  e che il piano della faccia  $VAB$  della piramide forma col piano della base  $ABC$  un angolo  $\gamma$  tale che  $\sin \gamma = \frac{12}{13}$ .

- a) Calcolare l'altezza della piramide.
- b) Controllato che essa è  $\frac{24}{5}a$ , calcolare la distanza del vertice  $C$  dal piano della faccia  $VAB$ .
- c) Condotta, parallelamente alla base  $ABC$ , un piano  $\alpha$  che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di  $\alpha$  dalla base  $ABC$ , calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.
- d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

## Questionario

1) Considerata una funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia definita in un punto  $a$  è che sia continua in  $a$ .

B: condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia continua in un punto  $a$  è che sia derivabile in  $a$ .

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornirne un'esauriente giustificazione della risposta:

- a) A vera – B vera;    b) A vera – B falsa;

c) A falsa – B vera; d) A falsa – B falsa.

2) Si consideri il cubo di spigoli  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  in cui due facce opposte sono i quadrati  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ . Indicato con  $E$  il punto medio dello spigolo  $AB$ , sia  $CF$  la retta perpendicolare a  $DE$  condotta per  $C$ . I piani  $D'DE$  e  $C'CF$  dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3) Calcolare se esiste un numero naturale  $n$  per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 1048576.$$

4) Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che  $f(0) = 1$  ed  $f'(0) = 2$ . Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5) Dimostrare che la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $a^x$ , dove  $a$  è un numero reale positivo diverso da 1, è  $a^x \ln a$ .

6) Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7) Una primitiva della funzione  $f(x)$  è  $x^2 + 2x$ . Se è possibile calcolare  $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ , determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sia  $T$  un trapezoide di base  $[a, b]$  relativo alla funzione  $f(x)$ , continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse  $x$ .

9) Calcolare la derivata della funzione  $\sin 2x$  rispetto alla variabile  $x$ , ricorrendo alla definizione di derivata.

10) Considerata una funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , derivabile almeno due volte in un dato punto  $a$ , affinché la funzione  $f(x)$  abbia in  $a$  un punto di flesso la condizione  $f''(a) = 0$  è:

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornirne un'esauriente spiegazione della risposta.

# Esame 2001 PNI suppletiva

## Problemi

1) Le misure  $a, b, c$  dei lati di un triangolo  $ABC$  sono in progressione aritmetica di ragione  $k$ .

- a) Si esprima, in funzione di  $k$ , il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo;
- b) si stabilisca il valore di  $k$  per il quale  $r$  è massimo;
- c) si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani, ortogonali e monometrici, e, per il valore di  $k$  determinato in b), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo  $ABC$  nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, a  $ABC$ ;
- d) si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

2) Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto. Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:

- a) le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla.

Successivamente, posto il volume della lattina pari a 2 decilitri, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:

- b) nel caso di cui al punto a);
- c) nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia la sezione aurea dell'altezza.

## Questionario

1) Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* illustrandone il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescita o decrescenza delle curve.

2) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la  $f(x)$ ?

3) Dire quale è il dominio della funzione  $f(x) = x^\pi - \pi^x$  e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di  $f(x)$  nel punto  $x = \pi$ .

4) Calcolare, integrando per parti:

$$\int_0^1 \arcsen x \, dx.$$

5) Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di “*concetto primitivo*” e di “*assioma*”.

6) Nell'insieme delle cifre 1, 2, 3, ..., 9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.

7) Verificato che l'equazione  $x^3 - 2x - 5 = 0$  ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8) Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

9) Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo. Ovvero, con i versi di Dante:

*... se nel mezzo cerchio far si puote*

*triangol sì ch'un retto non avesse.*

(Paradiso, XIII, 101-102)

Prove suppletive: [indice](#)

# Esame 2002 suppletiva

## Problemi

1) Se il polinomio  $f(x)$  si divide per  $x^2 - 1$  si ottiene  $x$  come quoziente ed  $x$  come resto.

- a) Determinare  $f(x)$ .
- b) Studiare la funzione

$$y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

e disegnarne il grafico  $G$  in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

- c) Trovare l'equazione della retta  $t$  tangente a  $G$  nel suo punto di ascissa  $\frac{1}{2}$ .
- d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta  $t$  e alla curva  $G$ .
- e) Dopo aver determinato i numeri  $a, b$  tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1},$$

calcolare una primitiva della funzione

$$\frac{f(x)}{x^2 - 1}.$$

2) Una piramide di vertice  $V$ , avente per base il trapezio rettangolo  $ABCD$ , è tale che:

- il trapezio di base è circoscritto ad un semicerchio avente come diametro il lato  $AB$  perpendicolare alle basi del trapezio;
  - lo spigolo  $VA$  è perpendicolare al piano di base della piramide;
  - la faccia  $VBC$  della piramide forma un angolo di  $45^\circ$  col piano della base.
- a) Indicato con  $E$  il punto medio del segmento  $AB$ , dimostrare che il triangolo  $CED$  è rettangolo.
  - b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga  $2a$ , dove  $a$  è una lunghezza assegnata, e che  $BC = 2AD$ , calcolare l'area e il perimetro del trapezio  $ABCD$ .
  - c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base  $ABCD$  della piramide.
  - d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

**Questionario**

1) Si consideri la seguente equazione in  $x, y$ :  $2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0$ , dove  $k$  è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

- a) è una circonferenza per ogni valore di  $k$ ;
- b) è una circonferenza solo per  $k < \frac{1}{2}$ ;
- c) è una circonferenza solo per  $k < \frac{1}{4}$ ;
- d) non è una circonferenza qualunque sia  $k$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

2) Considerata la funzione di variabile reale:  $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ , dire se esiste il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente ad 1 e giustificare la risposta.

3) Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale. Si sa che:  $f(x)$  è derivabile su tutto l'asse reale;  $f(x) = 0$  solo per  $x = 0$ ;  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ ;  $f'(x) = 0$  per  $x = -2$  e  $x = 1$  ed  $f(1) = -2$ . Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di  $f(x)$ ?

4) Sia  $f(x)$  una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{sen} 2x, & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1+a}{\operatorname{sen} x}, & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

dove  $a$  è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di  $a$  per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto  $x = 0$ .

5) Un titolo in borsa ha perso ieri l' $x\%$  del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l' $y\%$ , è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere  $y$  in funzione di  $x$ .

6) Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale  $f(x)$  sia continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  è sufficiente per concludere che  $f(x)$  è integrabile su  $[a, b]$ . Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

7) Una primitiva della funzione  $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+4}$  è:

- a)  $\ln \frac{x}{x+2}$ ;
- b)  $\ln \frac{x+2}{x}$ ;
- c)  $\ln \sqrt{x^2+2x}$ ;
- d)  $\ln \sqrt{2x^2+x}$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

8)  $S_n$  rappresenta la somma dei primi  $n$  numeri naturali dispari. La successione di termine generale  $a_n$  tale che  $a_n = S_n/(2n^2)$ , è: a) è costante, b) crescente, c) decrescente. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

9) Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

10) Di due rette  $a, b$  – assegnate nello spazio ordinario – si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari ad una stessa retta  $p$ .

- a) È possibile che le rette  $a, b$  siano parallele?
- b) È possibile che le rette  $a, b$  siano ortogonali?
- c) Le rette  $a, b$  sono comunque parallele?
- d) Le rette  $a, b$  sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2002 PNI suppletiva

## Problemi

1) Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$  è assegnata la funzione:

$$y = \frac{a + b \ln x}{x}$$

ove  $\ln x$  denota il logaritmo naturale di  $x$  e  $a$  e  $b$  sono numeri reali non nulli.

- Si trovino i valori di  $a$  e  $b$  per i quali il grafico  $G$  della funzione passa per i punti  $(e^{-1}, 0)$  e  $(e^2, 3e^{-2})$ .
- si studi e si disegni  $G$ ;
- si determini l'equazione della curva  $G'$  simmetrica di  $G$  rispetto alla retta  $y = y(1)$  ;
- si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per  $1 \leq x \leq 2$ , da  $G$  e da  $G'$ ;
- si disegnino, per i valori di  $a$  e  $b$  trovati, i grafici di:

$$y = \frac{a + b \ln |x|}{|x|} \quad y = \left| \frac{a + b \ln x}{x} \right|.$$

2) È data la sfera  $S$  di centro  $O$  e raggio  $r$ . Determinare:

- il cono  $C$  di volume minimo circoscritto a  $S$ ;
- il cono  $C'$  di volume massimo inscritto in  $S$ ;
- un'approssimazione in litri della capacità complessiva di  $C$  e  $C'$ , posto  $r = 1$  metro;
- la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono  $C$ ;
- la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono  $C$  applicando uno dei metodi numerici studiati.

## Questionario

- Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).
- Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

3) Calcolare la derivata rispetto a  $x$  della funzione

$$\int_x^a f(t) dt$$

ove  $f(x)$  è una funzione continua.

4) Calcolare:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$ .

5) Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di  $e^x \sin x = 1$  c'è almeno una radice reale di  $e^x \cos x = -1$ .

6) Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e  $x$ , provare che:

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

7) Verificare che la funzione

$$y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$$

è invertibile e detta  $g$  la funzione inversa, calcolare  $g'(0)$ .

8) Con uno dei metodi di quadratura studiati si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x} dx$$

con un errore inferiore a  $10^{-4}$ .

9) Verificato che l'equazione  $\cos x - \log x = 0$  ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

10) Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra “*concetto primitivo*” e “*assioma*”.

# Esame 2003 suppletiva

## Problemi

1) Del triangolo  $ABC$  si hanno le seguenti informazioni:

$$\overline{AB} = 3 \text{ cm} \quad \overline{AC} = 2 \text{ cm} \quad \widehat{CAB} = 60^\circ.$$

Si tracci la bisettrice di  $\widehat{CAB}$  e se ne indichi con  $D$  l'intersezione con il lato  $BC$ .

- 1) Si calcoli la lunghezza del lato  $BC$  e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto  $D$ .
- 2) Si determinino il coseno dell'angolo in  $B$ , la misura di  $AD$  e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici  $B$  e  $C$ .
- 3) Si trovi sul lato  $AD$ , internamente ad esso, un punto  $P$  tale che la somma  $s$  dei quadrati delle sue distanze dai vertici  $A$ ,  $B$  e  $C$  sia  $m^2$  essendo  $m$  un parametro reale dato.
- 4) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro  $m$ .

2) È data una piramide retta a base quadrata.

- 1) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con  $a$ ,  $b$  ( $a > b$ ) e  $h$  rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprima in funzione di  $a$ ,  $b$ ,  $h$  il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.
- 2) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è  $\sqrt{3} \text{ dm}^2$ .
- 3) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.
- 4) Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

## Questionario

- 1) Tra i rettangoli aventi la stessa area di  $16 \text{ m}^2$  trovare quello di perimetro minimo.
- 2) Cosa si intende per "funzione periodica"? Quale è il periodo della funzione

$$f(x) = \sin x - 2 \cos x?$$

- 3) Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è  $24\pi$ .
- 4) Provare che se l'equazione  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ha due soluzioni entrambe di valore  $k$ , allora  $k$  è anche soluzione dell'equazione  $y' = 0$  avendo posto  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . A quale condizione  $k$  è anche soluzione di  $y'' = 0$ ?

5) Dare una giustificazione delle formule

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

e utilizzarle per provare che:

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1.$$

6) Dimostrare che l'equazione  $x^5 + 10x + 1 = 0$  ammette una sola soluzione reale.

7) Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange [ da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813)] e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescita o decrescenza delle curve.

8) Di una funzione  $f(x)$  si sa che la sua derivata seconda è  $2^x$  e si sa ancora che:

$$f(0) = \left(\frac{1}{\log 2}\right)^2 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0.$$

Quale è  $f(x)$ ?

9) Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione  $y = 2e^x - 1$  e dagli assi cartesiani.

10) Definire gli asintoti – orizzontale, obliquo, verticale – di una curva e fornire un esempio di funzione  $f(x)$  il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2003 PNI suppletiva

## Problemi

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a - 1)x^2 - 2ax + a^2,$$

dove  $a$  è un parametro reale diverso da 1.

- Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse  $x$  e quali no.
- Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa  $a$ .
- Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
- Scrivere l'equazione del luogo geometrico  $L$  dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva  $L$  e dalla retta di equazione  $y = \frac{3}{2}$ .

2) In un trapezio rettangolo  $ABCD$ , circoscritto ad un cerchio,  $AB$  è la base maggiore,  $CD$  la minore e  $BC$  il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

- Calcolare le misure dei lati del trapezio.
- Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani  $(Oxy)$ , scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.
- Tra le centro-affinità di equazioni:

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy,$$

trovare quella che trasforma il vertice  $B$  del trapezio nel vertice  $C$  e il vertice  $C$  nel vertice  $D$ .

- Stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite.
- Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro-affinità trovata sopra.

## Questionario

1) Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

[Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

2) Nello spazio ordinario sono dati due piani  $\alpha$ ,  $\beta$  ed una retta  $r$ . Si sa che  $r$  è parallela ad  $\alpha$  e perpendicolare a  $\beta$ . Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di  $\alpha$  e  $\beta$ ? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3) Il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$  è l'insieme degli  $x$  reali tali che:

- A)  $x \leq 0$  e/o  $x > 2$ ;    B)  $x \leq 0$  e/o  $x \geq 2$ ;  
 C)  $x = 0$  e/o  $x > 2$ ;    D)  $x = 0$  e/o  $x \geq 2$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4) Si consideri un polinomio di grado  $n \geq 2$  nella variabile reale  $x$  con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale  $\alpha$  è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per  $x = \alpha$ .

5) Stabilire se esistono i limiti della funzione  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  per:

- a)  $x \rightarrow +\infty$ ;    b)  $x \rightarrow -\infty$ ;    c)  $x \rightarrow 0$ ,

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

6) Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

dove  $k$  è un parametro reale.

Dire se l'affermazione: «il sistema ammette la sola soluzione  $x = 0, y = 0, z = 0$  per ogni valore di  $k$  diverso da 1» è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.

7) Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

8) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ) sono date le affinità di equazioni:

$$x' = (a+1)x - by + a, \quad y' = (a-1)x + 2by - 1,$$

dove  $a, b$  sono parametri reali.

Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.

9) Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estrarre a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:

- a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
- b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
- c) è messa da parte senza guardarne il colore?

10) Considerata l'equazione in  $x$ :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dove  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono numeri reali qualsiasi, con  $a \neq 0$ , scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2004 suppletiva

## Problemi

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , è assegnata la curva  $K$  di equazione:

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}. \quad [1]$$

- Disegnarne l'andamento, indicando con  $A$  il suo punto di massimo relativo.
- Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ , dove  $a, b$  sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse  $x$  e dalla curva  $K$ .
- Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in  $A$  e la base sull'asse  $x$ , determinare quello il cui perimetro è 16.
- Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva  $K$  divide il triangolo trovato sopra.
- Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

2) Una piramide ha per base il quadrato  $ABCD$  di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza  $VH$  della piramide è lunga 7 cm e il suo piede  $H$  è il punto medio del lato  $AB$ . Condurre per la retta  $AB$  il piano  $\alpha$  che formi con il piano della base della piramide un angolo  $\phi$  tale che  $\cos \phi = \frac{3}{5}$  e indicare con  $EF$  la corda che il piano  $\alpha$  intercetta sulla faccia  $VCD$  della piramide.

- Spiegare perché il quadrilatero convesso  $ABEF$  è inscritto in una circonferenza  $\gamma$ .
- Tale quadrilatero è anche circoscrittibile ad una circonferenza?
- Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano  $\alpha$ .
- Dopo aver riferito il piano  $\alpha$  ad un conveniente sistema di assi cartesiani  $(Oxy)$ , determinare l'equazione della circonferenza  $\gamma$ .

## Questionario

1) La funzione  $f(x) = \frac{3x - 2 \operatorname{sen} x}{2x - 3 \operatorname{sen} x}$  è per  $x \rightarrow +\infty$ , una forma indeterminata di tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Il limite della funzione, per  $x \rightarrow +\infty$ : a) non esiste, b) è  $\frac{3}{2}$ , c) è  $\frac{2}{3}$ , d) un valore diverso da  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{2}{3}$ . Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2) Determinare il più grande valore  $n$  per cui l'espressione numerica  $\sum_{k=5}^n k$  non supera 10000.

3) Sia  $F(x)$  una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto  $a$ . Si sa che se  $F'(a) > 0$  allora  $F(x)$  è crescente in  $a$ , mentre se  $F'(a) < 0$  allora  $F(x)$  è decrescente in  $a$ . Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché  $F(x)$  ammetta in  $a$  un massimo relativo è che risulti  $F'(a) = 0$  ed  $F''(a) < 0$ .

4) Risolvere la seguente disequazione in  $x$ ,  $(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$ .

5) Considerato un triangolo equilatero di altezza  $h$  e detto  $P$  un suo qualsiasi punto interno, indicare con  $x, y, z$  le distanze di  $P$  dai lati del triangolo. La somma  $x + y + z$  risulta:

- a) sempre maggiore di  $h$ ,
- b) sempre minore di  $h$ ,
- c) sempre uguale ad  $h$ ,
- d) a volte maggiore di  $h$ , a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6) Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti  $p, q, r$  (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7) Il quadrilatero  $Q''$  avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso  $Q'$  è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero  $Q'$  e darne esauriente dimostrazione.

8) Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale  $\int_0^3 f(x) dx$ . È allora possibile calcolare:

$$\begin{array}{ll} \text{[a]} \int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; & \text{[b]} \int_0^3 f(3x) dx; \\ \text{[c]} \int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; & \text{[d]} \int_0^1 f(3x) dx. \end{array}$$

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

9) Determinare il dominio della funzione  $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4x - 1})$ .

10) Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso,  $\alpha$  e  $\beta$ , sono tali che  $\sin \alpha = 3/5$  e  $\sin \beta = 24/25$ , ne esistono:

- a) 0,   b) 1,   c) 2,   d) 3.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2004 PNI suppletiva

## Problemi

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , è assegnata la curva  $K$  di equazione:

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}. \quad [1]$$

- Disegnarne l'andamento, indicando con  $A$  il suo punto di massimo relativo.
- Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ , dove  $a, b$  sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse  $x$  e dalla curva  $K$ .
- Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in  $A$  e la base sull'asse  $x$ , determinare quello il cui perimetro è 16.
- Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva  $K$  divide il triangolo trovato sopra.
- Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

2) Nel Liceo Scientifico "Torricelli" vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sezione sesso	A	B	C	D
M	12	10	13	8
F	16	18	15	20

- Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.
- Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.
- Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5 A, questa sia formata da alunni di sesso:  
1) maschile, 2) femminile, differente.  
Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?
- Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.
- Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5 D.

**Questionario**

1) La funzione  $f(x) = \frac{3x - 2 \operatorname{sen} x}{2x - 3 \operatorname{sen} x}$  è per  $x \rightarrow +\infty$ , una forma indeterminata di tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Il limite della funzione, per  $x \rightarrow +\infty$ : a) non esiste, b) è  $\frac{3}{2}$ , c) è  $\frac{2}{3}$ , d) un valore diverso da  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{2}{3}$ . Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2) Determinare il più grande valore  $n$  per cui l'espressione numerica  $\sum_{k=5}^n k$  non supera 10000.

3) Sia  $F(x)$  una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto  $a$ . Si sa che se  $F'(a) > 0$  allora  $F(x)$  è crescente in  $a$ , mentre se  $F'(a) < 0$  allora  $F(x)$  è decrescente in  $a$ . Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché  $F(x)$  ammetta in  $a$  un massimo relativo è che risulti  $F'(a) = 0$  ed  $F''(a) < 0$ .

4) Risolvere la seguente disequazione in  $x$ ,  $(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$ .

5) Considerato un triangolo equilatero di altezza  $h$  e detto  $P$  un suo qualsiasi punto interno, indicare con  $x, y, z$  le distanze di  $P$  dai lati del triangolo. La somma  $x + y + z$  risulta:

- a) sempre maggiore di  $h$ ,
- b) sempre minore di  $h$ ,
- c) sempre uguale ad  $h$ ,
- d) a volte maggiore di  $h$ , a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6) Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti  $p, q, r$  (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7) Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.

8) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2. \end{cases}$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto  $(1, 0)$  nel punto  $(1, -1)$  e stabilire se ammette rette unite.

9) Due giocatori,  $A$  e  $B$ , giocano a "Testa o Croce" con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma  $S$ . Chi

vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: «Il giocatore  $A$  lancia la moneta: se esce “Testa” vince, altrimenti il gioco passa a  $B$ . Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene “Croce”, in caso contrario il gioco ritorna ad  $A$ , che ripete il lancio e vince se viene “Testa”. In caso contrario il gioco ripassa a  $B$ , che vince se viene “Croce”. Se  $B$  non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due riprende la somma che aveva puntato». Il gioco è equo?

10) Dopo aver spiegato perché la funzione  $f(x) = \frac{1}{x - \cos x}$  è positiva nell'intervallo  $[1, 2]$ , esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell'area situata sotto il grafico della funzione relativamente all'intervallo considerato.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2005 suppletiva

## Problemi

1) Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base  $ABC$  della piramide sia lungo 4 cm:

1. calcolare la misura dello spigolo della base  $MNP$  del prisma, complanare ad  $ABC$ ;
2. supposto che gli spigoli  $AB$  ed  $MN$  siano paralleli, riferire il piano dei triangoli  $ABC$  ed  $MNP$  ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in  $A$  e l'asse delle ascisse coincidente con la retta  $AB$  e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta  $AB$  e passante per i punti  $A$ ,  $B$ ,  $M$  e verificare che passa pure per  $N$ ;
4. calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli  $ABC$  ed  $MNP$ ;
5. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo  $MNP$  rispetto al triangolo  $ABC$ .

2) È assegnata la funzione

$$f_a(x) = \frac{a}{1+x^2},$$

dove  $a$  è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione  $f_a(x)$  è limitata.
2. Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$  ed indicato con  $A$  il punto di massimo del grafico  $G$  della funzione quando  $a > 0$ , scrivere l'equazione della circonferenza  $g$  di diametro  $OA$ .
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza  $g$  e la curva  $G$ , quando  $a$  varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore  $\bar{a}$  di  $a$  per il quale la circonferenza  $g$  e la curva  $G$  hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5. Dopo aver controllato che il valore  $\bar{a}$  sopraddetto è 4, indicare con  $\bar{\gamma}$  e  $\bar{G}$  la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva  $\bar{G}$  divide il cerchio delimitato da  $\bar{\gamma}$ .

**Questionario**

1) È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle base del trapezio.

2) Siano  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo  $s$ , calcolare la distanza del vertice  $A$  dal piano dei punti  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

3) Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione:  $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ . Alberto ottiene come soluzione gli angoli  $x$  tali che

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad k \text{ intero qualsiasi};$$

Gianna trova la seguente soluzione:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad k \text{ intero qualsiasi.}$$

È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

4) Si consideri la seguente equazione in  $x$ :  $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$  dove  $k$  è un parametro reale diverso da 2. Indicate con  $x'$  ed  $x''$  le sue radici, calcolare i limiti di  $x' + x''$  quando  $k$  tende a 2, a  $+\infty$  e a  $-\infty$ .

5) Il limite della funzione  $(1-x)^{1/x}$  per  $x \rightarrow 0$ :

[A] è uguale ad 1;

[B] è uguale a  $+\infty$ ;

[C] non esiste;

[D] è uguale ad  $e$ ;

[E] è uguale ad  $\frac{1}{e}$ , essendo “ $e$ ” la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6) Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale  $f(x)$  avente le seguenti caratteristiche:  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 0$ ,  $f''(1) < 0$ .

7) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sono assegnate le rette  $r$  ed  $s$  di equazioni rispettivamente  $2x + my = 1$  e  $mx - 2y = 2$ , dove  $m$  è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di  $m$ ?

8) È vero o falso che le due funzioni  $\ln(x^2 - 4)$  e  $\ln(x + 2) + \ln(x - 2)$  hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

9) Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio  $(a + b)^{10}$ , ordinati secondo le potenze decrescenti di  $a$  e crescenti di  $b$ , sono rispettivamente:

$$a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, ab^9, b^{10}.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

10) Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2005 PNI suppletiva

## Problemi

1) Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base  $ABC$  della piramide sia lungo 4 cm:

1. calcolare la misura dello spigolo della base  $MNP$  del prisma, complanare ad  $ABC$ ;
2. supposto che gli spigoli  $AB$  ed  $MN$  siano paralleli, riferire il piano dei triangoli  $ABC$  ed  $MNP$  ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in  $A$  e l'asse delle ascisse coincidente con la retta  $AB$  e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta  $AB$  e passante per i punti  $A$ ,  $B$ ,  $M$  e verificare che passa pure per  $N$ ;
4. dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo  $ABC$  nel triangolo  $MNP$  è una similitudine, trovarne le equazioni;
5. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo  $MNP$  rispetto al triangolo  $ABC$ .

2) È assegnata la funzione

$$f_a(x) = \frac{a}{1+x^2},$$

dove  $a$  è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione  $f_a(x)$  è limitata.
2. Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$  ed indicato con  $A$  il punto di massimo del grafico  $G$  della funzione quando  $a > 0$ , scrivere l'equazione della circonferenza  $g$  di diametro  $OA$ .
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza  $g$  e la curva  $G$ , quando  $a$  varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore  $\bar{a}$  di  $a$  per il quale la circonferenza  $g$  e la curva  $G$  hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5. Verificare che esiste un valore  $a'$  di  $a$  per il quale la funzione  $f_{a'}(x)$  si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

**Questionario**

1) È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle base del trapezio.

2) Siano  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo  $s$ , calcolare la distanza del vertice  $A$  dal piano dei punti  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

3) Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione:  $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ . Alberto ottiene come soluzione gli angoli  $x$  tali che

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad k \text{ intero qualsiasi;}$$

Gianna trova la seguente soluzione:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad k \text{ intero qualsiasi.}$$

È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

4) Si consideri la seguente equazione in  $x$ :  $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$  dove  $k$  è un parametro reale diverso da 2. Indicate con  $x'$  ed  $x''$  le sue radici, calcolare i limiti di  $x' + x''$  quando  $k$  tende a 2, a  $+\infty$  e a  $-\infty$ .

5) Il limite della funzione  $(1-x)^{1/x}$  per  $x \rightarrow 0$ :

[A] è uguale ad 1;

[B] è uguale a  $+\infty$ ;

[C] non esiste;

[D] è uguale ad  $e$ ;

[E] è uguale ad  $\frac{1}{e}$ , essendo “ $e$ ” la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6) Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale  $f(x)$  è nulla per ogni  $x$  di un dato intervallo  $J$ , allora  $f(x)$  è costante in  $J$ .

7) Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  non necessariamente ammette primitiva in  $[a, b]$ .

8) In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

9) Si consideri il seguente sistema nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

dove  $a$  è un parametro reale. Il sistema è:

[A] determinato per ogni valore di  $a$ ;

[B] indeterminato per un valore di  $a$  ed impossibile per un valore di  $a$ ;

[C] indeterminato per nessun valore di  $a$ , ma impossibile per un valore di  $a$ ;

[D] impossibile per nessun valore di  $a$ , ma indeterminato per un valore di  $a$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

10) Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$x' = 2x + my - 1, \quad y' = mx - 2y - 2,$$

dove  $m$  è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2006 suppletiva

## Problemi

1) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sono assegnate le due parabole  $p'$  e  $p''$  di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

- Fornire la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
  - Indicato con  $V'$  il vertice della parabola  $p'$ , con  $V''$  il vertice della parabola  $p''$  e con  $P$  il punto in cui  $p''$  interseca il semiasse positivo delle  $y$ , calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco  $V'V''$  della parabola  $p'$ , dall'arco  $V''P$  della parabola  $p''$  e dal segmento  $V'P$ .
  - Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in  $O$  e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
  - Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione  $y = 4$  e dalla parabola  $p'$ , inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse  $y$  ed area massima.
  - Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.
- 2) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2},$$

dove  $k$  è un parametro reale non nullo.

- Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
- Tra le curve assegnate, indicare con  $\gamma$  quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione  $x + 27y - 9 = 0$ .
- Disegnare l'andamento di  $\gamma$ , dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta  $t$  tangente alla curva  $\gamma$  nel punto  $A$  di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che  $t$  ha in comune con  $\gamma$ .
- Determinare l'equazione della circonferenza  $c$ , tangente alla curva  $\gamma$  nel punto  $A$  ed avente il centro sull'asse  $y$ .
- Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse  $x$  divide il cerchio delimitato da  $c$ .

**Questionario**

1) Si considerino il rettangolo  $ABCD$  e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta  $AD$ , il vertice nel punto medio del lato  $AB$  e passante per i punti  $C$  e  $D$ . In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume  $V'$  e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta  $CD$  genera un solido di volume  $V''$ . Determinare il rapporto  $V'/V''$ .

2) Il numero delle soluzioni dell'equazione  $\sin 2x \cos x = 2$  nell'intervallo reale  $[0, 2\pi]$  è:

$$[A] 0; \quad [B] 2; \quad [C] 3; \quad [D] 5.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3) Il limite della funzione  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , per  $x \rightarrow 0$ :

$$[A] \text{ non esiste}; \quad [B] \text{ è } 0; \quad [C] \text{ è un valore finito diverso da } 0; \quad [D] \text{ è } +\infty.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4) Trovare, col procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ .

5) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".

6) Determinare il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.

7) Considerata la funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , affermare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

significa che per ogni numero reale  $M$ , esiste un numero reale  $N$  tale che, per ogni  $x$ , se  $x > N$  allora  $f(x) > M$ .

È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

8) È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo  $L$ . Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un  $n$ -esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo  $(n-1)$ -esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli  $n$  triangoli quando  $n$  tende ad  $\infty$ .

9) Si consideri la seguente uguaglianza:  $\ln(2x+1)^4 = 4 \ln(2x+1)$ . È vero o falso che vale per ogni  $x$  reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10) Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno ad un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia "1", posta a capotavola, è riservata al ragazzo "1", che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2006 PNI suppletiva

## Problemi

1) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sono assegnate le due parabole  $p'$  e  $p''$  di equazioni rispettivamente:  $y = x^2$ ,  $x = y^2 - 2y$ .

- Fornire la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
- Indicato con  $V'$  il vertice della parabola  $p'$ , con  $V''$  il vertice della parabola  $p''$  e con  $P$  il punto in cui  $p''$  interseca il semiasse positivo delle  $y$ , calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco  $V'V''$  della parabola  $p'$ , dall'arco  $V''P$  della parabola  $p''$  e dal segmento  $V'P$ .
- Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in  $O$  e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
- Le due parabole  $p'$  e  $p''$  sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno un'isometria che trasforma una di esse nell'altra e trovando le equazioni di tale isometria.
- Stabilire se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

2) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2},$$

dove  $k$  è un parametro reale non nullo.

- Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
- Tra le curve assegnate, indicare con  $\gamma$  quella che ha come tangente inflessionale la retta  $r$  di equazione  $x + 27y - 9 = 0$ .
- Disegnare l'andamento di  $\gamma$ , dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta  $t$  tangente alla curva  $\gamma$  nel punto  $A$  di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto  $B$  che  $t$  ha in comune con  $\gamma$ .
- Trovare l'equazione della circonferenza di diametro  $AB$ .
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva  $\gamma$ , dalla retta  $r$  e dall'asse  $x$ .

**Questionario**

1) Si considerino il rettangolo  $ABCD$  e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta  $AD$ , il vertice nel punto medio del lato  $AB$  e passante per i punti  $C$  e  $D$ . In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume  $V'$  e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta  $CD$  genera un solido di volume  $V''$ . Determinare il rapporto  $V'/V''$ .

2) Il numero delle soluzioni dell'equazione  $\sin 2x \cos x = 2$  nell'intervallo reale  $[0, 2\pi]$  è:

$$[A] 0; \quad [B] 2; \quad [C] 3; \quad [D] 5.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3) Il limite della funzione  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , per  $x \rightarrow 0$ :

$$[A] \text{ non esiste}; \quad [B] \text{ è } +\infty; \quad [C] 0; \quad [D] \text{ è un valore finito diverso da } 0.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4) Dimostrare che la funzione  $f(x) = x^a$ , dove  $a$  è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.

5) Il seguente teorema esprime la condizione d'integrabilità di Mengoli–Cauchy: *Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , è ivi continua, allora ivi è anche integrabile.*

Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

6) Dire se è corretto o no, affermare che si ha:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

dove  $c$  è una costante arbitraria e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

7) Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".

8) Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

9) Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca. Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, NON sia di plastica nera.

10) In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2007 suppletiva

## Problemi

1) Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), si consideri il punto  $A(2, 0)$ .

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta  $OB$  con la tangente alla circonferenza in  $B$ , essendo  $B$  il punto della curva avente la stessa ascissa di  $A$  e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per  $B$ ; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $C$ .
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento  $OB$  e dall'arco  $OB$  della suddetta parabola cubica.

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $C$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ).
2. Si determinino le coordinate del punto  $A$ , in cui la curva  $C$  incontra la curva  $C'$  rappresentativa dell'equazione  $y = e^x$ .
3. Si scrivano l'equazione della tangente alla curva  $C$  nell'origine e l'equazione della tangente alla curva  $C'$  nel punto  $A$ .
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva  $C$ , dall'asse  $x$  e dalla retta di equazione  $x = \log 3$ .

## Questionario

1) Si calcoli il limite della funzione  $\frac{x^2 \cos x}{x^2 - \sin^2 x}$ , quando  $x$  tende a 0.

2) Si determini il campo di esistenza della funzione  $y = \arcsen(\operatorname{tg} x)$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

3) Si calcoli il valore medio della funzione  $y = \operatorname{tg}^2 x$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .

- 4) Si provi che per la funzione  $f(x) = x^3 - 8$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2$ , sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
- 5) Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio  $r$ , si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.
- 6) Si consideri la seguente proposizione: "Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
- 7) Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

- 8) Si determini l'area della regione piana limitata dalla curva di equazione  $y = e^x$ , dalla curva di equazione  $y = x^3$  e dalle rette  $x = 0$  e  $x = 1$ .
- 9) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x + 2}$ .
- 10) Si risolva la disequazione  $\binom{x}{3} > \frac{15}{2} \binom{x}{2}$ .

Prove suppletive: [indice](#)

# Esame 2007 PNI suppletiva

## Problemi

1) Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t) dt$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $C$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ .
  2. Si scriva l'equazione della normale alla curva  $C$  nel punto di ascissa  $\log 2$ .
  3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva  $C$ , dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione  $x = \log 3$ .
  4. Tenuto conto che:  $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ , si calcoli un valore approssimato di  $\log 2$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.
- 2) Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$  si consideri il punto  $A(2, 0)$ .
1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

- controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta  $OB$  con la tangente alla circonferenza in  $B$ , essendo  $B$  il punto della curva avente la stessa ascissa di  $A$  e ordinata positiva.
  3. Si scriva l'equazione della parabola cubica  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per  $B$ ; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $C$ .
  4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento  $OB$  e dall'arco  $OB$  della suddetta parabola cubica.

## Questionario

- 1) Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle  $x$  della regione finita di piano delimitata dalla curva  $y = 2/x$  e dalla retta di equazione  $y = -x + 3$ .
- 2) Si calcoli il valore medio della funzione  $y = \sin^3 x$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ .

- 3) Data la funzione  $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$ , nell'intervallo chiuso  $[1, 2]$ , si determini il valore di  $k$  per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
- 4) Si consideri la seguente proposizione: "In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
- 5) Si dimostri che l'equazione  $e^x - x^3 = 0$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
- 6) Si scelga a caso un punto  $P$  all'interno del cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.
- 7) Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi  $a, b$  è  $S = \pi ab$ .
- 8) Si calcoli il limite della funzione  $\frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$ , quando  $x$  tende a 0.
- 9) Si verifichi che la curva di equazione  $y = x^3 + 3x^2 - 1$  è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.
- 10) Si risolva la disequazione  $5 \binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3}$ .

# Esame 2008 suppletiva

## Problemi

- 1) Dato un quadrante  $AOB$  di cerchio, di centro  $O$  e raggio 2, si consideri sull'arco  $AB$  un punto  $P$ .
  1. Si esprima in funzione di  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  (con  $x = \widehat{BOP}$ ) l'area del quadrilatero  $OMPN$ , essendo  $M$  ed  $N$  i punti medi dei raggi  $OA$  e  $OB$ .
  2. Si studi la funzione  $f(t)$  così ottenuta e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
  3. Si dica per quale valore di  $x$  l'area del quadrilatero assume valore massimo.
  4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva  $\gamma$  e l'asse  $x$ .
- 2) Si consideri la funzione:  $y = \operatorname{sen} x(2 \cos x + 1)$ .
  1. Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma  $\gamma$  passa per il punto  $P(\pi, 0)$ .
  2. Si rappresenti graficamente la curva  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$  e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta  $x = \pi$ .
  3. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti alla curva nei suoi due punti  $A$  e  $B$  di ascisse  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3}{2}\pi$  e si determini il loro punto d'intersezione  $C$ .
  4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

## Questionario

- 1) Si determini la distanza delle due rette parallele:  $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ ,  $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$ .
- 2) Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio  $r$  in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza  $x$  dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.
- 3) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}.$$

- 4) Si calcoli il limite della funzione:

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x},$$

quando  $x$  tende a 0.

- 5) Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .
- 6) Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.
- 7) La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione  $y = e^{x/2}(x + 1)$  e dall'asse  $x$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$  è la base di un solido  $S$  le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di  $S$ .
- 8) Si stabilisca per quali valori del parametro reale  $k$  esiste una piramide triangolare regolare tale che  $k$  sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.
- 9) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$$

nel punto  $P$  di ascissa  $x = \frac{\pi}{2}$ .

- 10) Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti  $P(1 + t^2, 1 + t^2)$ , ottenuto al variare di  $t$  nei reali.

Prove suppletive: [indice](#)

# Esame 2008 PNI suppletiva

## Problemi

1) Siano dati un cerchio di raggio  $r$  ed una corda  $AB$  uguale al lato del quadrato in esso iscritto.

1. Detto  $P$  un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi  $A$  e  $B$ , si consideri il rapporto:

$$\frac{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}$$

e lo si esprima in funzione di  $x = \text{tg } P\hat{A}B$ .

2. Si studi la funzione  $f(x)$  così ottenuta e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
  3. Detto  $C$  il punto d'intersezione della curva  $\gamma$  con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a  $\gamma$  in  $C$ .
  4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva  $\gamma$ , la suddetta tangente e la retta di equazione  $x = k$ , essendo  $k$  l'ascissa del punto di massimo relativo.
- 2) Si consideri la funzione:  $y = a \text{sen}^2 x + b \text{sen} x + c$ .
1. Si determinino  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , in modo che il suo grafico  $\gamma$  passi per  $A(0, 2)$ , per  $B(\frac{\pi}{6}, 0)$  ed abbia in  $B$  tangente parallela alla retta  $3\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$ .
  2. Si rappresenti graficamente la curva  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
  3. Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta  $y = 2$  e la curva stessa.
  4. Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per  $P(0, 6)$  e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

## Questionario

- 1) Si determinino le costanti  $a$  e  $b$  in modo che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile nel punto  $x = 0$ .

- 2) Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine  $\lambda = 23^\circ 27'$  nord)?

- 3) Si determini il numero reale positivo  $\lambda$  in modo che la curva rappresentativa della funzione  $g(x) = e^{-\lambda x}$  divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione  $f(x) = e^{\lambda x}$ , dall'asse  $x$  e dalle rette  $x = 0$  e  $x = 1$ .
- 4) Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata si ottenga 4 volte testa.
- 5) Si dimostri che l'equazione  $(3 - x)e^x - 3 = 0$  per  $x > 0$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
- 6) Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio  $r$  è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.
- 7) Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = \arccos \sqrt{1 - x^2}$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .
- 8) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 4)$ . Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto  $C$  dal quale il segmento  $AB$  è visto con un angolo di massima ampiezza.
- 9) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{\log x}} \frac{e^t}{t} dt$$

nel punto  $P$  di ascissa  $x = e$ .

- 10) Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

si calcoli un'approssimazione di  $\pi$ , utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2009 suppletiva

## Problemi

1) I due segmenti adiacenti  $OA$ ,  $AB$  sono uguali ed hanno una lunghezza data  $a$ . Nel medesimo semipiano rispetto alla retta  $OB$  si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi  $OA$  ed  $OB$ , e per il punto  $O$  si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento  $OC = a$ . Con origine  $O$ , si conduca una semiretta, che forma con  $OB$  un angolo  $\alpha$  e interseca in  $P$  e  $Q$  le semicirconferenze.

1. Si calcoli il rapporto:

$$\frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2} \quad (1)$$

e lo si esprima in funzione di  $x = \operatorname{tg} \alpha$ , controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $y$ .
  3. Si dica per quale valore di  $\alpha$  si hanno rispettivamente il massimo e minimo del rapporto (1).
  4. Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva  $\gamma$  e dal suo asintoto.
- 2) Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x), & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0? È derivabile in tale punto?
2. Si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ).
3. Si calcoli l'espressione, in funzione di  $t$  ( $t > 0$ ), dell'integrale

$$\mathcal{I}(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx.$$

4. Si faccia vedere che  $\mathcal{I}(t)$  tende verso un limite finito quando  $t$  tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente?

**Questionario**

1) Una piramide, avente area di base  $B$  e altezza  $h$ , viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.

2) Si calcoli il limite della funzione  $\frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \operatorname{sen}^2(x - 1)}$  quando  $x$  tende a 1.

3) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della porzione di piano limitata dalla curva  $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , dall'asse  $x$  e dalle rette  $x = 1$ ,  $x = \sqrt{3}$ .

4) Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

5) Si determini il luogo  $\gamma$  dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0,$$

$$(1 - \lambda)x + y + 2 = 0,$$

descritto al variare di  $\lambda$ , parametro reale qualunque. Si disegni la curva  $\gamma$ .

6) Sono dati un angolo  $\alpha$  di  $\pi^2$  radianti e un angolo  $\beta$  di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di  $\alpha$  o il seno di  $\beta$ .

7) Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto  $B$  partendo dal punto  $A$  e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di  $23^\circ$  in modo da dirigere ora esattamente verso il porto  $B$ , che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?

8) Data la parabola  $x = -ay^2 + 3y$  (con  $a > 0$ ), si determini per quale valore di  $a$  l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse  $y$  è uguale a 72.

9) Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.

10) Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

# Esame 2009 PNI suppletiva

## Problemi

1) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x^2 + 1}, & \text{per } x < 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \\ \operatorname{arctg} \operatorname{sen} x, & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

1. Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto  $x = 0$ .
2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ . Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
3. Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel II quadrante, delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalla retta di equazione  $x = -1$ .
4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle  $x$  e dall'arco di  $\gamma$  i cui estremi hanno ascisse 0 e  $\pi$ .

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

1. Si determinino le costanti  $a$  e  $b$  in modo che risulti:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx = \frac{10}{3} - 6 \ln \frac{5}{3}.$$

2. Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
3. Si conduca la tangente a  $\gamma$  nel punto di ascissa  $x = 0$  e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.
4. La retta  $y = k$  incontri  $\gamma$  in due punti di ascissa  $x_1$  e  $x_2$ . Si esprimano, in funzione di  $k$ , la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità

$$S = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$$

è indipendente dal valore di  $k$  e se ne calcoli il valore.

**Questionario**

1) Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità  $p = 1/2$  assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?

2) Sul diametro  $MN$  di un cerchio, si considerino due punti  $P$  e  $Q$ , e su  $MP$ ,  $MQ$ ,  $NP$ ,  $NQ$  come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta  $MN$ , gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo (*pelecoide*) così ottenuto ha la stessa lunghezza della circonferenza data.

3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \frac{e^{t^2}}{|t| + 1} dt$$

nel punto  $P$  di ascissa  $x = \pi/2$ .

4) Siano dati una sfera di raggio  $r$ , il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.

5) Nell'omotetia di centro  $O(0,0)$  e rapporto  $k = -4$ , si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ . Si confrontino fra loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

6) Dati due punti  $A$  e  $B$  distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti  $C$  dello spazio tali che il triangolo  $ABC$  sia rettangolo in  $A$  ed abbia area uguale a 1 cm<sup>2</sup>.

7) Si discuta il seguente sistema lineare omogeneo in relazione al parametro reale  $\lambda$  e si determinino in ogni caso le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ (\lambda - 1)x + \lambda y + 4z = 0 \\ \lambda x + 5y + (2\lambda + 1)z = 0. \end{cases}$$

8) Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggior ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Si calcolino la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore.

9) Si consideri un cerchio di centro  $O$  e raggio  $r$  e sia  $A$  un punto della circonferenza. Sia inoltre  $OB$  un raggio mobile che forma l'angolo  $2x$  con  $OA$ . Facendo ruotare la figura attorno ad  $OA$ , il segmento  $AB$  genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelta in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza  $x$  dell'angolo perché quest'area sia massima?

10) Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di  $18,45^\circ$ . Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale  $10,05^\circ$ . Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2010 suppletiva

## Problemi

1) Data una circonferenza di centro  $O$  e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti  $A, B, C$ , tali che  $AB = BC$ .

1. Si calcoli, in funzione dell'angolo  $A\hat{O}B = x$ , la quantità:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

controllando che risulti:

$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8.$$

2. Si studi la funzione  $f(x)$  e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
3. Si verifichi che la curva  $\gamma$  è simmetrica rispetto alla retta di equazione  $x = \pi$ .
4. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x)$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

2) Sia data la funzione  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ .

1. Si determini il dominio di  $f(x)$  e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
3. Si calcoli l'area della parte di piano  $R$  racchiusa dal grafico  $\gamma$  e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione  $R$  genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido  $S$ . In  $S$  si inscriba un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

## Questionario

1) In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a  $18^\circ$  e  $24^\circ$ . Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2) Considerata la funzione  $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$ , dove  $a$  è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .

3) Su un piano orizzontale  $\alpha$  si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è  $r$  e l'altezza  $2r$ , e una sfera di raggio  $r$ . A quale distanza  $x$  dal piano

$\alpha$  bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale  $\beta$ , perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4) Si dimostri che per gli zeri  $x_1$  e  $x_2$  di una funzione  $f(x) = ax^2 + bx + c$  vale la relazione  $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$  e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

5) Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ , nell'intervallo  $1 \leq x \leq 2$ .

6) Si determinino  $a$  e  $b$  in modo tale che il grafico della funzione  $y = a^{x+b}$  passi per i punti del piano  $xy$  di coordinate  $(1, 4)$  e  $(3, 8)$ .

7) Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza  $l$ . Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.

8) Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche  $x = 2t$  e  $y = \frac{2}{t^2 + 1}$  nel suo punto di coordinate  $(2, 1)$ .

9) Si dimostri che se una funzione  $f(x)$  è derivabile nel punto  $x_0$ , ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.

10) Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.

[Prove suppletive: indice](#)

# Esame 2010 PNI suppletiva

## Problemi

1) È data una circonferenza di centro  $O$  e diametro  $\overline{AB} = 2$ . Sul prolungamento del diametro  $AB$ , dalla parte di  $B$ , si prenda un punto  $P$  e da esso si conduca una tangente alla circonferenza.

1. Detti  $T$  il punto di tangenza e  $Q$  il punto di intersezione di questa tangente con la tangente in  $A$  alla circonferenza, si calcoli il rapporto:

$$\frac{\overline{TQ}^2 + \overline{TP}^2}{\overline{AP}^2},$$

espresso in funzione di  $x = \overline{BP}$ , controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
3. Si calcolino i numeri  $a, b, c$  in modo che risulti:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 2}. \quad (1)$$

4. Tenendo presente la scomposizione (1), si calcoli l'area della regione piana, limitata da  $\gamma$ , dal suo asintoto orizzontale e dalla retta d'equazione  $x = 2$ .
- 2) In un sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ , si denoti con  $\Gamma_a$  il grafico della funzione

$$f_a(x) = (x - a)e^{2 - \frac{x}{a}}$$

dove  $a$  è un parametro reale positivo ed  $e$  è il numero di *Nepero*.

1. Si dimostri che, al variare di  $a$ , le curve  $\Gamma_a$  tagliano l'asse delle  $x$  secondo lo stesso angolo  $\alpha$ . Si determini l'ampiezza di  $\alpha$  in gradi e primi sessagesimali.
2. Si dimostri che la tangente a  $\Gamma_a$  nel punto di flesso, descrive, al variare di  $a$ , un fascio di rette parallele. Si determini l'equazione di tale fascio.
3. Posto  $a = 1$ , si studi  $f_1(x)$  e si tracci  $\Gamma_1$ .
4. Si calcoli l'area  $S(k)$  della regione di piano del primo quadrante delimitata da  $\Gamma_1$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = k$ , con  $k > 1$ . Cosa si può dire di  $S(k)$  quando  $k \rightarrow +\infty$ ?

**Questionario**

1) In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a  $18^\circ$  e  $24^\circ$ . Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2) Considerata la funzione  $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$ , dove  $a$  è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .

3) Su un piano orizzontale  $\alpha$  si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è  $r$  e l'altezza  $2r$ , e una sfera di raggio  $r$ . A quale distanza  $x$  dal piano  $\alpha$  bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale  $\beta$ , perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4) Si dimostri che per gli zeri  $x_1$  e  $x_2$  di una funzione  $f(x) = ax^2 + bx + c$  vale la relazione  $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$  e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

5) Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ , nell'intervallo  $1 \leq x \leq 2$ .

6) Si determini il punto della parabola  $4y = x^2$  più vicino al punto di coordinate  $(6, -3)$ .

7) Si consideri l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0.$$

Si dimostri che essa ammette una soluzione reale  $x_0$  tale che  $1 < x_0 < 2$ . Avvalendosi di un qualsiasi procedimento iterativo si determini  $x_0$  a meno di  $1/100$ .

8) Nel piano cartesiano  $Oxy$  è dato il cerchio  $C$  con centro nell'origine e raggio  $r = 3$ ; siano  $P(0, 3)$  e  $Q(2, \sqrt{5})$  punti di  $C$ . Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse  $x$  del quadrilatero mistilineo  $PORQ$  (con  $R$  proiezione di  $Q$  sull'asse  $x$ ).

9) Siano dati un ottaedro regolare di spigolo  $l$  e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.

10) Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è  $27/38$ .

Prove suppletive: [indice](#)

# Esame 2011 suppletiva

## Problemi

1) Data una semicirconferenza di diametro  $AB = 2$ , si prenda su di essa un punto  $P$  e sia  $M$  la proiezione di  $P$  sulla retta perpendicolare in  $B$  ad  $AB$ .

1. Si esprima la somma  $AP + PM$  in funzione di  $x = P\widehat{A}B$ .
2. Si studi la funzione  $f(x)$  così ottenuta e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2\pi$ , mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che  $\gamma$  è simmetrica rispetto alla retta  $x = \pi$ .
4. Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva  $\gamma$ , dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione  $x = \frac{\pi}{3}$ .

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .
2. Si scrivano l'equazione della tangente a  $\gamma$  nel punto di flesso e quella della retta ad essa parallela, passante per il punto di  $\gamma$  avente ascissa  $\sqrt{3}$ ; si calcoli l'area del parallelogramma formato da queste due rette, dall'asse  $x$  e dall'asintoto orizzontale destro.
3. Si calcoli l'area della regione  $A_k$ , delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse  $y$ , dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta  $x = k$  con  $k > 0$ . Si calcoli poi il limite di  $A_k$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .
4. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della porzione di piano limitata dalla curva  $\gamma$ , dalla tangente inflessionale e dalla retta  $x = 1$ .

## Questionario

1) Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di  $30^\circ$ . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a  $20^\circ$ , con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2) La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2}$$

non è definita nel punto  $x = 0$ , che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della  $f(x)$  per  $x$  tendente a zero da sinistra e per  $x$  tendente a zero da destra.

3) La retta di equazione  $x = 8$  seca la parabola di equazione  $x = y^2 - 4y + 3$  nei punti  $A$  e  $B$ . Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base  $AB$  si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse della parabola.

4) Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3 \cos x + \operatorname{sen}^2 x - 3)^{\cos x}$$

Che succederebbe se l'esponente fosse  $\operatorname{sen} x$ ?

5) Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .

6) Si dica se l'equazione:

$$2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x = 3 + 2^x$$

ha soluzione.

7) Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.

8) Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera  $f(x)$  è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata  $f'(x)$  è simmetrico rispetto all'origine".

9) Si calcoli il limite della funzione  $\frac{e^{x^3} - 1}{x \operatorname{sen}^2 x}$  quando  $x$  tende a 0.

10) Data una circonferenza di centro  $O$ , si conducano negli estremi  $A$  e  $B$  di un suo diametro  $AB$  le tangenti e siano  $C$  e  $D$  i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza.

Si dimostri che l'angolo  $C\hat{O}D$  è retto.

Prove suppletive: [indice](#)

# Esame 2011 PNI suppletiva

## Problemi

1) È dato un quadrato  $ABCD$  di lato  $AB = a$ . Da  $A$  si conduca una semiretta, che incontra il lato  $BC$  in  $E$  e il prolungamento del lato  $DC$  in  $F$ .

1. Si calcoli il rapporto:

$$\frac{BE + DF}{AB},$$

espresso in funzione di  $x = \widehat{BAE}$ , controllando che risulta.

$$f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x.$$

2. Si studi la funzione  $f(x)$  e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ .
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva  $\gamma$  e dalla retta di equazione  $y = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ .
4. La regione finita di piano delimitata dalla curva  $\gamma$  e dall'asse  $x$  nell'intervallo  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  è la base di un solido  $S$ , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $S$ .

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = (3 - x)\sqrt{x + 3}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .
2. Si scriva l'equazione della tangente  $t$  alla curva  $\gamma$  nel punto di intersezione con l'asse  $\gamma$  e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.
3. Si calcoli il volume del cono  $S$  generato da una rotazione completa attorno all'asse  $x$  del suddetto triangolo e il volume del solido  $S'$  generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva  $\gamma$  e dagli assi cartesiani.
4. Si scelga a caso un punto all'interno del cono  $S$ . Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al solido  $S'$ .

## Questionario

1) Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da

lei in linea retta, con un angolo di elevazione di  $30^\circ$ . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a  $20^\circ$ , con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2) La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2}$$

non è definita nel punto  $x = 0$ , che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della  $f(x)$  per  $x$  tendente a zero da sinistra e per  $x$  tendente a zero da destra.

3) La retta di equazione  $x = 8$  seca la parabola di equazione  $x = y^2 - 4y + 3$  nei punti  $A$  e  $B$ . Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base  $AB$  si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse della parabola.

4) Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3 \cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}$$

Che succederebbe se l'esponente fosse  $\sin x$ ?

5) Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .

6) Si determini un numero positivo  $N$  tale che, per  $x > N$ , la funzione  $f(x) = 2^{0,3x}$  è sempre maggiore della funzione  $g(x) = x^{30}$ .

7) Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx,$$

si calcoli un'approssimazione di  $\frac{\pi}{2}$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8) La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  e dagli assi cartesiani è la base di un solido  $F$  le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse  $y$  sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di  $F$ .

9) Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità  $\frac{1}{2}$  di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1?

10) Sia  $P$  un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso  $A$  e  $B$ , l'angolo  $\widehat{APB}$  sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.

# Esame 2012 suppletiva

## Problemi

1) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza  $x$  del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di  $180^\circ$  intorno alla congiungente dei punti medi delle basi, controllando che risulta:

$$\mathcal{V}(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\cos^2 x - 3 \cos x + 3}{\sin^2 x}$$

2. Si studi la funzione  $f(x) = 3\mathcal{V}(x)/\pi$  e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 < x < 2\pi$ , mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si scriva l'equazione della tangente a  $\gamma$  nel punto di ascissa  $x = \pi/2$  e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con l'asse  $x$  e con la retta di equazione  $x = \pi$ .
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalle rette di equazione  $x = \pi/4$  e  $x = \pi/2$ .

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\sqrt{2-x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .
2. Si risolva la disequazione:

$$x\sqrt{2-x} < 1$$

3. Si scriva l'equazione della tangente alla curva  $\gamma$  nel punto di intersezione con l'asse  $y$  e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo  $\phi$  che essa forma con la direzione positiva dell'asse  $x$ .
4. La regione finita di piano delimitata dalla curva  $\gamma$  e dall'asse  $x$  nel I quadrante è la base di un solido  $S$ , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di  $S$ .

## Questionario

1) Si divida il segmento  $AB = a$  in due parti  $AC$  e  $CB$ , in modo che, costruito su  $AC$  il quadrato  $ACDE$  e su  $CB$  il triangolo equilatero  $CBF$ , sia minima l'area del pentagono  $ABFDE$ .

2) Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \log(\operatorname{sen} 2x), & \text{per } 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto  $x = 0$ .

3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x + 2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto  $P(0, 2)$ .

4) La superficie piana  $S$ , delimitata dalla curva  $\gamma$  di equazione  $y = 1 + \operatorname{tg} x$  e dall'asse  $x$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi/4$ , è la base di un solido  $\Sigma$ , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $\Sigma$ .

5) Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di  $4^\circ$ ; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura  $9^\circ$ . Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

6) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x.$$

7) Un ottaedro regolare di alluminio (densità  $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$ ), avente lo spigolo  $l = 5 \text{ cm}$ , presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è  $m = 155 \text{ g}$ , si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità.

8) Quante diagonali ha un poligono convesso di  $n$  lati?

9) Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

nell'intervallo  $a \leq x \leq b$ , con  $0 < a < b$ , e si dimostri che esso è uguale alla media geometrica tra i due valori che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo.

10) Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$$

si verifichi che esiste un solo punto  $\xi$  interno all'intervallo chiuso  $[-1, 0]$ , tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

# Esame 2012 PNI suppletiva

## Problemi

1) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza  $x$  del suo angolo acuto, l'area della superficie del trapezio, controllando che risulta:

$$S(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}$$

2. Si studi la funzione  $S(x)$  e si tracci il suo grafico  $\gamma$  nell'intervallo  $0 < x < 2\pi$  mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si scelga a caso un punto all'interno del trapezio e si determini la probabilità  $p(x)$  che tale punto risulti interno al semicerchio inscritto. Si studi la funzione  $p(x)$  e si tracci il suo grafico  $\omega$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi/2$ .
4. Si calcoli il valore medio della funzione  $p(x)$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi/2$ .

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .
2. Si verifichi che i tre punti di flesso di  $\gamma$  sono allineati e si scriva l'equazione della retta alla quale essi appartengono.
3. Si scrivano le equazioni delle tangenti inflessionali, si dimostri che due di esse sono parallele e si calcoli la loro distanza.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalle rette di equazione  $x = 1$  e  $x = \sqrt{3}$ .

## Questionario

1) Si divida il segmento  $AB = a$  in due parti  $AC$  e  $CB$ , in modo che, costruito su  $AC$  il quadrato  $ACDE$  e su  $CB$  il triangolo equilatero  $CBF$ , sia minima l'area del pentagono  $ABFDE$ .

2) Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \log(\sin 2x), & \text{per } 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto  $x = 0$ .

3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x + 2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto  $P(0, 2)$ .

4) La superficie piana  $S$ , delimitata dalla curva  $\gamma$  di equazione  $y = 1 + \operatorname{tg} x$  e dall'asse  $x$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi/4$ , è la base di un solido  $\Sigma$ , le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $\Sigma$ .

5) Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di  $4^\circ$ ; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura  $9^\circ$ . Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

6) Si determinino i coefficienti dell'equazione  $y = \frac{ax^2 + 4}{bx + 2}$  perché la curva rappresentativa ammetta asintoto di equazione  $y = x + 2$ .

7) Tenuto conto che:

$$\log 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} dx$$

si calcoli un'approssimazione di  $\log 2$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8) Sia  $C$  la curva d'equazione  $y = x^2 - 2x + 4$ , e sia  $G$  la curva simmetrica di  $C$  rispetto all'asse  $y$ . Qual è l'equazione di  $G$ ?

9) Si determini la probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari. Lanciando 5 volte due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma un numero dispari almeno due volte?

10) Si scelga a caso un punto all'interno di un parallelogramma, avente i lati lunghi rispettivamente 8 m e 6 m e gli angoli acuti di  $30^\circ$ . Si determini la probabilità che la sua distanza da ogni vertice sia maggiore di 2 m.

Prove suppletive: [indice](#)

# Esame 2013 suppletiva

## Problemi

1)  $ABC$  è un triangolo equilatero di lato  $a$ . Dal vertice  $A$ , e internamente al triangolo, si conduca una semiretta  $r$  che formi l'angolo  $\alpha$  con il lato  $AB$ . Si denotino con  $B'$  e  $C'$ , rispettivamente, le proiezioni ortogonali su  $r$  dei vertici  $B$  e  $C$ .

1. Si calcoli il rapporto:

$$\frac{\overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2}{a^2}$$

e lo si esprima in funzione di  $x = \operatorname{tg} \alpha$ , controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{4(x^2 + 1)}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
3. Si determinino le coordinate del punto in cui la curva  $\gamma$  incontra il suo asintoto e si scriva l'equazione della tangente ad essa in tale punto.
4. Si determini l'area della superficie piana, appartenente al II quadrante, delimitata dall'asse  $y$ , dalla curva  $\gamma$  e dal suo asintoto.

2) Del trapezio  $ABCD$  si hanno le seguenti informazioni: la base maggiore  $AB$  e la base minore  $DC$  misurano rispettivamente 4 m e 1 m, l'altezza del trapezio misura 3 m e la tangente dell'angolo  $\widehat{BAD}$  è uguale a  $3/2$ .

1. Si calcolino le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che uniscono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.
2. Si determinino, con l'aiuto di una calcolatrice, le misure, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli del trapezio.
3. Riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si trovi l'equazione della parabola  $\Gamma$  avente l'asse perpendicolare alle basi del trapezio e passante per i punti  $B, C, D$ .
4. Si determinino le aree delle due regioni in cui il trapezio è diviso da  $\Gamma$ .

## Questionario

1) È dato il settore circolare  $AOB$ , di centro  $O$ , raggio  $r$  e ampiezza  $\pi/3$ . Si inscriva in esso il rettangolo  $PQMN$ , con  $M$  ed  $N$  sul raggio  $OB$ ,  $Q$  sull'arco  $AB$

e  $P$  su  $OA$ . Si determini l'angolo  $Q\widehat{O}B = x$ , affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.

- 2) Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche *solidi platonici*?
- 3) Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

nel punto  $P$  di ordinata  $y = 2$ .

4) Un solido  $\Omega$  ha per base la regione  $R$  delimitata dal grafico di  $f(x) = \ln x$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[1, e]$ . In ogni punto di  $R$  a distanza  $x$  dall'asse  $y$ , la misura dell'altezza del solido è data da  $h(x) = x$ . Quale sarà il volume del solido?

5) Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di  $7^\circ$ . Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di  $13^\circ$ . Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?

6) Si consideri la curva d'equazione  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ . La curva ha asintoti? In caso affermativo, se ne determinino le equazioni.

7) Un cubo di legno di pioppo (densità  $\rho_1 = 0,385 \text{ g/cm}^3$ ) ed un tetraedro regolare di cristallo ( $\rho_2 = 3,33 \text{ g/cm}^3$ ) hanno entrambi lo spigolo  $l = 5 \text{ cm}$ . Quale dei due ha la massa maggiore?

8) Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 10 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?

9) Si calcoli il valore medio della funzione:

$$f(x) = \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

nell'intervallo  $1 \leq x \leq 4$ .

10) Si controlli se la funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x + 7$ , nell'intervallo  $[0, \pi]$ , verifica le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, si calcoli l'ascissa dei punti ove si annulla la derivata prima.

# Esame 2013 PNI suppletiva

## Problemi

1) È dato un angolo retto  $X\hat{O}Y$  e sulla sua bisettrice un punto  $P$ , tale che  $P\hat{A}O = 2 \cdot P\hat{B}O$ , essendo  $A$  e  $B$  punti, rispettivamente, di  $OX$  e di  $OY$ .

1. Posto  $P\hat{B}O = \alpha$ , si calcoli il rapporto:  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$  e lo si esprima in funzione di  $x = \operatorname{tg} \alpha$ , controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{2(x + 1)}$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
  3. Si considerino i punti  $C$  e  $D$  in cui l'asintoto obliquo di  $\gamma$  incontra rispettivamente l'asse  $y$  e l'asse  $x$ . Se  $E$  è il punto medio del segmento  $CO$ , si mostri che la retta  $DE$  è tangente a  $\gamma$  nel punto di ascissa 1.
  4. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo  $COD$ . La probabilità che tale punto risulti interno alla regione  $\sigma$  delimitata, nel primo quadrante, da  $\gamma$  e dagli assi medesimi è maggiore o minore del 50%? Si illustri il ragionamento seguito.
- 2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .
2. La curva  $\gamma$  incontra l'asse  $x$ , oltre che nell'origine, in altri due punti aventi ascisse opposte. Detta  $\xi$  l'ascissa positiva, si dimostri che  $1 < \xi < \pi$  e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si scriva l'equazione della tangente a  $\gamma$  nel suo punto di flesso, si verifichi che essa risulta perpendicolare ad entrambi gli asintoti e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con uno degli asintoti e l'asse  $x$ .
4. Si calcoli l'area della regione di piano, delimitata da  $\gamma$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo chiuso  $[-1, 0]$ .

## Questionario

1) È dato il settore circolare  $AOB$ , di centro  $O$ , raggio  $r$  e ampiezza  $\pi/3$ . Si inscriva in esso il rettangolo  $PQMN$ , con  $M$  ed  $N$  sul raggio  $OB$ ,  $Q$  sull'arco e

$P$  su  $OA$ . Si determini l'angolo  $Q\hat{O}B = x$ , affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.

2) Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche *solidi platonici*?

3) Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

nel punto  $P$  di ordinata  $y = 2$ .

4) Un solido  $\Omega$  ha per base la regione  $R$  delimitata dal grafico di  $f(x) = \log x$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[1, e]$ . In ogni punto di  $R$  a distanza  $x$  dall'asse  $y$ , la misura dell'altezza del solido è data da  $h(x) = x$ . Quale sarà il volume del solido?

5) Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di  $7^\circ$ . Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di  $13^\circ$ . Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?

6) Un cono di nichel (densità  $\rho_1 = 8,91 \text{ g/cm}^3$ ) ha il raggio di base di 15 cm e l'altezza di 20 cm. Da questo cono se ne taglia via un altro, avente l'altezza di 5 cm, che viene sostituito da un cilindro di alluminio (densità  $\rho_2 = 2,70 \text{ g/cm}^3$ ), che ha la stessa altezza del cono piccolo e la base uguale alla base minore del tronco di cono residuo. Si dica se la massa  $m_2$  del solido così ottenuto è maggiore o minore di quella  $m_1$  del cono di partenza.

7) Tenuto conto che:

$$\ln 3 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx,$$

si calcoli un'approssimazione di  $\ln 3$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8) Si consideri l'equazione:  $4x^3 - 14x^2 + 20x - 5 = 0$ . Si dimostri che essa per  $0 < x < 1$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9) Lanciando due dadi, qual è la probabilità che esca per somma un numero primo? Quante volte occorre lanciarli perché si possa aspettare, con una probabilità  $p = 80\%$  assegnata di veder apparire almeno una volta un numero primo?

10) Data la circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 = 16$ , si calcoli la lunghezza dell'arco compreso tra i punti  $(2\sqrt{3}; 2)$  e  $B(2; 2\sqrt{3})$ . Si scelga poi a caso un punto sulla circonferenza: si determini la probabilità che tale punto giaccia sull'arco  $AB$ .

# Esame 2014 suppletiva

## Problemi

1) Sono dati un quarto di cerchio  $AOB$  e la tangente  $t$  ad esso in  $A$ . Dal punto  $O$  si mandi una semiretta che intersechi l'arco  $AB$  e la tangente  $t$ , rispettivamente, in  $M$  ed  $N$ .

1. Posto  $A\widehat{O}M = a$ , si calcoli il rapporto:

$$\frac{MN}{MA}$$

e lo si esprima in funzione di  $x = \sin \frac{a}{2}$ , controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2x^2}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione  $f(x)$  e se ne tracci il grafico  $\gamma$ .
  3. Si scriva l'equazione della tangente a  $\gamma$  nel punto di flesso; si scriva poi l'equazione della circonferenza con il centro nel suddetto punto di flesso e tangente agli asintoti verticali di  $\gamma$ .
  4. si determini l'area della regione di piano limitata dalla curva  $\gamma$  dall'asse  $x$  e dalle rette di equazioni  $x = \frac{1}{3}$  e  $x = \frac{1}{2}$ .
- 2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ .
2. Si scriva l'equazione della tangente a  $\gamma$  nel punto di ascissa  $x = e$  e si calcoli l'area del trapezio  $T$  che essa forma con l'asse  $x$ , con l'asintoto verticale e con la retta di equazione  $x = e$ .
3. Si calcoli l'area della regione  $S_k$  delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalle rette di equazioni  $x = e$  e  $x = k$  ( $k > e$ ).
4. Si faccia vedere che  $S_k$  tende verso un limite finito quando  $k$  tende a  $+\infty$  e si confronti tale limite col valore numerico dell'area del trapezio  $T$ , arrotondato alla quarta cifra decimale.

## Questionario

- 1) Si determini il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$ .

2) La funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x},$$

è evidentemente continua nel punto  $x = 0$ . Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.

3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{3} \left( 2 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \right)$$

nel punto  $P$  di ascissa  $x = \frac{1}{\pi}$ .

4) Data la parte finita di piano compresa tra le rette  $x + y - 1 = 0$  e  $x - 1 = 0$  ed il grafico della funzione  $y = e^x$ , si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse  $x$ .

5) Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione  $\alpha$  di  $42,4^\circ$  e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione  $\beta$  di  $46,5^\circ$ . Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.

6) Si trovino gli eventuali flessi della curva:

$$f(x) = x \left[ (\log 3x)^2 - 2 \log 3x + 2 \right].$$

7) Una scatola di forma cilindrica ha raggio  $r$  e altezza  $h$ . Se si aumenta del 5% ciascuna sua dimensione, di quanto aumenterà, in termini percentuali, il suo volume?

8) Si calcoli il limite della funzione  $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x - \sqrt{2}}{\log \operatorname{sen} 2x}$ , quando  $x$  tende a  $\frac{\pi}{4}$ .

9) Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \cos^5 x,$$

nell'intervallo  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

10) Un certo numero formato da tre cifre è uguale a 56 volte la somma delle cifre che lo compongono. La cifra delle unità è uguale a quella delle decine aumentata di 4, mentre, scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, si ottiene un valore che è uguale a quello originario diminuito di 99. Si determini il numero di partenza.

# Esame 2014 PNI suppletiva

## Problemi

1) La curva  $\gamma$  è rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche:

$$x = \frac{t+1}{t}, \quad y = \frac{t^2+1}{t}$$

1. Se ne ricavi l'equazione cartesiana  $y = f(x)$  e se ne costruisca il grafico.
2. Si scriva l'equazione della retta  $s$  che congiunge i punti estremanti relativi di  $\gamma$  e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto  $\Phi$  che tale retta forma con l'asintoto obliquo.
3. Si calcoli l'area della regione di piano  $\Sigma$ , delimitata da  $\gamma$ , dal suo asintoto obliquo e dalle rette  $x = 2$  e  $x = 4$ .
4. Verificato che è  $A(\Sigma) = \log 3$ , si calcoli un'approssimazione di  $\log 3$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ .
2. Si dimostri che l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$$

ha, sull'intervallo  $1 < x < 2$ , un'unica radice reale  $\xi$  e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

Dopo aver constatato che  $\xi$  altro non è che l'ascissa del punto di flesso della curva  $\gamma$ , si calcoli il valore approssimato dell'ordinata.

3. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale a  $\gamma$  nel punto di intersezione con l'asse  $x$  e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse  $y$ .
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalla retta di equazione  $x = 2$ .

## Questionario

1) Si determini il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$ .

2) La funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x},$$

è evidentemente continua nel punto  $x = 0$ . Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.

3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{3} \left( 2 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \right)$$

nel punto  $P$  di ascissa  $x = \frac{1}{\pi}$ .

4) Data la parte finita di piano compresa tra le rette  $x + y - 1 = 0$  e  $x - 1 = 0$  ed il grafico della funzione  $y = e^x$ , si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse  $x$ .

5) Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione  $\alpha$  di  $42,4^\circ$  e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione  $\beta$  di  $46,5^\circ$ . Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.

6) Si disegni il grafico  $\gamma$  della funzione:

$$f(x) = \text{distanza di } x \text{ dal pi\`u prossimo intero.}$$

Si dica se  $f(x)$  è una funzione periodica e si calcoli l'area della regione di piano delimitata da  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = \frac{9}{10}$  nell'intervallo  $\left[0, \frac{9}{10}\right]$ .

7) Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana delimitata dalla curva  $\gamma$  di equazione

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

e dall'asse delle  $x$  nell'intervallo  $-1 \leq x \leq 1$ .

8) Si consideri l'equazione

$$\log |x| - e^x = 0.$$

Si dimostri che essa ammette una soluzione reale appartenente all'intervallo  $-2 \leq x \leq -1$  e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9) Un mazzo di "tarocchi" è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette "Arcani maggiori", 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estrae a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un "Arcano maggiore"?

10) Nel poscritto al suo racconto "*Il Mistero di Marie Rogêt*", Edgar Allan Poe sostiene che, "avendo un giocatore di dadi fatto doppio sei per due volte consecutive, vi è una ragione sufficiente per scommettere che gli stessi sei non usciranno ad un terzo tentativo". Ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.