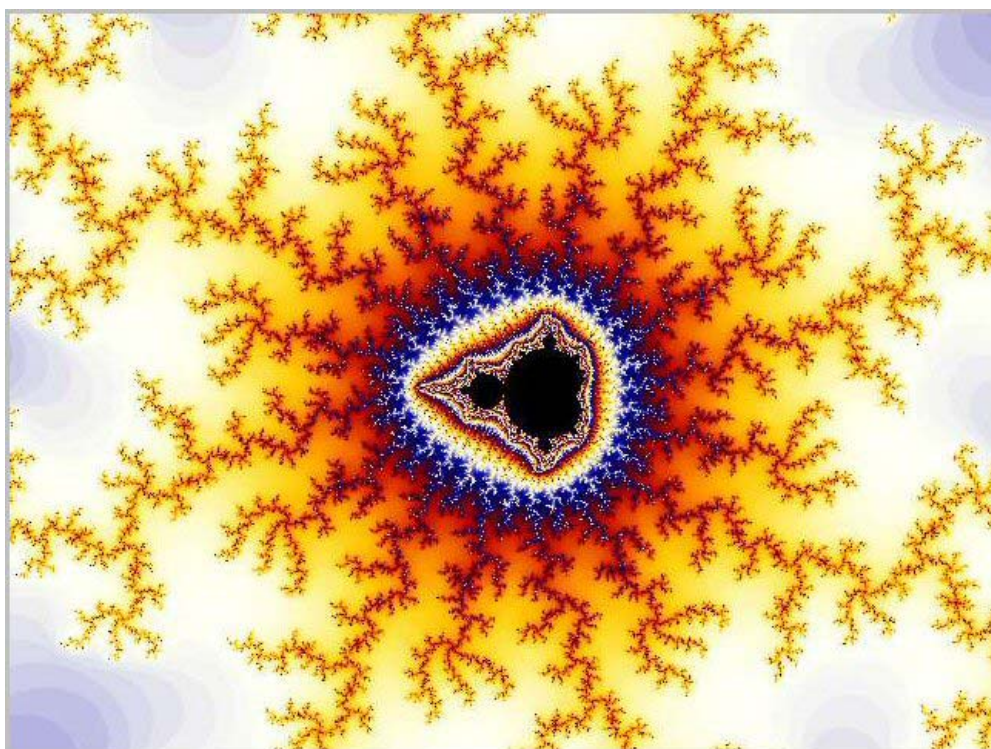


Temi d'esame '91-'00



LORENZO ROI

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Febbraio 2004. 

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato nel punto $(0.35913307, -0.52464755)$ e ingrandito 18.244.171 volte.

Titolo: **Trame frattali.**

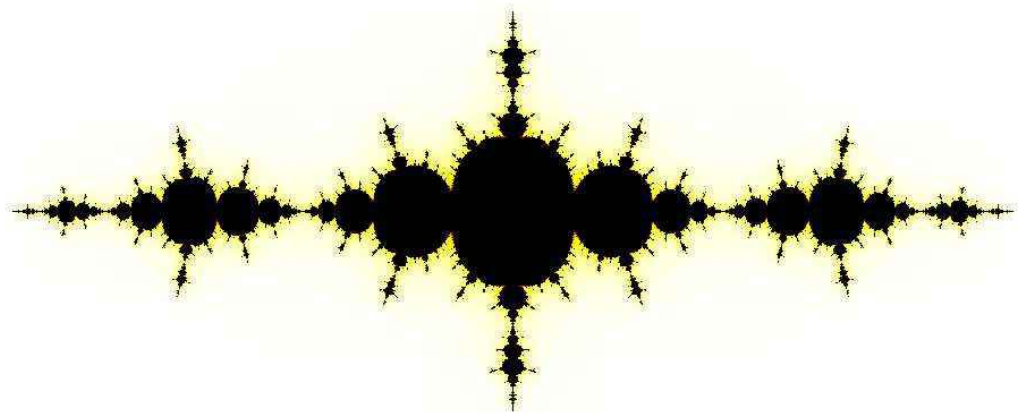
INTRODUZIONE

Questo lavoro è una semplice raccolta di problemi assegnati agli esami di maturità di liceo scientifico: in questa prima parte si propongono i temi assegnati dal 1991 al 2000. Accanto ai testi, per la maggior parte relativi ai corsi di ordinamento, seguono le soluzioni che vengono sviluppate ponendo attenzione anche ai particolari di calcolo dato che non è raro imbattersi in difficoltà proprio su tali aspetti. Quando lo si è ritenuto utile vengono trattati pure diversi approcci risolutivi al medesimo problema.

Le nozioni necessarie sono ovviamente quelle possedute al termine di un corso di studi secondari di indirizzo scientifico il che significa disporre dell'intero bagaglio di conoscenze sviluppato nell'arco dei cinque anni e non solo di quelle affrontate nell'ultimo anno.

La **seconda parte** di questa lavoro raccoglie invece i temi assegnati a partire dall'anno 2001, anno nel quale tali prove hanno subito una revisione nella loro struttura.

Lorenzo Roi



Insieme di Julia

INDICE

Maturità '91	1
quesito 1	1
quesito 2	1
quesito 3	1
 Maturità '92	 14
quesito 1	14
quesito 2	14
quesito 3	15
 Maturità '93	 28
quesito 1	28
quesito 2	28
quesito 3	28
 Maturità '94	 42
quesito 1	42
quesito 2	42
quesito 3	42
 Maturità '95	 57
quesito 1	57
quesito 2	57
quesito 3	58
 Maturità '96	 78
quesito 1	78
quesito 2	78
quesito 3	79

Maturità '97	96
quesito 1	96
quesito 2	96
quesito 3	97
 Maturità '98	 113
quesito 1	113
quesito 2	113
quesito 3	114
 Maturità '99 PNI	 128
quesito 1	128
quesito 2	128
quesito 3	129
 Maturità '00	 148
quesito 1	148
quesito 2	148
quesito 3	149

MATURITÀ '91

- **Quesito n. 1**

In un piano cartesiano ortogonale Oxy si consideri il punto $A(2x, 0)$. Si trovi il luogo $\mathcal{L}$ del punto $B(x, y)$ tale che il triangolo OAB abbia perimetro $2p$ e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso. Se B_0 è il punto di $\mathcal{L}$ del primo quadrante la cui ascissa è $p/4$ ed A_0 il terzo vertice del relativo triangolo, si calcoli l'area del triangolo OA_0B_0 . Si individuino inoltre le altre 7 posizioni di B tali che il triangolo OAB sia equivalente ad OA_0B_0 .

Soluzione

- **Quesito n. 2**

Si consideri in un piano cartesiano ortogonale Oxy la famiglia di parabole tangenti all'asse delle ascisse nel punto $A(1, 0)$. Detto B il punto d'incontro della generica parabola con l'asse delle ordinate, si studi come varia, al variare della parabola, l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola stessa e la retta passante per B , parallela alla bisettrice del secondo quadrante, determinandone in particolare i valori estremi relativi.

Soluzione

- **Quesito n. 3**

Si considerino due circonferenze di centri A e A' , e rispettivamente, di raggi 9 ed 1, tangenti esternamente nel punto O . Sia r la tangente comune in O ed s una retta tangente ad entrambe le circonferenze rispettivamente nei punti B e B' . Detto C il punto di intersezione delle rette r ed s , si dimostri che i triangoli ACA' e BOB' sono rettangoli e si calcoli il rapporto delle loro aree.

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Tracciati gli assi di un sistema cartesiano ortogonale (fig.1) il perimetro di $\triangle OAB$ si può esprimere come $2p = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO}$. Poiché sono assegnate dal testo le coordinate di A e B è immediato determinare la lunghezza dei lati di $\triangle OAB$ ossia

$$\overline{OA} = |2x| \quad \overline{AB} = \sqrt{(2x - x)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \overline{BO},$$

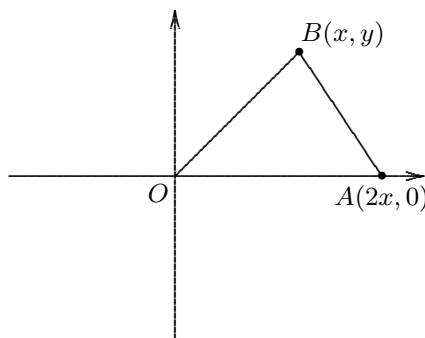


Fig. 1

e il perimetro diviene

$$|2x| + 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2p \quad : 2 \quad |x| + \sqrt{x^2 + y^2} = p \quad \sqrt{x^2 + y^2} = p - |x|.$$

Perché quest'ultima relazione abbia significato dev'essere $p - |x| \geq 0$ cioè $|x| \leq p$ ossia $-p \leq x \leq p$. Quadrando

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (p - |x|)^2 \\ -p \leq x \leq p \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 + x^2 - 2p|x| \\ -p \leq x \leq p, \end{cases}$$

da cui

$$2p|x| = -y^2 + p^2.$$

Supposto che sia $p \neq 0$ (in caso contrario si ottiene l'eventualità banale dove $B \equiv A \equiv O$), si ottiene

$$|x| = -\frac{1}{2p}y^2 + \frac{p}{2} \quad (1)$$

da cui discendono i due sistemi

$$\alpha : \begin{cases} 0 \leq x \leq p \\ x = -\frac{1}{2p}y^2 + \frac{p}{2} \end{cases} \quad \beta : \begin{cases} -p \leq x < 0 \\ x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{p}{2}. \end{cases}$$

Il primo esprime un arco di parabola compreso nel I e II quadrante mentre β risulta pure un arco di parabola ma è compreso nel II e III quadrante. In base all'equazione (1) è pure evidente l'invarianza di questo luogo $\mathcal{L} = \alpha \cup \beta$ per simmetrie assiali di asse y . La sua rappresentazione grafica nel piano Oxy risulta espressa dalla fig.2.

Per determinare le coordinate dei punti C e D basta risolvere l'equazione

$$0 = -\frac{1}{2p}y^2 + \frac{p}{2} \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{2p}y^2 = \frac{p}{2} \quad y^2 = p^2,$$

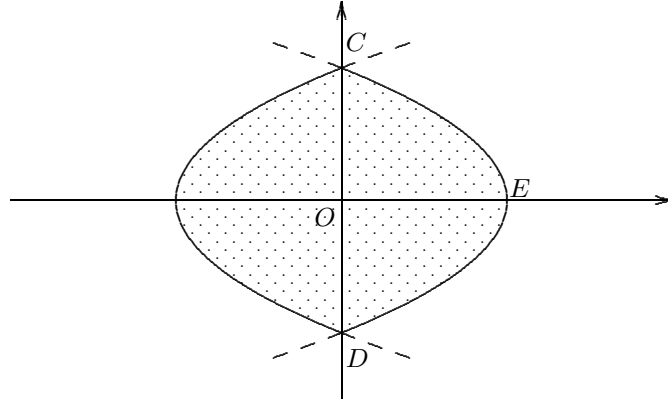


Fig. 2

che fornisce $y = \pm p$. Quindi $C(0, p)$, $D(0, -p)$ mentre $E(p/2, 0)$.
L'area della regione finita delimitata da $\mathcal{L}$ ed evidenziata in figura è pari al doppio dell'area del segmento parabolico definito da α e dall'asse y . Allora, utilizzando l'espressione generalizzata della formula di Archimede si giunge alla

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 2(\text{Area segmento parab. } CED) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left| -\frac{1}{2p} \right| \cdot |p - (-p)|^3 \\ &= \frac{1}{6p} \cdot (2p)^3 = \frac{4}{3}p^2.\end{aligned}$$

Sia ora $B_0(x_0, y_0)$. Poiché il testo afferma che $x_0 = p/4$, discende che

$$x_0 = -\frac{1}{2p}y_0^2 + \frac{p}{2}$$

da cui

$$\frac{p}{4} = -\frac{1}{2p}y_0^2 + \frac{p}{2} \quad \implies \quad y_0^2 = \frac{p^2}{2} \quad y_0 = \frac{p}{\sqrt{2}} :$$

è pertanto

$$B_0\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad A_0\left(\frac{p}{2}, 0\right) \equiv E.$$

L'area richiesta per $\triangle OA_0B_0$ risulta

$$\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2}\right) \cdot \frac{p}{\sqrt{2}} = \frac{p^2}{4\sqrt{2}} = \frac{p^2\sqrt{2}}{8}.$$

Considerando comunque il punto B come un punto variabile, l'area di $\triangle OAB$ è invece espressa da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \overline{AO} \cdot |y_B| = \frac{1}{2} |x_A| \cdot |y_B| = \frac{1}{2} |2x| \cdot |y| = |xy|.$$

Dovendo questa essere uguale a $\mathcal{A}_0$ allora

$$|xy| = \frac{p^2\sqrt{2}}{8} : \quad (2)$$

questa equazione rientra nella forma generale $|xy| = k$ che si può riscrivere come

$$\begin{cases} xy = k, & \text{se } x > 0 \wedge y > 0 \text{ (} \underline{\vee} x < 0 \wedge y < 0 \text{)} \\ xy = -k, & \text{se } x > 0 \wedge y < 0 \text{ (} \underline{\vee} x < 0 \wedge y > 0 \text{)}. \end{cases}$$

La prima risulta un'iperbole equilatera appartenente al I e III quadrante, la seconda pure ma giacente nel II e IV. Il luogo $\mathcal{M}$ descritto dalla (2) risulta quindi l'unione di due iperboli equilatera ma più esattamente, ricordando le limitazioni poste, di archi di queste. Determinare le posizioni di B equivale quindi a ricercare le intersezioni tra il luogo $\mathcal{L}$ e il luogo $\mathcal{M}$ ossia risolvere $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ che algebricamente equivale al sistema

$$\begin{cases} |x| = -\frac{1}{2p}y^2 + \frac{p}{2} \\ |xy| = \frac{p^2\sqrt{2}}{8} \\ -p \leq x \leq p. \end{cases} \quad (3)$$

Notando innanzitutto che $|xy| = |x| \cdot |y|$ e sostituendo la prima nella seconda

$$\left| y \left(-\frac{1}{2p}y^2 + \frac{p}{2} \right) \right| = \frac{p^2\sqrt{2}}{8} \quad \cdot 2p \quad |y| \cdot (-y^2 + p^2) = \frac{p^3\sqrt{2}}{4} :$$

nell'ultima si è pure fatto uso della $|-y^2 + p^2| = -y^2 + p^2$ in quanto è pure $-p \leq y \leq p$. Data la simmetria di $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ è sufficiente porre

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq p \\ y(p^2 - y^2) = \frac{p^3\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad -y^3 + p^2y - \frac{p^3\sqrt{2}}{4} = 0.$$

Quest'ultima equazione deve possedere $y_{B_0} = p/\sqrt{2}$ come soluzione per cui, utilizzando la regola di Ruffini (il polinomio di terzo grado possiede i coefficienti -1 , 0 , p^2 , $-p^3\sqrt{2}/4$)

$+\frac{p}{\sqrt{2}}$	-1	0	p^2	$-\frac{p^3\sqrt{2}}{4}$
	$-\frac{p}{\sqrt{2}}$	$-\frac{p}{2}$	$-\frac{p}{2}$	$+\frac{p^3}{2\sqrt{2}}$
	-1	$-\frac{p}{\sqrt{2}}$	$+\frac{p^2}{2}$	0

si ottiene la decomposizione

$$\left(y - \frac{p}{2}\right) \cdot \left(-y^2 - \frac{p}{\sqrt{2}}y + \frac{p^2}{2}\right) = 0.$$

Risolvendo l'equazione

$$-y^2 - \frac{p}{\sqrt{2}}y + \frac{p^2}{2} = 0$$

si giunge infine alle soluzioni

$$y_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\pm\sqrt{5} - 1)p$$

delle quali risulta accettabile solo $y_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{5} - 1)p$ in quanto l'altra è negativa. La corrispondente ascissa si ottiene sostituendo y_1 nella prima delle (3) da cui

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{8}p.$$

In definitiva, tenendo conto delle proprietà di simmetria più volte menzionate e in base alla rappresentazione grafica dei luoghi $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ (fig.3) le 1 + 7 posizioni richieste sono

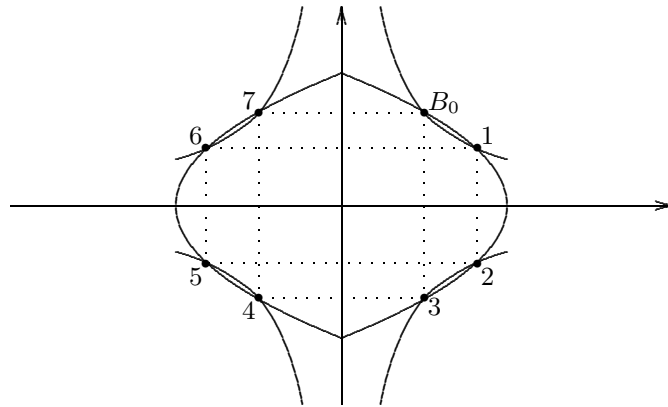


Fig. 3

$$\begin{array}{ll}
 B_0 \left(\frac{p}{2}, \frac{p}{\sqrt{2}} \right) & 1) \left(\frac{\sqrt{5}+1}{8}p, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}p \right) \\
 2) \left(\frac{\sqrt{5}+1}{8}p, -\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}p \right) & 3) \left(\frac{p}{2}, -\frac{p}{\sqrt{2}} \right) \\
 4) \left(-\frac{p}{2}, -\frac{p}{\sqrt{2}} \right) & 5) \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{8}p, -\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}p \right) \\
 6) \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{8}p, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}p \right) & 7) \left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{\sqrt{2}} \right).
 \end{array}$$

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Tracciata la figura 1, il fascio richiesto si ottiene immediatamente se si conosce l'espressione dell'equazione rappresentativa di una parabola generica tangente all'asse x cioè

$$y = a(x - x_A)^2$$

con x_A ascissa del punto di tangenza.

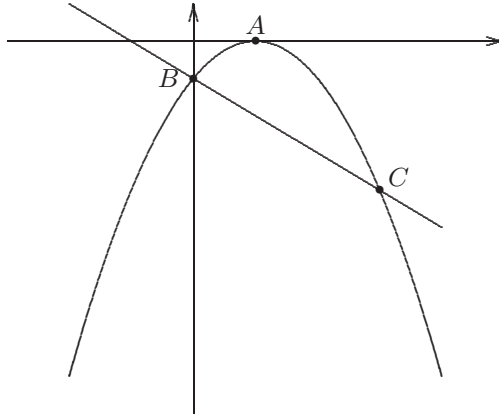


Fig. 1

Nel nostro caso è quindi $y = a(x-1)^2$. Questa, per $x = 0$ fornisce l'ordinata di B che vale $y_B = a$. La retta r per B parallela alla bisettrice del II e IV quadrante è espressa dalla $y = -1(x - a) = -x + a$ e dove si è fatto uso dell'espressione di un fascio di rette per un punto $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Per determinare l'area richiesta resta quindi da definire l'ulteriore punto C di intersezione tra il fascio di parabole γ ed r . Allora risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = a(x-1)^2 \\ y = -x + a \end{cases}$$

sostituendo la seconda nella prima $a - x = ax^2 - 2ax + a$, $ax^2 + x(1 - 2a) = 0$ da cui le soluzioni $x = 0$ e $x = 2 - \frac{1}{a}$ con $a \neq 0$.

È quindi possibile ottenere l'espressione che descrive l'area utilizzando la formula generalizzata di Archimede, valida per il calcolo dell'area del segmento parabolico e quindi scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{6}|a| \cdot |x_1 - x_2|^3 = \frac{1}{6}|a| \cdot |x_C - 0|^3 \\ &= \frac{1}{6}|a| \cdot \left| \frac{2a-1}{a} \right|^3 = \frac{1}{6} \left| \frac{2a-1}{a^2} \right|^3. \end{aligned} \quad (1)$$

È necessario mantenere il valore assoluto in quanto l'unica condizione su a risulta $a \neq 0$ e ciò non assicura la positività di $\mathcal{A}$. Si deve, in definitiva studiare il grafico della funzione

$$\mathcal{A} = \left| \frac{(2a-1)^3}{6a^2} \right| \quad (2)$$

dove si è preferito riscrivere la (1) nella forma $y = |f(x)|$ in quanto da questa è possibile, noto il grafico della funzione di equazione $y = f(x)$, dedurre il grafico Γ di $\mathcal{A}$. Difatti, nel caso sia $f(x) \geq 0$ i due grafici coincidono mentre nel caso opposto discende $y = |f(x)| = -f(x)$ e ciò equivale ad una simmetria di asse x per quei punti aventi le ascisse che soddisfano la $f(x) < 0$. Conviene pertanto determinare il grafico della

$$y = f(a) = \frac{(2a-1)^3}{6a^2}$$

che, sviluppata la potenza al numeratore può assumere pure la forma

$$y = \frac{4}{3}a - 2 + \frac{1}{a} - \frac{1}{6a^2}.$$

- Segno: $y \geq 0$, $(2a-1)^3 \geq 0$, $2a-1 \geq 0$ da cui $a \geq \frac{1}{2}$.
- Limiti: $\lim_{a \rightarrow 0^\pm} y = -\infty$ in quanto $\lim_{a \rightarrow 0^\pm} (2a-1)^3 = -1$ e $\lim_{a \rightarrow 0^\pm} a^2 = 0^+$.
Riscritta l'equazione come

$$y = \left(\frac{4}{3}a - 2 \right) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{6a^2} \right)$$

è immediato notare l'esistenza di un asintoto obliquo in quanto il primo addendo (che risulta di 1° grado) per $a \rightarrow \pm\infty$ assume via via più importanza rispetto al secondo che tende asintoticamente a zero. Difatti formalmente risulta

$$\lim_{a \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \quad \text{e} \quad m = \lim_{a \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{a} = \lim_{a \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{6a^3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$q = \lim_{a \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4}{3}a - 2 + \frac{1}{a} - \frac{1}{6a^2} \right) - \frac{4}{3}a = \lim_{a \rightarrow \pm\infty} \left(-2 + \frac{1}{a} - \frac{1}{6a^2} \right) = -2,$$

per cui l'asintoto possiede equazione $y_a = \frac{4}{3}a - 2$.

- Confronto con l'asintoto: l'equazione $y - y_a \geq 0$ risulta

$$\left(\frac{4}{3}a - 2 \right) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{6a^2} \right) - \left(\frac{4}{3}a - 2 \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{6a^2} = \frac{6a - 1}{6a^2} \geq 0.$$

Questa implica $6a - 1 \geq 0$ ossia $a \geq \frac{1}{6}$. La funzione pertanto interseca l'asintoto per $a = \frac{1}{6}$ mentre giace "al di sopra" di esso per $a > \frac{1}{6}$

- Derivata:

$$y' = \frac{1}{6} \left[\frac{3(2a-1)^2 \cdot 2 \cdot a^2 - 2a(2a-1)^3}{a^4} \right] = \frac{1}{6} \frac{(2a-1)^2}{a^4} \cdot [6a^2 - 2a(2a-1)] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(2a-1)^2}{a^4} (2a^2 + 2a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2a-1)^2}{a^3} \cdot (a+1)$$

e lo studio del segno di $y' \geq 0$ implica l'analisi dei tre termini:

- $a+1 \geq 0$, $a \geq -1$,
- $(2a-1)^2 > 0$ per $\forall a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{2}$ mentre $(2a-1)^2 = 0$ quando $a = \frac{1}{2}$,
- $a^3 > 0$ se $a > 0$.

Combinati i relativi segni si ottiene che $y' > 0$ quando $a < -1 \vee 0 < a < \frac{1}{2} \vee a > \frac{1}{2}$ mentre è $y' = 0$ per $a = -1 \vee a = \frac{1}{2}$.

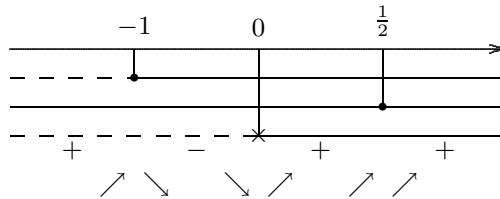


Fig. 2

Riscritta y' come

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3a^3}(4a^2 + 1 - 4a)(a + 1) = \frac{1}{3a^3}(4a^3 + 4a^2 + a + 1 - 4a^2 - 4a) \\ &= \frac{1}{3a^3}(4a^3 - 3a + 1) = \frac{4}{3} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^3} \end{aligned}$$

la derivata seconda y'' discende immediatamente

$$y'' = \frac{2}{a^3} - \frac{1}{3}(3a^{-4}) = \frac{2}{a^3} - \frac{1}{a^4} = \frac{2a - 1}{a^4}.$$

Pertanto $y'' \geq 0$ quando $2a - 1 \geq 0$ ossia $a \geq \frac{1}{2}$ e quindi per $a = \frac{1}{2}$ la funzione presenta un flesso orizzontale mentre volge la concavità verso la direzione positiva quando $a > \frac{1}{2}$ (fig.4).

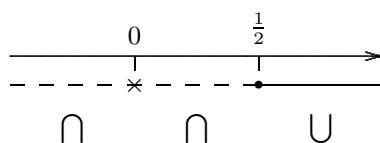


Fig. 3

Il grafico evidenzia un estremo relativo corrispondente ad $a = -1$ dove $\mathcal{A}(-1) = \frac{9}{2}$ ed un secondo, corrispondente a $a = \frac{1}{2}$ dove $\mathcal{A} = 0$. La funzione possiede 2 asintoti di equazione $\mathcal{A} = \pm \frac{4}{3}a - 2$ che in figura compaiono tratteggiati, mentre per confronto appare punteggiata la parte di f avente ordinate negative.

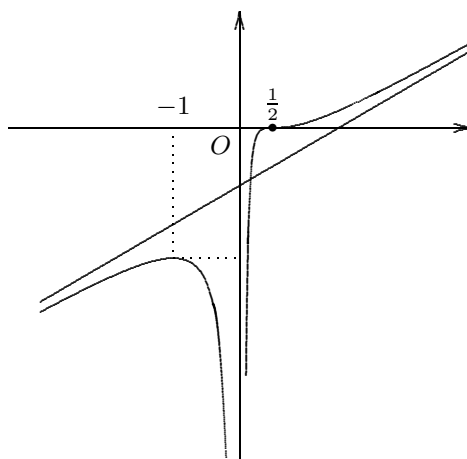


Fig. 4

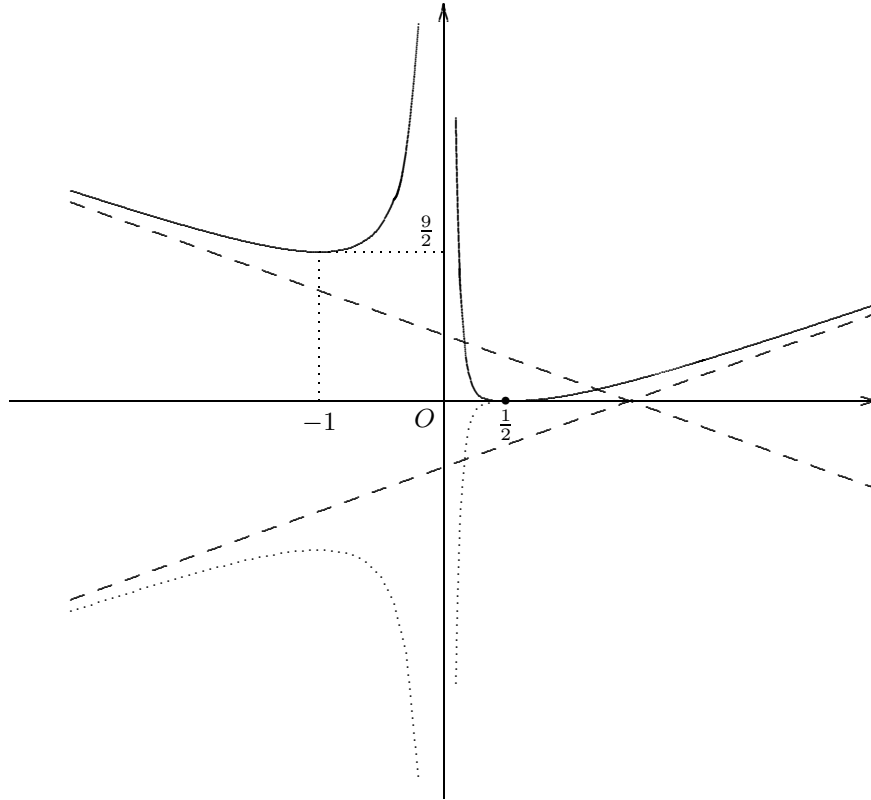


Fig. 5

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Tracciata la figura relativa al problema, si tratta di dimostrare che $\angle ACA' = \frac{\pi}{2}$ e $\angle BOB' = \frac{\pi}{2}$.

Procedendo in termini geometrici, essendo $\triangle ACB \cong \triangle AOC$ è pure $\triangle BOC$ isoscele. Ne segue che $\angle COB = \angle OBC$. In modo del tutto analogo risulta isoscele il triangolo $\triangle OB'C$ e $\angle COB' = \angle CB'O$. Considerando quindi il $\triangle BOB'$ la somma dei suoi angoli vale π cioè

$$\angle OBC + \angle COB + \angle COB' + \angle CB'O = \pi$$

da cui, per quanto osservato sopra

$$2 \cdot \angle COB + 2 \cdot \angle COB' = \pi \implies 2(\angle COB + \angle COB') = \pi,$$

ma essendo $\angle COB + \angle COB' = \angle BOB'$, è pure $\angle BOB' = \frac{\pi}{2}$. Poiché inoltre $\angle ACO = \angle ACB$ e $\angle OCA' = \angle A'CB'$ e

$$(\angle ACO + \angle ACB) + (\angle OCA' + \angle A'CB') = \pi,$$

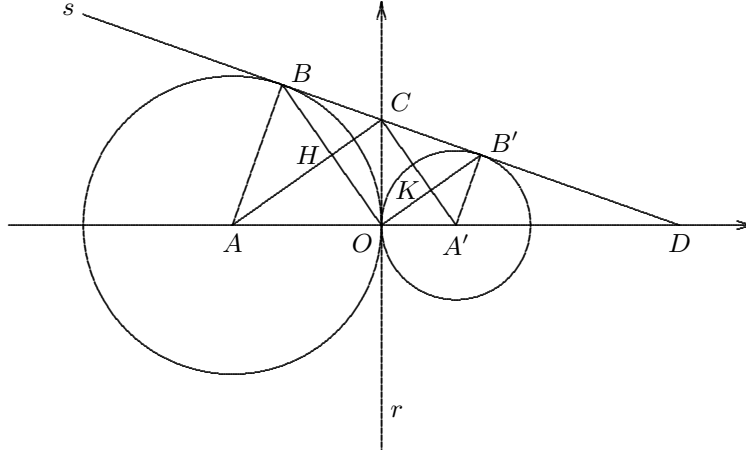


Fig. 1 Situazione geometrica (circonferenze non in scala).

allora $2 \cdot \angle ACO + 2 \cdot \angle OCA' = \pi$ da cui

$$\angle ACO + \angle OCA' = \frac{\pi}{2} \quad \text{e quindi} \quad \angle ACA' = \frac{\pi}{2}.$$

Per determinare le aree e quindi il loro rapporto conviene determinare $\overline{CO} = \overline{BC} = \overline{CB'}$. Per il secondo teorema di Euclide $\overline{CO}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{OA'}$ da cui $\overline{CO} = \sqrt{9 \cdot 1} = 3$. Allora $\mathcal{A}(\triangle AA'C) = (9 + 1) \cdot 3/2 = 15$. Applicando invece il t. di Pitagora a $\triangle AOC$ discende $\overline{AC} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ e quindi, considerando la doppia area di $\triangle ACB$, $\overline{AC} \cdot \overline{BH} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ da cui

$$\overline{BH} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \quad \text{e} \quad \overline{BO} = 2\overline{BH} = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

Analogamente per $\triangle A'CO$,

$$\begin{aligned} \overline{A'C} \cdot \overline{OK} &= \overline{OA'} \cdot \overline{OC} \implies \overline{OK} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \overline{OB'} = 2\overline{OK} = \frac{3}{5}\sqrt{10}, \\ \mathcal{A}(\triangle BOB') &= \frac{1}{2}\overline{BO} \cdot \overline{B'O} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{5}\sqrt{10} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{10} = \frac{27}{5}. \end{aligned}$$

Il rapporto cercato è pertanto

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ACA')}{\mathcal{A}(\triangle BOB')} = \frac{15}{(\frac{27}{5})} = \frac{5}{9} \cdot 5 = \frac{25}{9}.$$

Ulteriori metodi di risoluzione

Volendo invece procedere sfruttando la Geometria Analitica, sia O l'origine di un sistema cartesiano ortogonale e questa sia coincidente con il punto di tangenza delle due circonferenze (fig.1). I centri di queste assumono le coordinate $A(-9, 0)$ e $A'(1, 0)$. Per determinare la retta BB' e quindi ottenere le coordinate dei punti C , B e B' , è sufficiente trovare le coordinate del punto D , intersezione di s con l'asse delle ascisse e successivamente, costruito il fascio per D , imporre a questo la tangenza ad una circonferenza.

Allora, per la similitudine dei triangoli $\triangle ADB \sim \triangle A'DB$ risulta

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}},$$

per cui se x_D è l'ascissa di D , la precedente diviene

$$\frac{x_D - (-9)}{9} = \frac{x_D - 1}{1} \quad \implies \quad x_D = \frac{9}{4}.$$

Il fascio per D è quindi $y - 0 = m \left(x - \frac{9}{4} \right)$ e imponendo a questo la tangenza alla circonferenza di raggio 1, si ottiene l'equazione

$$1 = \frac{|0 - m \cdot 1 + \frac{9}{4}m|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \text{da cui} \quad \sqrt{1 + m^2} = \left| \frac{9}{4}m - m \right| \quad \sqrt{1 + m^2} = \left| \frac{5}{4}m \right|,$$

ed elevando entrambi i membri al quadrato

$$1 + m^2 = \frac{25}{16}m^2 \quad \implies \quad m^2 = \frac{16}{9} \quad m = \pm \frac{4}{3}.$$

Escluso il termine positivo (corrispondente all'altra tangente), l'equazione che esprime la retta cercata BB' è $y = -\frac{4}{3}x + 3$. Il punto C ha quindi coordinate $C(0, 3)$. Determinando infine i coefficienti angolari delle rette AC e $A'C$ si giunge alle

$$m_{AC} = \frac{3 - 0}{0 - (-9)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad m_{A'C} = \frac{3 - 0}{0 - 1} = -3,$$

che evidenziano come la condizione di perpendicolarità $m_{AC} \cdot m_{A'C} = -1$ sia soddisfatta.

Per ottenere le coordinate di B e B' e quindi i coefficienti angolari delle rette OB e OB' vanno risolti invece i sistemi

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 3 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 3 \\ (x + 9)^2 + y^2 = 81. \end{cases}$$

Procedendo per B'

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + \left(-\frac{4}{3}x+3\right)^2 - 1 &= 0 & x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{9}x^2 + 9 - 8x - 1 &= 0 \\ \frac{25}{9}x^2 - 10x + 9 &= 0 & \left(\frac{5}{3}x-3\right)^2 &= 0 \implies x_{B'} = \frac{9}{5} \quad y_{B'} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Analogamente per B

$$\begin{aligned}(x+9)^2 + \left(-\frac{4}{3}x+3\right)^2 - 81 &= 0 & x^2 + 18x + 81 + \frac{16}{9}x^2 + 9 - 8x - 81 &= 0 \\ \frac{25}{9}x^2 + 10x + 9 &= 0 & \left(\frac{5}{3}x+3\right)^2 &= 0 \implies x_B = -\frac{9}{5} \quad y_B = \frac{27}{5}.\end{aligned}$$

Pertanto $B\left(-\frac{9}{5}, \frac{27}{5}\right)$ e $B'\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Per i coefficienti angolari segue che

$$m_{OB} = \frac{\frac{27}{5} - 0}{-\frac{9}{5} - 0} = -3 \quad m_{OB'} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{9}{5}\right)} = \frac{1}{3},$$

e ancora vale la $m_{OB} \cdot m_{OB'} = -1$.

Per le aree, il valore di $\mathcal{A}(\triangle AA'C)$ risulta immediato. Per $\mathcal{A}(\triangle OB'B)$ basta determinare le lunghezze $\overline{OB}$ e $\overline{OB'}$ ossia

$$\overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{9}{5}\sqrt{10} \quad \overline{OB'} = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

da cui il risultato già espresso precedentemente.

MATURITÀ '92

Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti.

• Quesito n. 1

Presi due vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ non paralleli e con lo stesso punto di applicazione O , sia $\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Tracciare il vettore $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$ e congiungere O con C . Il punto P divida il segmento OC in due parti tali che $\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{PC}$. Dimostrare che i punti A , P e B sono allineati (è allo scopo sufficiente dimostrare che i due vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{PB}$ sono multipli di uno stesso vettore).

Posto $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ e $|\overrightarrow{a}| = 1$ e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro O con ascissa parallela ed equiversa ad $\overrightarrow{a}$ e ordinata parallela ed equiversa a $\overrightarrow{b}$, trovare $|\overrightarrow{b}|$ affinché i due segmenti OC e AB siano perpendicolari.

Trovare, in questo caso, le due parabole con asse parallelo all'asse delle y e passanti rispettivamente la prima per O , P ed A e la seconda per B , P e C . Verificare che le due parabole sono tra loro tangenti in P . Calcolare infine l'area della parte finita di piano racchiusa tra le due parabole e l'asse delle y .

Soluzione

• Quesito n. 2

La funzione

$$f(x) = (2x^3 - 4x)e^{-x^2}$$

rappresenti, in opportune unità di misura, la forza $f(x)$ a cui è soggetto un punto P libero di muoversi lungo l'asse delle x . Sapendo che la forza f è data da

$$f(x) = -\frac{dE(x)}{dx}$$

dove $E(x)$ è l'energia potenziale, trovare la funzione $E(x)$ e rappresentarla avendo posto $E(0) = -1$. Per quali valori di x il punto P è in equilibrio, ossia per quali valori di x la forza è nulla? Per tali valori di x l'energia potenziale quale valore assume?

Soluzione

• **Quesito n. 3**

Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O , tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante γ in un punto Q . Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza γ , tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ , trovare il limite per x tendente ad infinito del rapporto

$$k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}.$$

Studiare quindi la funzione $y = f(x)$, dove $f(x) = k^2$ e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

- Allineamento dei punti.

Costruita la figura 1 rappresentativa della situazione descritta dal testo, sia

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{a} \quad \overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PC}.$$

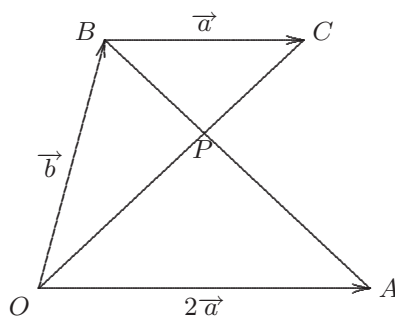


Fig. 1

Utilizzando la definizione di somma vettoriale si ha

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PC} \quad (1)$$

da cui $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$. Poiché inoltre risulta

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

discende

$$\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) - \overrightarrow{a} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}).$$

Analogamente da $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{0}$ si deduce

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= -\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \\ &= 2\overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{a} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) - 2\overrightarrow{a} \\ &= 2\left(\frac{\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}}{3}\right) = 2\overrightarrow{PB}.\end{aligned}$$

Ne segue che i vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{PB}$ sono collineari e in particolare paralleli e concordi. Poiché P è un estremo comune, P risulta allineato con A e B .

■ Determinazione di b . Metodo vettoriale.

Introdotta un sistema di coordinate xOy e se $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ con $|\overrightarrow{a}| = 1$, i punti A, B, C hanno coordinate $A(2, 0), B(0, b), C(1, b)$ (fig. 2).

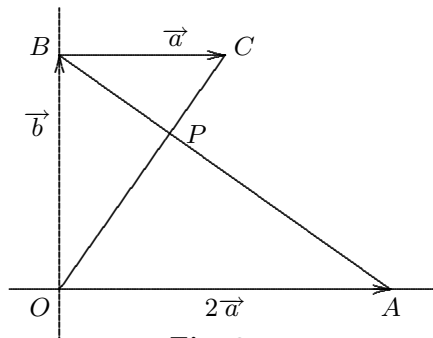


Fig. 2

Poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = 3\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}$ e, per la (1) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ e in quanto $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}$, segue che il prodotto scalare di questi due vettori è nullo. Esplicitando questa condizione

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}) \\ &= \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} - 2a^2 + b^2 - 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0\end{aligned}$$

e poiché $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ è anche $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ per cui l'equazione diviene $-2a^2 + b^2 = 0$ da cui, ricordando che $a^2 = 1, b^2 = 2$ e $b = \pm\sqrt{2}$. Per quanto detto dal testo è accettabile solo la determinazione positiva di $b = \sqrt{2}$.

■ Determinazione di b . Metodo analitico.

Procedendo in termini analitici invece, basta imporre che i coefficienti angolari delle rette AB e OC siano tali da soddisfare alla $m_{AB} \cdot m_{OC} = -1$ cioè, essendo $m_{AB} = -b/2$ e $m_{OC} = b$, risulta

$$-\frac{b}{2} \cdot b = -1 \quad \frac{b^2}{2} = 1 \quad b^2 = 2 \quad b = \pm\sqrt{2} \quad b = \sqrt{2}.$$

■ Ricerca delle parabole.

Sia γ la parabola per O , P , A e γ_1 quella per B , P , C . Le coordinate di P si possono determinare intersecando la retta OC di equazione $y = \sqrt{2}x$ con la retta AB di coefficiente angolare pari a $-\sqrt{2}/2$. Allora

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} \end{cases}$$

da cui

$$\sqrt{2}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} \quad \frac{3}{2}x = 1 \quad x_P = \frac{2}{3} \quad y_P = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

In alternativa, P si può determinare tramite il calcolo vettoriale: difatti discende che

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}$$

ed essendo $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ paralleli e concordi agli assi coordinati e di moduli rispettivamente $|\overrightarrow{a}| = 1$, $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{2}$, risulta $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{2})$.

Poiché γ passa per due punti dell'asse x essa appartiene al fascio di equazione $y = ax(x-2)$ cosicché a si determina utilizzando l'appartenenza di P a tale fascio ossia

$$\frac{2}{3}\sqrt{2} = a\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - 2\right) \quad a = -\frac{3}{4}\sqrt{2} :$$

ne segue che

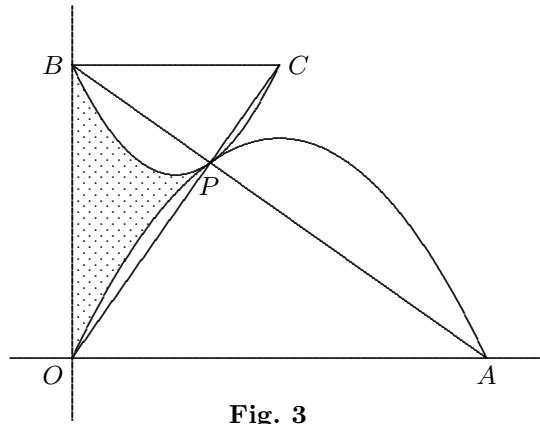
$$\gamma : y = -\frac{3}{4}\sqrt{2}(x^2 - 2x) = -\frac{3}{4}\sqrt{2}x^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}x.$$

Per γ_1 basta imporre il passaggio per i punti $B(0, \sqrt{2})$, $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{2})$, $C(1, \sqrt{2})$ ossia

$$\begin{cases} \sqrt{2} = a + b + \sqrt{2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + \sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -b \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} = -\frac{4}{9}b + \frac{2}{3}b + \sqrt{2} \end{cases}$$

che implicano $b = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$ e $a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Allora

$$\gamma_1 : y = \frac{3}{2}\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}x + \sqrt{2}.$$



La verifica della tangenza di γ e γ_1 in P si ottiene osservando l'uguaglianza delle rispettive derivate in P . Difatti

$$\begin{aligned}\gamma : y' &= -\frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot (2x) + \frac{3}{2}\sqrt{2} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}(x-1) \\ \gamma_1 : y'_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot (2x) - \frac{3}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}y' \left(\frac{2}{3} \right) &= -\frac{3}{2}\sqrt{2} \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'_1 \left(\frac{2}{3} \right) &= 3\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

cioè $y' = y'_1$ per $x = x_P$.

■ Calcolo dell'area.

L'area delimitata dalle due parabole e dall'asse y (fig.3) si ottiene calcolando l'integrale

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} - \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x \right) \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[\frac{9}{4}\sqrt{2}x^2 - 3\sqrt{2}x\sqrt{2} \right] dx \\ &= \left[\frac{9}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{x^3}{3} - 3\sqrt{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x \right]_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \left[\frac{9}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{8}{81} - 3\sqrt{2} \cdot \frac{4}{18} + \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{2}{9}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

In alternativa, sottraendo dall'area del triangolo OPB le aree dei due segmenti parabolici $seg(OP)$ e $seg(BP)$ calcolate tramite la formula generalizzata di Archimede, si ottiene

$$\begin{aligned}
 A &= \mathcal{A}(OPB) - seg(OP) - seg(BP) \\
 &= \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot \left| \frac{2}{3} - 0 \right|^3 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{2} \left| \frac{2}{3} - 0 \right|^3 \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8}{27} - \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{9} \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Ulteriori metodi di risoluzione

L'allineamento di P con A e B si può dimostrare utilizzando pure le comuni conoscenze di geometria elementare. Difatti detto $\{P'\} = OC \cap AB$ (fig.4) il punto di intersezione del segmento OC con il segmento AB si ha:

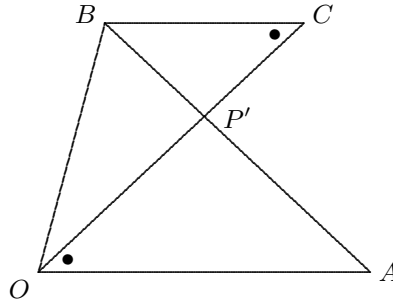


Fig. 4

$\angle COA = \angle OCB$ perché alterni interni rispetto alle rette parallele OA e BC tagliate dalla trasversale OC , $\angle OP'A = \angle BP'C$ perché opposti al vertice. Ne segue che i triangoli $\triangle OP'A$ e $\triangle BP'C$ sono simili e i lati corrispondenti stanno nel rapporto

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{BC}} = 2 \quad \text{e in particolare} \quad \frac{\overline{OP'}}{\overline{P'C}} = 2.$$

Allora $\overline{OP'} = 2\overline{P'C}$ ma poiché il testo afferma che è pure $\overline{OP} = 2\overline{PC}$ discende che $P \equiv P'$.

Un'altra dimostrazione in termini vettoriali dell'allineamento, si ottiene osservando (fig.1) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{BC})$. Poiché $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{BC}$ si può concludere che $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, espressione questa che dimostra la tesi.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

■ Determinazione di $E(x)$.

Per determinare la funzione $E(x)$ è sufficiente risolvere l'integrale indefinito

$$E(x) = - \int f(x) \, dx$$

e imporre la condizione che $E(0) = -1$ oppure, considerata l'espressione proposta come un'equazione differenziale $dE = -f(x) \, dx$, integrare entrambi i membri

$$\int_{E(0)}^{E(x)} dE = - \int_0^x f(x) \, dx \quad E(x) - E(0) = - \int_0^x (2x^3 - 4x)e^{-x^2} \, dx.$$

Ne segue che

$$E(x) - (-1) = -2 \int_0^x x^3 e^{-x^2} \, dx + 4 \int_0^x e^{-x^2} \, dx. \quad (1)$$

I due integrali della (1) si possono risolvere tramite la sostituzione $x^2 = t$ da cui $x = \sqrt{t}$ e $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ e quindi

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx = \int \sqrt{t} \cdot t \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{2} \int t e^{-t} \, dt =$$

procedendo per parti

$$= \frac{1}{2} \left[(e^{-t}) \cdot t - \int (-e^{-t}) \, dt \right] = \frac{1}{2} \left[-te^{-t} + \int e^{-t} \, dt \right] = \frac{e^{-t}}{2} (-t - 1) + c,$$

e in definitiva

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + c.$$

Per il secondo integrale e con la medesima sostituzione,

$$\int x e^{-x^2} \, dx = \int \sqrt{t} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{2} \int e^{-t} \, dt = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c.$$

La (1) diviene allora

$$\begin{aligned} E(x) + 1 &= -2 \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) \right]_0^x + 4 \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^x \\ E(x) + 1 &= e^{-x^2} (x^2 + 1) - 1 - 2e^{-x^2} + 2 = e^{-x^2} (x^2 - 1) + 1 \end{aligned}$$

da cui

$$E(x) = e^{-x^2} (x^2 - 1). \quad (2)$$

■ Studio di $E(x)$.

Il dominio di $E(x)$ coincide con $\mathbb{R}$ e poiché per $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(-x) = E(x)$, la funzione risulta simmetrica rispetto all'asse delle y . $E(x)$ è inoltre continua in $\mathbb{R}$. La funzione risulta positiva dove è soddisfatta la disequazione $E(x) \geq 0$ da cui $x^2 - 1 \geq 0$ che è risolta per $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

I limiti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} E(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$ risultano indeterminati, ma poiché il limite del rapporto delle derivate esiste

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

si può applicare il T. di De L'Hôpital e quindi concludere che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} E(x) = 0.$$

Passando alla derivata prima $E'(x) = -f(x) = -(2x^3 - 4x)e^{-x^2} = -2x(x^2 - 2)e^{-x^2}$ si studia il segno dei due fattori $-2x \geq 0$ da cui $x \leq 0$: l'altro termine $x^2 - 2 \geq 0$ è risolto dalle $x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$.

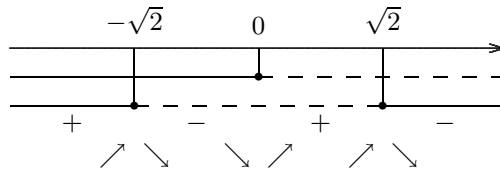


Fig. 1

Combinandoli (fig.1) si ha $E(x) \geq 0$ per $x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [0, \sqrt{2}]$.

La derivata seconda $E''(x) = (-6x^2 + 4)e^{-x^2} + (-2x^2 + 4x) \cdot (-2x)e^{-x^2}$ risulta

$$E''(x) = 2e^{-x^2} [2x^4 - 7x^2 + 2],$$

e $E''(x) \geq 0$ quando $2x^4 - 7x^2 + 2 \geq 0$. Risolvendo questa disequazione biquadratica si giunge a

$$x^2 \leq \frac{7 - \sqrt{33}}{4} \vee x^2 \geq \frac{7 + \sqrt{33}}{4}$$

che implicano a loro volta le soluzioni

$$-\frac{\sqrt{7 - \sqrt{33}}}{2} \leq x \leq +\frac{\sqrt{7 - \sqrt{33}}}{2} \vee x \leq -\frac{\sqrt{7 + \sqrt{33}}}{2} \vee x \geq +\frac{\sqrt{7 + \sqrt{33}}}{2}.$$

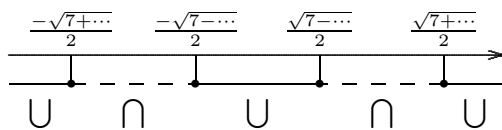


Fig. 2

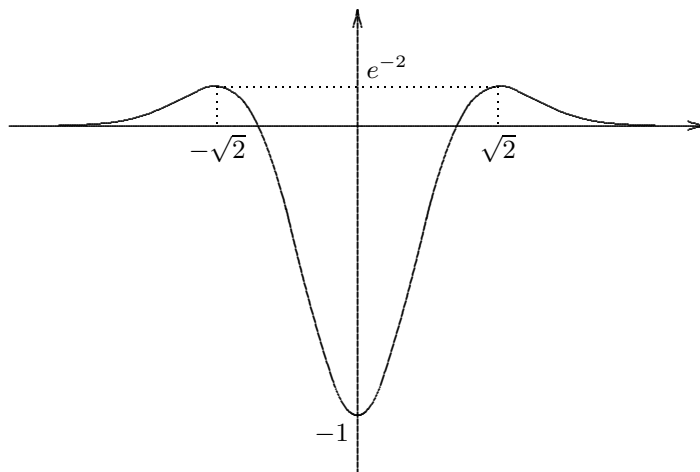


Fig. 3

Il segno di $E''(x)$ è pertanto

e la funzione possiede l'andamento rappresentato in fig.3.

Il punto P è in equilibrio quando la forza è nulla ossia per $x = 0$ e per $x = \pm\sqrt{2}$. L'energia potenziale assume in $x = 0$ il valore $E(0) = -1$ mentre $E(\pm\sqrt{2}) = e^{-2}$.

In particolare per $x = 0$ risulta $E(0) < 0$ e il punto è di equilibrio stabile mentre i punti relativi a $x = \pm\sqrt{2}$ sono di equilibrio instabile. Per valori molto grandi di x la situazione fisica tende verso un equilibrio indifferente in quanto l'energia potenziale converge asintoticamente allo zero: analogo andamento presenta la forza.

Ulteriori metodi di risoluzione

L'integrazione della $dE = -f(x) dx$ si può ottenere anche direttamente osservando che

$$\begin{aligned} E(x) &= - \int (2x^3 - 4x) e^{-x^2} dx \\ &= \int (-2x)(x^2 - 2) e^{-x^2} dx \\ &= \int (x^2 - 2) e^{-x^2} d(-x^2), \end{aligned}$$

e quindi procedendo per parti si giunge a

$$\begin{aligned} E(x) &= (x^2 - 2)e^{-x^2} + \int e^{-x^2} d(-x^2) = (x^2 - 2)e^{-x^2} + e^{-x^2} + c \\ &= e^{-x^2}(x^2 - 1) + c \end{aligned}$$

dove non rimane che imporre la condizione iniziale $E(0) = -1$.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

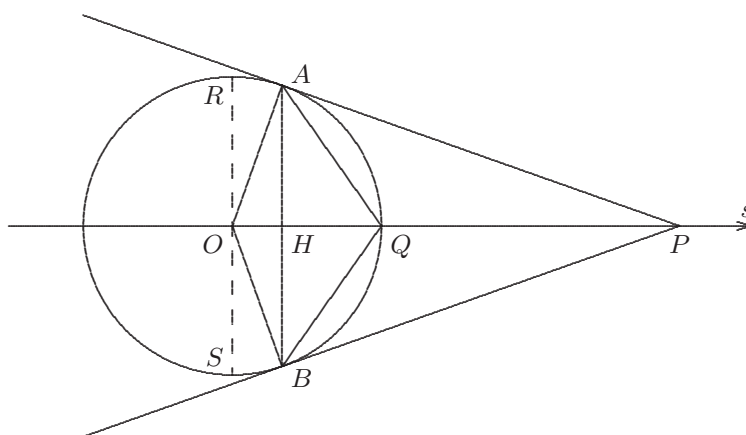


Fig. 1

Per ipotesi si ha: $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, $\overline{PQ} = x$ e la prima parte del problema consiste nell'esprimere il rapporto

$$k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$$

in termini di x .

Conviene pertanto avviare una discussione preliminare del problema notando che, poiché il testo afferma che P è esterno alla circonferenza allora è anche $x > 0$. Se quindi $x \rightarrow +\infty$, osservando la fig.1, $A \rightarrow R$ e $B \rightarrow S$. Inoltre, per la simmetria della situazione geometrica $\overline{AQ} = \overline{QB}$, per cui $k = 2\overline{AQ}/\overline{AB}$ e $\overline{AQ} \rightarrow \overline{RQ} = \sqrt{2}$ mentre $\overline{AB} \rightarrow \overline{RS} = 2$. Ne segue che se

$$x \longrightarrow +\infty \quad k \longrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Il limite richiesto deve quindi essere pari a $\sqrt{2}$: comunque, poiché si chiede di studiare la funzione $y = k^2$ con k espresso in termini di x , va pure determinata esplicitamente questa dipendenza.

■ Determinazione di k : metodo trigonometrico.

Posto $\alpha = \angle AOH$, ed essendo $\triangle OPA$ rettangolo in A si ottiene $\overline{OA}/\overline{OP} = \cos \alpha$ da cui, essendo $\overline{OP} = 1 + x$,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{1+x}.$$

D'altra parte considerando $\triangle OHA$, è $\overline{AH} = \overline{OA} \sin \alpha = \sin \alpha$ che espresso in termini di $\cos \alpha$ diviene

$$\overline{AH} = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^2} = \frac{\sqrt{2x+x^2}}{1+x}.$$

Inoltre, essendo $\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle AOQ$ in quanto, il primo angolo alla circonferenza, e il secondo angolo al centro che insiste sul medesimo arco AQ , applicando il teorema della corda (o dei seni) discende $\overline{AQ} = \text{diametro} \cdot \sin \angle ABQ$ cioè

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \\ &= \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)} = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$k = \frac{2\overline{AQ}}{\overline{AB}} = \frac{2\overline{AQ}}{2\overline{AH}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AH}} = \frac{2\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}{\frac{2\sqrt{x^2+2x}}{1+x}} = \dots = \sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}}.$$

■ Determinazione di k : metodo geometrico.

Volendo seguire “metodi” più tradizionali, applicando il teorema di Pitagora a $\triangle OPA$ si determina $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 - 1} = \sqrt{x^2 + 2x}$. Esprimendo poi la doppia area di $\triangle OPA$ come $\overline{OP} \cdot \overline{AH} = \overline{OA} \cdot \overline{AP}$ ne segue

$$\overline{AH} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{1+x}.$$

D'altra parte applicando il primo teorema di Euclide a $\triangle OPA$ risulta $\overline{OA}^2 = \overline{OH} \cdot \overline{OP}$ da cui $\overline{OH} = 1/(1+x)$: poiché

$$\overline{HQ} = \overline{OQ} - \overline{OH} = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

è anche

$$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{HQ}^2 + \overline{AH}^2} = \dots = \sqrt{\frac{2x}{1+x}},$$

da cui k .

■ Limite di k .

Per lo studio del limite di k si procede raccogliendo la potenza massima:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x(1+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2+\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

in quanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

■ Studio della funzione $y = k^2$.

La funzione da studiare risulta

$$y = k^2 = \frac{2(x+1)}{x+2} \quad \text{con la limitazione geometrica } x > 0.$$

Poiché l'equazione sopra rientra nella classe delle funzioni omografiche, essa è rappresentativa nell'insieme $\mathbb{R} - \{-2\}$ di una iperbole equilatera traslata di asintoto verticale $x = -2$ ed orizzontale $y = 2$. Tenendo conto della condizione $x > 0$, la funzione richiesta è una restrizione della omografica: è quindi l'arco di iperbole equilatera compreso nel 1° quadrante (fig.2).

In tal modo non vi è alcuna regione delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani e la risposta alla domanda sul calcolo dell'area della regione dev'essere negativa.

■ Calcolo dell'area.

Generalizzando lo studio della funzione anche a valori di $x \leq 0 \wedge x \neq -2$, assume significato la richiesta del testo per cui l'area si potrà determinare tramite l'integrale definito

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 2 \left(\frac{x+1}{x+2} \right) dx = \text{procedendo per scomposizione} \\ &= 2 \int_{-1}^0 \frac{x+1+1-1}{x+2} dx = 2 \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= 2 [x - \ln|x+2|]_{-1}^0 = 2[-\ln 2 + 1 + 0] = 2 - 2\ln 2 \approx 0,614. \end{aligned}$$

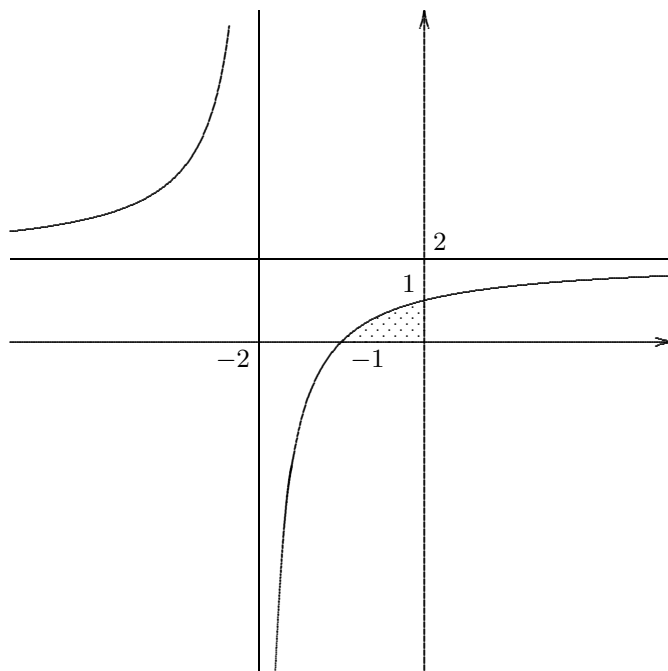


Fig. 2 Grafico di $y = k^2$ (non isometrico).

Ulteriori metodi di risoluzione

Nel caso non si sia riconosciuta nell'equazione $y = f(x)$ la funzione omografica, lo studio va fatto con il metodo consueto. Il dominio di

$$y = \frac{2(x+1)}{x+2}$$

è $\mathbb{R} - \{-2\}$ e, non essendo simmetrico rispetto all'origine implica che la funzione non è né pari né dispari.

■ Studio del segno: da $y \geq 0$ discende $x+1 \geq 0$ da cui $x \geq -1$, mentre $x+2 > 0$ comporta che $x > -2$. Allora $y \geq 0$ per $] -\infty, -2[\cup [-1, +\infty[$.

■ Risulta inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -2\pm} y = \mp\infty.$$

■ Confrontando la funzione con l'asintoto orizzontale $y_a = 2$ discende

$$y - y_a \geq 0 \quad \frac{2x+2}{x+2} - 2 \geq 0 \quad \frac{-2}{x+2} \geq 0$$

che è soddisfatta per $x+2 < 0$. Allora la funzione giace “sopra” l'asintoto per $x < -2$.

- Poiché y' è

$$y' = 2 \left[\frac{1 \cdot (x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} \right] = \frac{2}{(x+2)^2} > 0 \quad \text{per} \quad \forall x \neq -2,$$

la funzione è sempre crescente nel dominio.

- Passando alla y''

$$y'' = 2 \left[\frac{-2(x+2)}{(x+2)^4} \right] = \frac{-4}{(x+2)^3} > 0,$$

e l'ultima disequazione è risolta per $x+2 < 0$. Ne segue che per $x < -2$ la concavità è rivolta “verso l'alto” mentre è “verso il basso” per $x > -2$.

- Infine l'intersezione di y con l'asse delle ordinate si ottiene ponendo $x = 0$ da cui $y = 1$.

MATURITÀ '93

Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti:

- **Quesito n. 1**

La funzione $f(x)$ sia rappresentata

$$\begin{array}{llll} \text{per} & x \leq 1 & \text{da} & y = -3x^2 + Hx \\ \text{per} & x > 1 & \text{da} & y = \frac{K}{x^2}. \end{array}$$

Determinare le costanti H e K in modo che la funzione $y = f(x)$ e la sua derivata siano continue in $x = 1$. Rappresentare la funzione così trovata e calcolarne l'integrale definito tra 0 e $+\infty$.

Soluzione

- **Quesito n. 2**

Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O , tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro O .

Detto A il punto di coordinate $(1, 0)$, indicare con θ l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca γ ($\widehat{POA} = \theta$). Determinare in funzione di θ l'ordinata y del punto Q appartenente al semiasse positivo delle y tale che $\overline{PQ} = 2$.

Descrivere - limitandosi all'uso della derivata prima - la funzione $y = f(\theta)$ trovata.

Se P ruota sulla circonferenza γ con velocità angolare costante, il moto di Q quali caratteristiche presenta?

Negli istanti in cui Q ha velocità nulla, P dove si trova?

Soluzione

- **Quesito n. 3**

Sia

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Esprimere y in funzione di x e rappresentare tale funzione che si presenta sotto la forma $y = \pm f(x)$.

Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato.

Calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata.

[L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $\sqrt{1-x^2} = z$.]

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

Riscritta la funzione nella forma

$$f : \begin{cases} y = -3x^2 + Hx, & x \leq 1, \\ y = \frac{K}{x^2}, & x > 1, \end{cases}$$

la condizione di continuità per la f si traduce nell'uguaglianza tra il limite del ramo sinistro per $x \rightarrow 1^-$, con il limite del ramo destro per $x \rightarrow 1^+$ ossia

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -3x^2 + Hx = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{K}{x^2}.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -3x^2 + Hx = -3 + H \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{K}{x^2} = \frac{K}{1} = K$$

ne deriva la condizione $-3 + H = K$.

L'altra condizione si ottiene imponendo la continuità della funzione derivata prima che risulta

$$f' : \begin{cases} y' = -6x + H, & x \leq 1, \\ y' = -\frac{2K}{x^3}, & x > 1. \end{cases}$$

Analogamente a quanto fatto per f dev'essere

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -6x + H = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2K}{x^3}$$

e quindi poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -6x + H = -6 + H \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2K}{x^3} = -2K,$$

la seconda equazione che si ottiene è $-6 + H = -2K$. Il sistema

$$\begin{cases} -3 + H = K \\ -6 + H = -2K \end{cases}$$

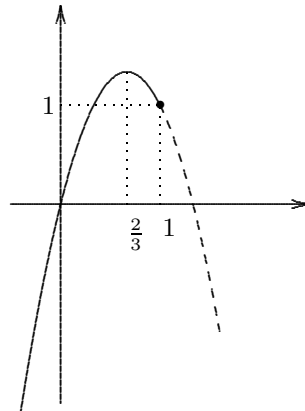


Fig. 1 Ramo sinistro di f .

possiede pertanto le soluzioni $H = 4$ e $K = 1$ e la funzione richiesta è

$$f : \begin{cases} y = -3x^2 + 4x, & x \leq 1, \\ y = \frac{1}{x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Il ramo sinistro di f è costituito da un arco della parabola $y = -3x^2 + 4x$ avente il vertice $V(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ e disposta con la concavità verso il basso. Il suo segno discende da $-3x^2 + 4x \geq 0$, che implica $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ ma per la limitazione di $x \leq 1$ si riduce a $0 \leq x \leq 1$. È inoltre $f(1) = 1$ (fig.1).

L'altro ramo è rappresentato da un'equazione che implica $y > 0$ per $\forall x \in \mathbb{R}_0$ ossia nel nostro caso, $x > 1$.

Considerata in $\mathbb{R}_0$ la funzione $g(x) = 1/x^2$

- possiede un asintoto verticale in $x = 0$ in quanto $\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty$,
- poiché $g(-x) = g(x)$ è simmetrica pari,
- mentre per $x \rightarrow +\infty$ essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

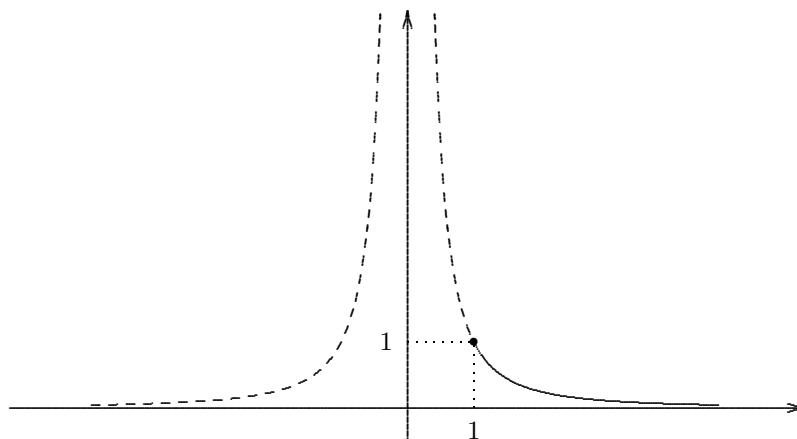
presenta l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale.

Per la continuità in $x = 1$ di f risulta pure

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x^2} = 1,$$

mentre la derivata prima risulta

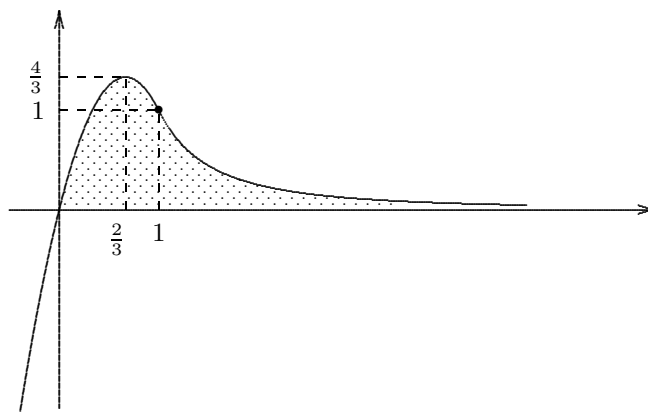
$$y' = -\frac{2}{x^3} < 0 \quad \text{per } x > 0 \quad \text{e quindi per } x > 1$$

**Fig. 2** Ramo destro di f .

e la derivata seconda

$$y'' = \frac{6}{x^4} > 0 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}_0 \quad \text{e quindi per } x > 1.$$

Il grafico di g è rappresentato dalla fig.2
mentre la fig.3 presenta il grafico completo di f .

**Fig. 3** Grafico di f .

Il calcolo dell'integrale richiesto dal testo del problema equivale al calcolo dell'area compresa tra il grafico di f e il semiasse positivo delle x (parte evidenziata della precedente figura 3). Sfruttando la proprietà addittiva degli integrali definiti ossia

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

l'integrale richiesto si suddivide in

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^{+\infty} f(x) \, dx,$$

per cui sostituendo a $f(x)$ le equazioni che la rappresentano nei rispettivi intervalli di integrazione si ottiene

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \int_0^1 (-3x^2 + 4x) \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx.$$

L'integrazione del primo addendo è immediata e fornisce

$$\int_0^1 (-3x^2 + 4x) \, dx = \left(-3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right)_0^1 = (-x^3 + 2x^2)_0^1 = -1 + 2 = 1,$$

mentre per il secondo, essendo un integrale generalizzato, va risolto il limite che ne deriva ossia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \left(-\frac{1}{x} \right)_1^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} \right) - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

In definitiva

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = 1 + 1 = 2.$$

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

Tracciata la fig.1, per quanto noto sulle funzioni circolari risulta che $x_P = 1 \cdot \cos \theta$ e $y_P = 1 \cdot \sin \theta$. Le coordinate di P sono pertanto $P(\cos \theta, \sin \theta)$ mentre Q , dovendo appartenere all'asse delle ordinate, avrà ascissa nulla $x_Q = 0$ e ordinata $y_Q > 0$, in quanto lo si vuole sul semiasse positivo delle y . Poiché si chiede y_Q , tale ordinata verrà considerata come incognita. Imponendo la condizione sulla distanza tra P e Q , $\overline{PQ} = 2$ si ottiene un'equazione in tale incognita. Difatti

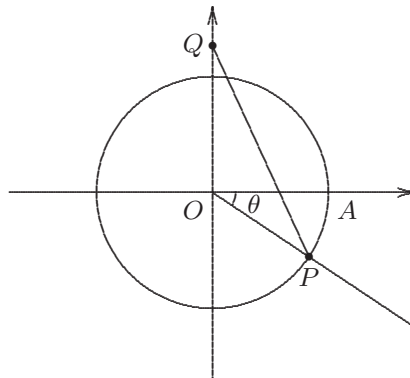


Fig. 1

$$\overline{PQ} = 2 \implies \overline{PQ}^2 = 4 \quad \text{da cui} \quad (\cos \theta - 0)^2 + (\sin \theta - y_Q)^2 = 4.$$

Svolgendo i calcoli

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + y_Q^2 - 2y_Q \sin \theta - 4 = 0$$

e ricordando l'identità fondamentale della Goniometria $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ si giunge alla

$$y_Q^2 - 2y_Q \sin \theta - 3 = 0$$

che risolta porta alle due soluzioni

$$y_Q = \sin \theta \pm \sqrt{\sin^2 \theta + 3}$$

entrambe reali in quanto $\sin^2 \theta + 3 > 0$. Poiché si vuole $y_Q > 0$, risulta accettabile solo quella positiva

$$y_Q = \sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + 3} = f(\theta)$$

che quindi costituisce pure la funzione $y = f(\theta)$ da studiare.

Questa funzione possiede

- per dominio l'insieme $\mathbb{R}$,
- risulta periodica con periodo $T = 2\pi$ in quanto

$$\begin{aligned} f(\theta + 2\pi) &= \sin(\theta + 2\pi) + \sqrt{\sin^2(\theta + 2\pi) + 3} \\ &= \sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + 3} = f(\theta), \end{aligned}$$

- non è simmetrica

$$f(-\theta) = \sin(-\theta) + \sqrt{\sin^2(-\theta) + 3} = -\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + 3} \neq \pm f(\theta),$$

- risulta positiva per $\forall \theta \in \mathbb{R}$, sia per la condizione posta dal testo, sia perché dalle disequazioni

$$\sqrt{\sin^2 \theta + 3} \geq \sqrt{3}, \quad \wedge \quad -1 \leq -\sin \theta \leq 1$$

discende la validità della $\sqrt{\sin^2 \theta + 3} > -\sin \theta$,

- il valore assunto agli estremi 0 e 2π del periodo principale, è $f(0) = f(2\pi) = \sqrt{3}$,
- è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Il calcolo della derivata conduce all'espressione

$$f'(\theta) = \cos \theta + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 3}} = \cos \theta \left(1 + \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 3}} \right),$$

per cui la disequazione $f'(\theta) \geq 0$ si può ricondurre allo studio del segno dei due fattori che la compongono.

$$\begin{aligned} \cos \theta \geq 0 &\iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & \text{e} \\ 1 + \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 3}} &\geq 0 : \end{aligned}$$

moltiplicando per $\sqrt{\sin^2 \theta + 3} > 0$ l'ultima disequazione implica

$$\sqrt{\sin^2 \theta + 3} + \sin \theta \geq 0 \implies \sqrt{\sin^2 \theta + 3} \geq -\sin \theta.$$

Per quanto già discusso questa è soddisfatta per $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ossia

$$1 + \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 3}} > 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Il segno di f' è pertanto quello del primo fattore ossia nell'intervallo $[0, 2\pi]$ viene descritto dal grafico

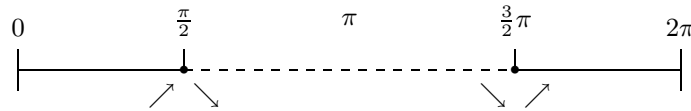


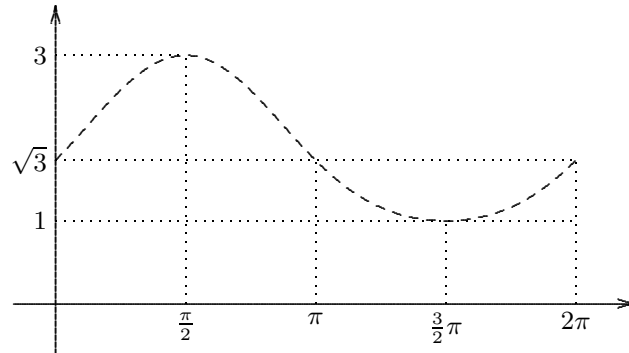
Fig. 2

e in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(\theta) > 0 &\iff 2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < \theta < 2\pi + 2k\pi \\ f'(\theta) = 0 &\iff \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{aligned}$$

La f possiede pertanto dei massimi relativi propri in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ del valore di $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 + \sqrt{4} = 3$ e che vengono raggiunti quando P coincide con il punto A di γ (fig.1), mentre i minimi relativi si raggiungono quando $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, valgono

$$f\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = -1 + \sqrt{4} = 1,$$

Fig. 3 Possibile grafico di f .

P coincide con B e il punto Q sta in A . Questi estremi sono pure di tipo assoluto in quanto il codominio della funzione risulta essere l'intervallo $[1, 3]$.

Poiché non si chiede lo studio della derivata seconda un possibile grafico di f nell'intervallo $[0, 2\pi]$ può essere quello rappresentato dalla fig.3 dove si è determinato pure il valore $f(\pi) = \sqrt{3}$.

Se P ruota su γ con velocità angolare costante ω , allora dalla conoscenza delle caratteristiche del moto circolare discende che $\theta = \omega t$ e

$$f(\theta) = f(\omega t) = F(t) = \sin \omega t + \sqrt{\sin^2 \omega t + 3}.$$

La funzione $F(t)$ viene ora a descrivere l'ordinata del punto Q in funzione del tempo t . La velocità v di Q è espressa in funzione di t dalla derivata di F ossia

$$\begin{aligned} F'(t) = v(t) &= \omega \cos \omega t + \frac{\omega \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{\sin^2 \omega t + 3}} \\ &= \omega \cos \omega t \left(1 + \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\sin^2 \omega t + 3}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Utilizzando quanto già ottenuto circa la $f(\theta)$, la descrizione fisica del moto di Q consiste nel notare che esso è

- di tipo oscillatorio,
- avviene tra gli estremi $y = 1$ e $y = 3$,
- è periodico con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (dove T rappresenta ora una grandezza avente le dimensioni di un tempo),
- la velocità di Q è positiva cioè concorde al verso dell'asse y negli istanti che soddisfano la $v(t) > 0$ e che, per la positività del fattore tra parentesi nell'espressione (1) di $v(t)$, si traduce nella condizione $\cos \omega t > 0$, da cui

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \omega t < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ossia} \quad -\frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} < t < \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}.$$

Il punto P in tali intervalli giace sulla semicirconferenza di ascisse positive.

La velocità si annulla invece dove $v(t) = 0$ quando cioè $\cos \omega t = 0$. Ne segue che $\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ da cui gli istanti richiesti $t_0 = \frac{\pi}{\omega} + k\frac{\pi}{\omega}$: nei rimanenti intervalli di tempo la velocità del punto Q è negativa e il punto P si trova sui punti di γ con ascisse negative.

Le posizioni di P negli istanti $t_0 = \frac{\pi}{\omega} + k\frac{\pi}{\omega}$ si deducono osservando che $\theta = \omega t_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per cui P deve coincidere con i punti A e B dell'asse y e comuni pure a γ (fig.1).

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

L'espressione data dal testo rappresenta la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nella sua forma parametrica. Il parametro t è reale ($t \in \mathbb{R}$) e, per le note proprietà del codominio della funzione seno, è pure $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$.

Dovendo ridurre f alla forma $y = \pm f(x)$, va tenuto presente che

$$y = \sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

e che

$$\cos t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 t}.$$

Ne segue che, poiché $x = \sin t$ è pure

$$\cos t = \pm \sqrt{1 - x^2},$$

per cui

$$y = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \left(\pm \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) = \pm 2x \sqrt{1 - x^2}.$$

Più correttamente da $y = \sin 2t$ discende $|y| = |\sin 2t| = |2 \sin t \cos t|$. Allora

$$\begin{aligned} |y| &= 2 |\sin t| \cdot |\cos t| = 2 |\sin t| \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= 2|x| \cdot \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

■ Ricerca delle simmetrie. Già a livello intuitivo la forma trovata

$$y = \pm 2x \sqrt{1 - x^2} \tag{2}$$

evidenzia una simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse in quanto ad un valore di x corrispondono 2 valori opposti di y . Il grafico Γ dovrebbe pertanto essere unito rispetto alla trasformazione di simmetria

$$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Difatti sostituendo ad x e a y le coordinate del punto immagine (x', y') si ha

$$-y' = \pm 2x' \sqrt{1 - (x')^2} \implies y' = \pm 2x' \sqrt{1 - (x')^2}$$

che risulta della medesima forma dell'equazione originaria (2). Quindi $(x, y) \in \Gamma \iff (x', y') \in \Gamma$.

La funzione f possiede pure un'altra proprietà di simmetria, quella rispetto all'origine (σ_O). Difatti risulta che

$$\begin{aligned} f(-x) &= \pm 2(-x) \sqrt{1 - (-x)^2} = \mp 2x \sqrt{1 - x^2} \\ &= -(\pm 2x \sqrt{1 - x^2}) = -f(x). \end{aligned}$$

Ne segue che, poiché l'equazione di f è invariante per trasformazioni σ_x e σ_O , lo è anche rispetto alla loro composizione $\sigma_x \circ \sigma_O$ e questa non è altro che σ_y ossia la trasformazione di simmetria rispetto all'asse y . Γ risulterà perciò unito anche per una simmetria assiale di asse y .

Tutto ciò si constata più direttamente se si utilizza la forma (1), in quanto il cambiamento di un segno all'interno dei valori assoluti non modifica la forma dell'equazione che pertanto risulta invariante sia per trasformazioni assiali di asse x

$$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y, \end{cases}$$

di asse y

$$\sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y, \end{cases}$$

e pure per simmetrie centrali di centro l'origine

$$\sigma_O : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Ottenute queste caratteristiche complessive di Γ , conviene passare ad uno studio più particolareggiato limitandosi all'intervallo $0 \leq x \leq 1$ e solo successivamente, estendere per simmetria le osservazioni accumulate all'intero dominio. Studieremo pertanto la funzione

$$f_1(x) = 2x \sqrt{1 - x^2} \quad x \in [0, 1].$$

■ Per quanto riguarda il segno, la disequazione $f_1(x) > 0$ è risolta per $0 < x < 1$, mentre risulta $f_1(0) = f_1(1) = 0$.

- Il calcolo della derivata conduce a

$$\begin{aligned}
 f_1'(x) &= 2 \left(1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) \\
 &= 2 \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} (1-2x^2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

La disequazione $f_1'(x) \geq 0$ implica $1-2x^2 \geq 0$ che è risolta per i valori dell'intervallo

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ossia, per le nostre limitazioni} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il segno della derivata prima è quindi sintetizzato dalla fig.1

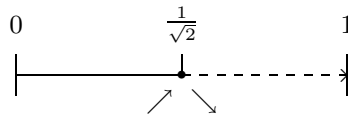


Fig. 1

dalla quale emerge l'esistenza di un massimo raggiunto nel punto di ascissa $1/\sqrt{2}$. L'ordinata corrispondente vale $f(1/\sqrt{2}) = 1$.

Poiché in $x = 1$ la derivata non esiste in quanto l'espressione (3) non è ivi nemmeno calcolabile, conviene studiarne l'andamento nell'intorno sinistro determinandone il limite. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1'(x) = -\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} 1-2x^2 = -1.$$

In $x = 1$ la tangente è pertanto verticale: un possibile grafico di f potrebbe assumere la forma di fig.2.

Per poter dedurre la disposizione delle concavità e convessità si dovrà studiare il segno della derivata seconda. Il suo calcolo risulta

$$\begin{aligned}
 f_1''(x) &= 2 \cdot \left\{ D \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] \cdot (1-2x^2) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-4x) \right\} \\
 &= 2 \cdot \left\{ -\frac{1}{2} (1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) \cdot (1-2x^2) - \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} \right\}
 \end{aligned}$$

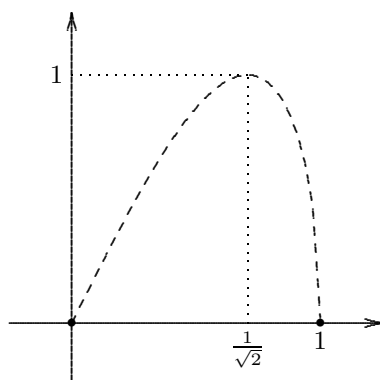


Fig. 2 Possibile grafico di f_1 .

$$= 2 \cdot \left\{ \frac{x(1-2x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

e fattorizzando i termini comuni a numeratore e a denominatore si giunge a

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left\{ \frac{1-2x^2}{1-x^2} - 4 \right\} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(\frac{2x^2-3}{1-x^2} \right). \end{aligned}$$

Il segno di $f_1''(x)$ dipende sostanzialmente dai termini x e $2x^2 - 3$. Le relative disequazioni sono $x \geq 0$ e $2x^2 - 3 \geq 0$. Quest'ultima comporta le soluzioni

$$x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

per cui nell'intervallo $[0, 1]$ la $f_1''(x)$ risulta sempre negativa (fig.3) e la concavità è rivolta verso il basso. Si noti che in $x = 0$ $f_1''(x)$ cambia con continuità il proprio segno (si tenga presente la simmetria rispetto all'origine) per cui $x = 0$ è punto di flesso obliquo.

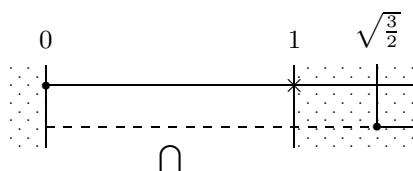


Fig. 3 Segno della $f_1''(x)$.

Il grafico complessivo di f è espresso dalla fig.4 che rappresenta pure una tra le più semplici figure di Lissajous, figure queste che si ottengono dalla sovrapposizione di

due moti oscillatori armonici fra loro ortogonali. Il moto sull'asse delle x avviene con pulsazione $\omega_1 = 1$ e periodo $T_1 = 2\pi$ mentre quello lungo l'asse y possiede una pulsazione doppia $\omega_2 = 2$ ed un periodo $T_2 = \pi$.

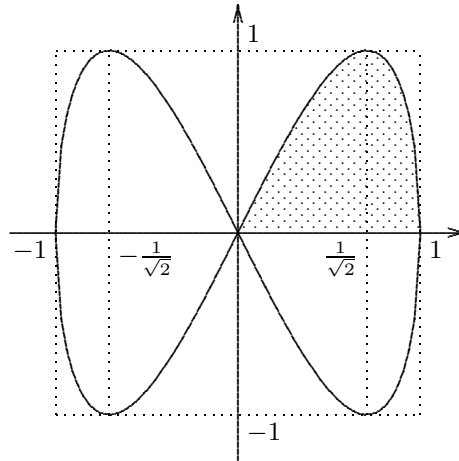


Fig. 4 Grafico di f .

A seguito delle simmetrie riscontrate per la f l'area racchiusa dal grafico si può ottenere moltiplicando per 4 l'area appartenente al primo quadrante ed evidenziata nella figura. Pertanto risulta

$$A = 4 \cdot \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx = 8 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx.$$

L'integrale indefinito

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx$$

si risolve, come suggerito dal testo, tramite la sostituzione $z = \sqrt{1-x^2}$ ossia $z^2 = 1-x^2$, $x^2 = 1-z^2$ da cui, se $x \geq 0$ $x = \sqrt{1-z^2}$. Ne segue che il differenziale dx diventa

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{1-z^2}} \cdot (-2z)dz = \frac{-zdz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Sostituendo si giunge

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-z^2} \cdot z \cdot \frac{-zdz}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= \int -z^2 dz = -\int z^2 dz = -\frac{z^3}{3} + c = -\frac{1}{3} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 + c. \end{aligned}$$

L'area è pertanto

$$\begin{aligned} A &= 8 \left[-\frac{1}{3} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 \right]_0^1 = 8 \left[-\frac{1}{3} (\sqrt{1-1})^3 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) \right] \\ &= 8 \left[\frac{1}{3} \right] = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

L'integrale indefinito si può pure risolvere in modo alternativo: difatti

$$4 \cdot \int 2x \sqrt{1-x^2} \, dx = -4 \cdot \int (-2x) \sqrt{1-x^2} \, dx$$

e si può osservare che $-2x \, dx$ risulta essere il differenziale dell'argomento della radice. Posto quindi $r = 1 - x^2$ discende

$$\begin{aligned} -4 \cdot \int (-2x) \sqrt{1-x^2} \, dx &= -4 \cdot \int \sqrt{1-x^2} \, d(1-x^2) \\ &= -4 \int r^{1/2} \, dr = -4 \cdot \frac{r^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{8}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + c, \end{aligned}$$

da cui

$$A = \left[-\frac{8}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \right]_0^1 = -\frac{8}{3} \sqrt{(1-1)^3} + \frac{8}{3} \sqrt{(1-0)^3} = \frac{8}{3}.$$

MATURITÀ '94

Il candidato svolga, a scelta, due dei seguenti quesiti:

- **Quesito n. 1**

Nel piano, riferito ad un sistema di assi ortogonali Oxy , è assegnata la curva K di equazione $y = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1|$. Disegnare un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali. Calcolare inoltre l'area della regione piana delimitata da K , dall'asse x e dalla retta di equazione $2x - 3 = 0$. Stabilire infine quale delle due aree precedenti è la maggiore.

Soluzione

- **Quesito n. 2**

Una piramide ha per base il triangolo ABC , isoscele e rettangolo in A , ed ha per altezza il segmento AV . Inoltre la faccia VBC forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo VB è lungo $2h\sqrt{3}$ dove h è una lunghezza nota. Calcolare la distanza del vertice A dal piano della faccia VBC e trovare per quale valore di h tale distanza vale $4\sqrt{2}$. Verificato che questo valore di h è 4, con riferimento ad esso secare la piramide con un piano parallelo alla base ABC e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza x . Studiare, in rapporto alla questione geometrica, la funzione $f(x)$ ricavata e tracciarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy . Calcolare infine quanti, fra i punti della regione piana compresa fra il grafico di $f(x)$ e l'asse x , escluso il contorno, hanno entrambe le coordinate intere.

Soluzione

- **Quesito n. 3**

Considerato un triangolo ABC , isoscele sulla base BC , indicare con D il piede della sua altezza condotta per C e costruire il triangolo ECD , isoscele sulla base CD e simile a quello dato, in modo che il punto E cada dalla stessa parte di A rispetto a BC . Sia $\overline{BC} = 4$ e $\overline{CD} = 2\sqrt{3}$.

a) Dimostrare che $\angle ECB$ è retto.

- b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione della circonferenza K passante per i punti A, C, D .
 c) Spiegare perché K passa pure per E .
 d) Detto F il punto in cui K seca ulteriormente CB calcolare le aree delle due regioni piane in cui il minore degli archi DF di K divide il quadrilatero $ABCE$.

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

- Per prima cosa determiniamo il dominio di definizione D della funzione K . Per fare ciò dobbiamo porre $|x+1| \neq 0$, da cui $x \neq -1$. Ne segue che $D = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- Poiché il dominio non è simmetrico rispetto all'origine O degli assi la curva K non può essere simmetrica né rispetto all'asse y (pari) né rispetto all'origine (dispari).
- Studiamo quindi il segno di K : cerchiamo di risolvere la $y \geq 0$ ossia

$$\frac{x^2}{2} + \ln|x+1| \geq 0, \quad (1)$$

e quindi individuare i punti di K di ordinata maggiore o uguale di zero.

La disequazione che ne risulta contiene sia dei termini razionali che trascendenti per cui non è possibile risolverla elementarmente con metodi analitici. Non rimane, come ultima possibilità, che l'approccio grafico. Questo consiste nella riscrittura dei termini della disequazione in una forma più opportuna così da riconoscere in ciascun membro una funzione nota o comunque facilmente deducibile. La disequazione diventa così interpretabile in termini di grafici rappresentativi. Riscritta quindi la (1) come $\ln|x+1| \geq -\frac{x^2}{2}$, si tratta di studiare i grafici delle funzioni

$$y_1 = \ln|x+1| \quad \text{e} \quad y_2 = -\frac{x^2}{2} \quad (2a, b)$$

e successivamente instaurare, se possibile, un loro confronto.

Per y_1 è immediato porre

$$\tau : \begin{cases} y'_1 = y_1 \\ x_1 = x + 1, \end{cases}$$

che esprime una trasformazione del piano in sè interpretabile come la traslazione di vettore $\mathbf{t} = (1, 0)$. L'equazione dell'immagine $y'_1 = \ln|x_1|$ coincide per $x_1 > 0$ con quella del logaritmo naturale e per $x_1 < 0$ con la curva simmetrica rispetto all'asse y'_1 . Il suo grafico Γ' è pertanto quello rappresentato dalla fig.1.

Il grafico Γ di y_1 risulta quindi essere l'immagine tramite il vettore $-\mathbf{t}$ che trasforma l'asintoto $x_1 = 0$ nella retta $x = -1$. In particolare i punti di intersezione

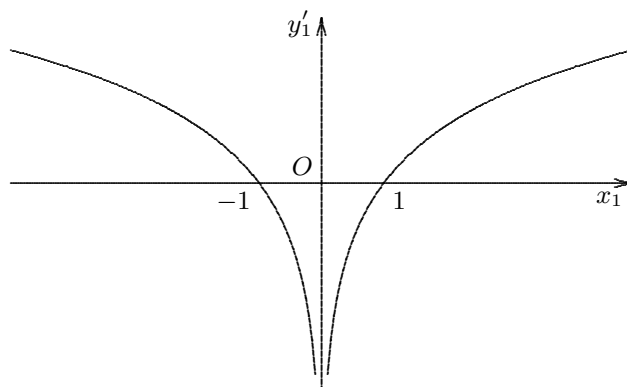


Fig. 1 Grafico di $y'_1 = \ln|x_1|$.

con l'asse delle ascisse risultano $A(-2, 0)$ e $O(0, 0)$. L'altra funzione è una parabola con vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso il basso.

Tracciati i grafici corrispondenti alle equazioni $(2a, b)$, ne segue che questi dovranno intersecarsi in soli 2 punti (fig.2), aventi coordinate $O(0, 0)$ e $C(\alpha, \ln|\alpha + 1|)$. Sulla base della conoscenza dei due grafici, α dovrà soddisfare la $\alpha < -1$ in quanto ascissa del punto d'incontro di y_2 con il ramo sinistro di y_1 e $\alpha > -2$ possedendo il punto in questione ordinata negativa. La disequazione $y \geq 0$ è pertanto verificata per $x \leq \alpha \vee x \geq 0$.

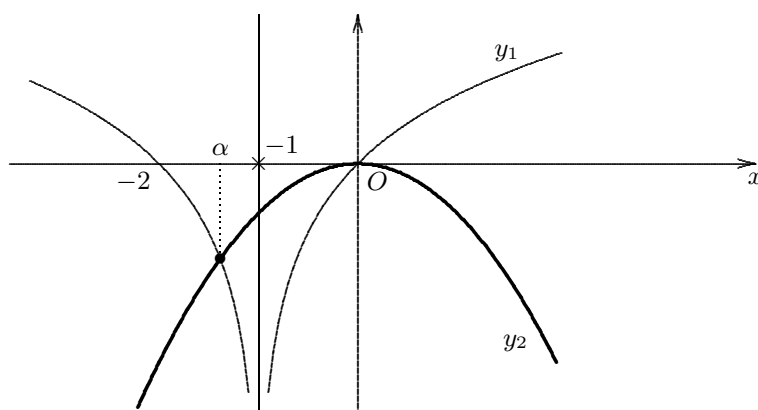


Fig. 2 Grafici di y_1 e y_2 .

- Limiti: studiamo ora il comportamento per x che tende all'infinito e per x che tende a -1 (da destra e da sinistra).

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$$

in quanto $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow -1} \ln|x+1| = -\infty$. La retta $x = -1$ è pertanto asintoto verticale.

Poiché inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln|x+1| = +\infty$, è pure

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty.$$

■ Rimane quindi da esaminare la possibilità di asintoti obliqui ma la forma della funzione non dovrebbe permetterli. Difatti

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x+1| \right) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{\ln|x+1|}{x} \right). \quad (3)$$

Per determinare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

che conduce ad una forma di indeterminazione del tipo ∞/∞ , analizziamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x+1} \right)}{1}$$

ottenuto eseguendo il rapporto delle derivate del numeratore e denominatore. Poiché tale limite esiste e vale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

è possibile applicare il teorema di De l'Hôpital e concludere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$

In modo del tutto analogo si procede per $x \rightarrow -\infty$, per cui il termine fondamentale nel limite (3) è rappresentato da $\frac{x}{2}$: discende pertanto

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{\ln|x+1|}{x} \right) = \infty,$$

cosicché non esistono asintoti obliqui.

■ Passando alle derivate prime conviene spezzare la funzione in due rami in quanto è presente un valore assoluto:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + \ln(x+1) & \text{se } x+1 > 0 \\ y = \frac{x^2}{2} + \ln(-x-1) & \text{se } x+1 < 0. \end{cases}$$

Per la y' segue che

$$\begin{cases} y' = x + \frac{1}{x+1} & \text{se } x > -1 \\ y' = x + \frac{1}{(-x-1)} \cdot (-1) & \text{se } x < -1, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y' = x + \frac{1}{x+1} & x > -1 \\ y' = x + \frac{1}{(x+1)} & x < -1. \end{cases}$$

La derivata prima può pertanto risciversi in forma più compatta come

$$y' = x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1} \quad \forall x \neq -1, \quad (4)$$

espressione che facilita notevolmente lo studio di y' .

- Infatti è sufficiente notare che $x^2 + x + 1 > 0$ possiede un $\Delta = 1 - 4 < 0$ per concludere che il numeratore $N > 0$ per $\forall x \in D$. Il denominatore $x + 1 > 0$ invece per $x > -1$. Conseguentemente $y' > 0$ per $x > -1$ (fig.3).

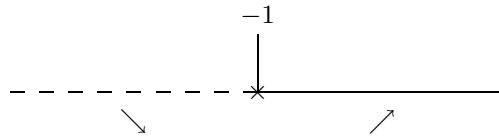


Fig. 3

- Passando alla derivata seconda

$$y'' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

e $y'' \geq 0$ implica $x^2 + 2x = x(x+2) \geq 0$. Quest'ultima è verificata se $x \leq -2$ o $x \geq 0$ (fig.4). La funzione ha pertanto due punti di flesso di coordinate $O(0,0)$ e $A(-2,-2)$, come richiesto dal testo.

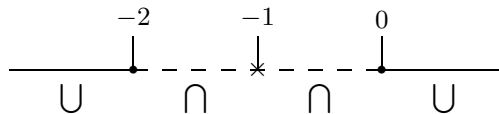


Fig. 4

Le tangenti inflessionali si calcolano immediatamente tramite la formula che dà le rette tangenti in un punto $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Applicandola ai punti in questione si ha

$$\begin{array}{llll} y - 0 = f'(0)(x - 0) & f'(0) = 1 & \text{cioè} & t : y = x \\ y - 2 = f'(-2)(x + 2) & f'(-2) = -3 & \text{cioè} & s : y = -3x - 4. \end{array}$$

Il grafico di K è pertanto espresso dalla fig.5.

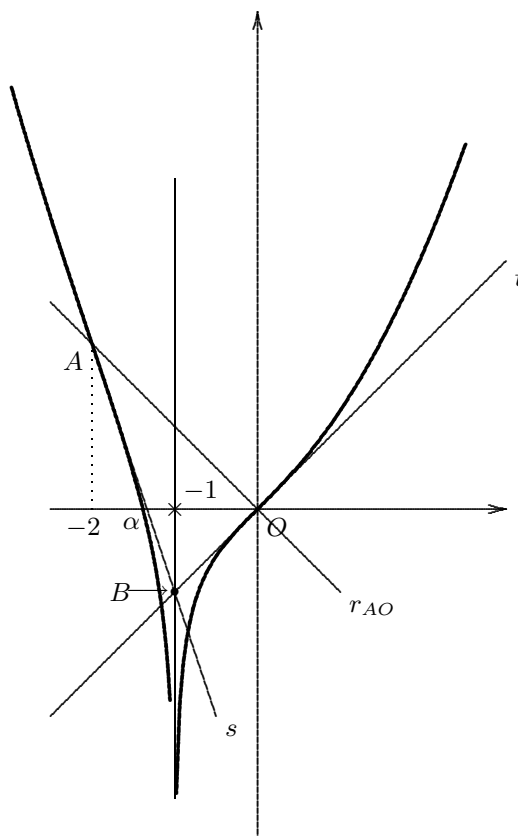


Fig. 5 Grafico della curva K .

La retta AO si ottiene facilmente una volta calcolato il coefficiente angolare

$$m_{AO} = \frac{y_A}{x_A} = -1.$$

È quindi $r_{AO} : y = -x$ che risulta perpendicolare alla tangente t nell'origine O . Il $\triangle AOB$ è perciò retto in O mentre le coordinate di $\{B\} = t \cap s$ si ricavano immediatamente da

$$\begin{cases} y = x \\ y = -3x - 4 \end{cases} \implies x = -3x - 4 \implies x = -1, y = -1,$$

e quindi $B(-1, 1)$.

Ne segue che

$$\overline{OB} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \overline{OA} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Inoltre

$$A(\triangle AOB) = \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2.$$

■ Per calcolare l'area compresa tra K , l'asse x e la retta $x = \frac{3}{2}$ (vedi fig.6), bisogna prima determinare una primitiva dell'equazione rappresentativa di K cioè va risolto l'integrale indefinito

$$\int \left[\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) \right] dx$$

dove essendo $x > 0$ è sufficiente considerare $\ln|x+1| = \ln(x+1)$.

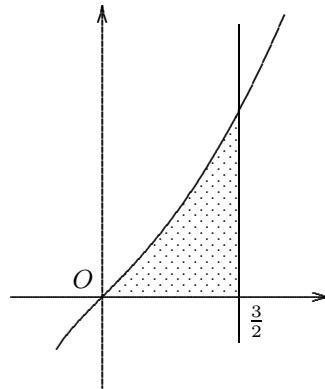


Fig. 6 Area $\mathcal{A}$.

Ne segue

$$\int \left[\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) \right] dx = \int \frac{x^2}{2} dx + \int \ln(x+1) dx;$$

considerando nel secondo integrale dx come fattore differenziale e $\ln(x+1)$ come fattore finito ed applicando il metodo di integrazione per parti discende

$$\int \frac{x^2}{2} dx + \int \ln(x+1) dx = \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \left[x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx \right].$$

Procedendo con la scomposizione

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + c$$

e in definitiva

$$\begin{aligned}\int \left[\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) \right] dx &= \frac{x^3}{6} + x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + c \\ &= \frac{x^3}{6} + (x+1) \cdot \ln(x+1) - x + c :\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) \right] dx = \left[\frac{x^3}{6} + (x+1) \cdot \ln(x+1) - x \right]_0^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3^3}{6 \cdot 2^3} + \frac{5}{2} \ln \left(\frac{5}{2} \right) - \frac{3}{2} = -\frac{15}{16} + \frac{5}{2} \ln \left(\frac{5}{2} \right) \simeq 1,3532.\end{aligned}$$

- Infine confrontando le 2 aree trovate ci si chiede se $\mathcal{A}(\triangle AOB) > \mathcal{A}'$ ossia

$$2 > \frac{5}{2} \ln \left(\frac{5}{2} \right) - \frac{15}{16}.$$

Dalla precedente discende

$$2 + \frac{15}{16} > \frac{5}{2} \ln 2,5 \quad \implies \quad \frac{47}{16} > \frac{5}{2} \ln 2,5 \quad \implies \quad \frac{47}{40} > \ln 2,5$$

e poichè $\frac{47}{40} > 1$ mentre $\ln 2,5 < 1$ in quanto $2,5 < e$, la diseuguaglianza iniziale è corretta. L'area del triangolo è pertanto maggiore della regione piana richiesta.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

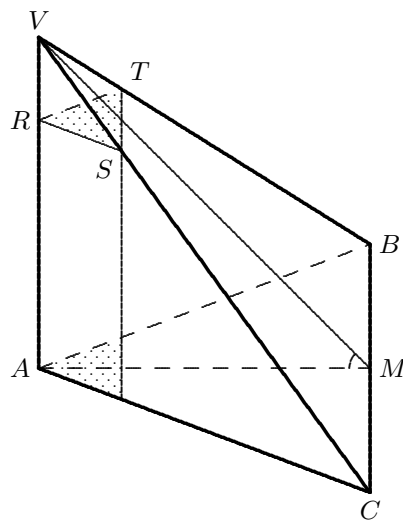
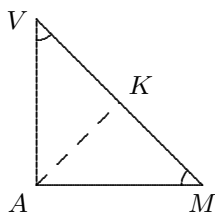
Riassunti i dati del problema

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \frac{\pi}{2} & \overline{AC} &= \overline{AB} \\ AV &\perp AC, & AV &\perp AB, & VM &\perp BC \\ \angle VMA &= \frac{\pi}{4} & \overline{VB} &= 2h\sqrt{3},\end{aligned}$$

si deduce immediatamente che gli angoli alla base di $\triangle ABC$ misurano $\angle ACB = \angle ABC = \frac{\pi}{4}$, così come da $\angle VMA = \frac{\pi}{4}$ discende che il triangolo $\triangle AMV$, retto in A , risulta pure isoscele: in particolare $\overline{AM} = \overline{AV}$ (fig.1).

- Considerando la sezione della piramide passante per i punti A , M e V si ottiene il triangolo $\triangle AMV$ (fig.2). Di questo si chiede di determinare l'altezza AK relativa all'ipotenusa VM . Poichè $\triangle AMV$ è isoscele con angoli alla base di $\frac{\pi}{4}$ si ha

$$\overline{AK} = \overline{AM} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{AM}}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

**Fig. 1** Piramide.**Fig. 2** Sezione AMV della piramide.

Inoltre

$$\overline{VM} = \frac{\overline{AM}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \overline{AM}\sqrt{2}.$$

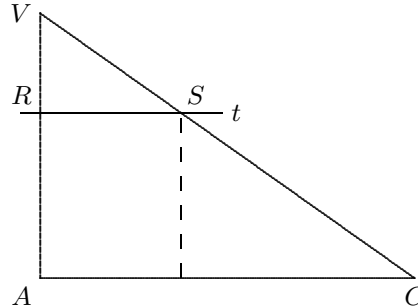
La lunghezza $\overline{AM}$ va ora collegata con il dato offerto dal problema $\overline{VB} = 2h\sqrt{3}$. Considerando pertanto $\triangle ABC$, risulta $\overline{AM} = \overline{MC}$, perché $\angle ACM = \frac{\pi}{4}$ e analogamente $\overline{AM} = \overline{MB}$. Ne segue che $\overline{BC} = 2\overline{AM}$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\triangle VCM$, rettangolo in M , si ottiene

$$\overline{VC} = \sqrt{\overline{VM}^2 + \overline{MC}^2} \quad \text{da cui} \quad 2h\sqrt{3} = \sqrt{2\overline{AM}^2 + \overline{AM}^2} = \overline{AM}\sqrt{3}.$$

Perciò $\overline{AM} = 2h = \overline{AV}$. Da (1) segue

$$\overline{AK} = \frac{\overline{AM}}{\sqrt{2}} = h\sqrt{2} \quad \text{e quindi} \quad h\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

che implica $h = 4$ come affermato dal testo.

**Fig. 3** Faccia ACV e sezione del piano t .

In tal caso $\overline{AM} = 8$, $\overline{VC} = 8\sqrt{3}$, e anche $\overline{AV} = 8$.

- Considerando ora il triangolo ACV , retto in A si ricava che

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{VC}^2 - \overline{AV}^2} = 8\sqrt{2}.$$

Sia t il piano parallelo alla base della piramide e $\overline{AR} = x$ con $0 \leq x \leq 8$ (fig.3). Per determinare il lato RS del triangolo di base del prisma (fig.1) (triangolo che è ancora isoscele e rettangolo) è sufficiente notare la similitudine tra i triangoli $\triangle VRS \sim \triangle VAC$ e quindi

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{VR}}{\overline{VA}} \implies \overline{RS} = \frac{\overline{VR} \cdot \overline{AC}}{\overline{VA}} = \frac{(8-x) \cdot 8\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}(8-x)$$

per cui

$$\mathcal{A}(\triangle RST) = \frac{(\sqrt{2})^2(8-x)^2}{2} = (8-x)^2$$

e il volume del prisma risulta

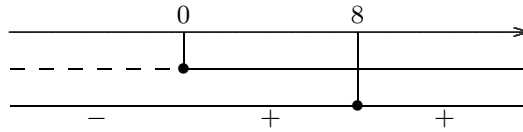
$$f(x) = \mathcal{A}(\triangle RST) \cdot \overline{AR} = x(8-x)^2.$$

Va perciò studiata la funzione

$$f : \begin{cases} y = x(8-x)^2 \\ 0 \leq x \leq 8. \end{cases} \quad (2)$$

L'equazione rappresenta una classica cubica che per generalità verrà da noi studiata nel dominio dei reali $\mathbb{R}$. Solo successivamente ci si limiterà ai valori della variabile coerenti con il problema geometrico.

- Studio della funzione f : dominio $\mathbb{R}$.

Fig. 4 Segno della f .

Non essendo simmetrica ($f(-x) \neq \pm f(x)$) affrontiamo lo studio del segno: $y \geq 0$ se $x(8-x)^2 \geq 0$. Il segno dei due fattori risulta

$$x \geq 0; \quad (8-x)^2 > 0 \quad \forall x \neq 8 \quad \vee \quad (8-x)^2 = 0 \quad x = 8,$$

che riassunto conduce alla fig.4. Pertanto $y \geq 0$ se $x \in [0, 8]$.

■ La funzione, essendo espressa da un polinomio di 3° grado è continua in $\mathbb{R}$. I limiti pertanto andranno svolti solo per $x \rightarrow \pm\infty$. Tenendo conto della teoria sui limiti delle funzioni razionali, discende che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - 16x^2 + 64x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{16}{x} + \frac{64}{x^2} \right) = \pm\infty:$$

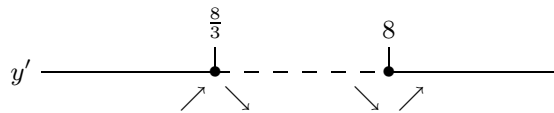
f non potrà presentare asintoti in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(8-x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (8-x)^2 = +\infty.$$

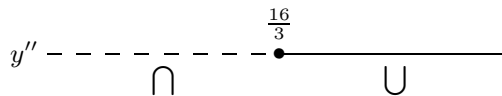
■ Studio del segno della derivata prima $y' = 3x^2 - 32x + 64$. Posto $y' \geq 0$ le radici dell'equazione associata sono

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{3} = \frac{16 \pm 8}{3} = \begin{cases} 8 \\ 8/3 \end{cases}$$

per cui la disequazione è soddisfatta per $x \leq \frac{8}{3} \vee x \geq 8$. Il grafico di y' è riassunto dalla figura 5.

Fig. 5 Segno di y' .

■ Derivata seconda: $y'' = 6x - 32$. È immediato derivare da $y'' \geq 0$ l'insieme $x \geq \frac{16}{3}$ e quindi individuare nel punto di ascissa $x = \frac{16}{3}$ l'unico punto di flesso per f (fig.6).

Fig. 6 Segno di y'' .

In definitiva f possiede il grafico espresso dalla figura 7. Questo permette di riconoscere la regione finita $\mathcal{A}$ limitata dalla curva e dall'asse x . L'ordinata del massimo relativo locale M risulta

$$x_M = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad y_M = \frac{8}{3} \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{2048}{27}.$$

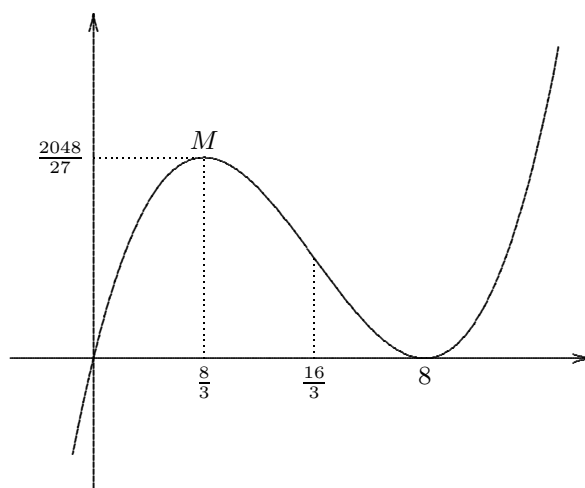


Fig. 7 Grafico della funzione f (non in scala).

- Calcolo del numero di punti interni alla regione $\mathcal{A}$.

La risposta all'ultima domanda si ottiene osservando che i punti con coordinate intere compresi nella regione tratteggiata (fig.8) devono giacere sulle rette di equazioni

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad \dots, \quad x = 7.$$

In corrispondenza i punti sulla curva possiedono ordinate:

$$\begin{aligned} f(1) &= 49, & f(2) &= 72, & f(3) &= 75, & f(4) &= 64, \\ f(5) &= 45, & f(6) &= 24, & f(7) &= 7. \end{aligned}$$

Allora sulla retta $x = 1$ escludendo $A = (1, 0)$ e $B = (1, 49)$ appartenenti entrambi al contorno di $\mathcal{A}$ vi sono $49 - 1$ punti appartenenti ad $\mathcal{A}$. Generalizzando tale osservazione, il numero richiesto è pertanto

$$\begin{aligned} N &= (49 - 1) + (72 - 1) + (75 - 1) + (64 - 1) + (45 - 1) + (24 - 1) + (7 - 1) \\ &= \sum_{i=1}^7 [f(i) - 1] = 329. \end{aligned}$$

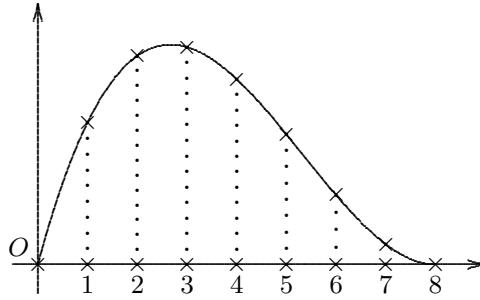


Fig. 8 Punti interni alla regione finita.

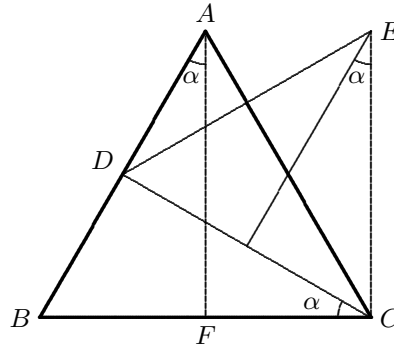


Fig. 1 Costruzione della figura geometrica.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

I dati del problema sono: $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 2\sqrt{3}$, mentre per costruzione $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ ossia $\angle ABC = \angle ACB = \angle EDC = \angle ECD$: in particolare $\angle BAC = \angle DEC$ (fig.1).

■ a) Posto quindi $\angle BAC = 2\alpha = \angle DEC$ risulta $\angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Nel triangolo $\triangle DBC$ si ha

$$\angle BCD = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha.$$

Poiché $\angle ECB = \angle ECD + \angle BCD$, ricordata la similitudine dei triangoli e quindi l'uguaglianza $\angle ABC = \angle ECD$, risulta

$$\angle ECB = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \alpha = \frac{\pi}{2},$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Utilizzando i dati del problema è pure possibile determinare l'angolo α . Difatti

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Ne segue che $\angle BAC = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = \angle ABC = \angle ACB$. Il triangolo $\triangle ABC$ (e anche $\triangle EDC$) è quindi equilatero con i lati di lunghezza 4 e altezza $\overline{AF} = \overline{AC} \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$. Conviene pertanto riproporre la figura geometrica rispettando questa conclusione (fig.2).

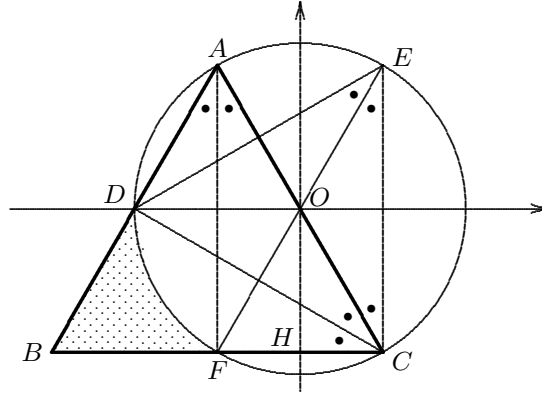


Fig. 2 Figura geometrica e assi cartesiani.

■ b) Scelto il sistema di assi avente origine nel punto medio di AC (fig.2), l'equazione della circonferenza K è immediata in quanto basta conoscere il raggio r che è $r = \overline{AC}/2 = 2$. Va comunque notato che tale circonferenza passa per D poiché $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ per costruzione. In definitiva per il sistema scelto $K : x^2 + y^2 = 4$.

■ c) Per dimostrare che $E \in K$ si osservi che CD è una corda di K ed essendo per ipotesi $\angle DAC = \angle DEC$, E dovrà appartenere all'arco di K cui appartiene pure A in quanto $\angle DAC$ e $\angle DEC$ sono angoli alla circonferenza che insistono sul medesimo arco DC . Ne segue che $\angle AEC = \frac{\pi}{2}$ in quanto il triangolo $\triangle ACE$ è inscritto in una semicirconferenza. $ABCE$ è pertanto un trapezio rettangolo: le coordinate dei suoi vertici sono

$$\begin{aligned} x_C = x_E &= \overline{OC} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ y_C = -y_E &= -\overline{OC} \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} = -\frac{1}{2} \cdot \overline{AF} \\ y_A = y_E \quad y_B &= y_C. \end{aligned}$$

Poichè inoltre $\angle DOC = 2\angle DEC$ essendo $\angle DOC$ un angolo al centro, allora $\angle DOC = \frac{2}{3}\pi$ e $\angle DOC = \angle DOH + \angle HOC$. Ne segue

$$\angle DOH = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

L'ordinata di D è perciò nulla e risulta: $y_D = 0$ e $x_D = -2$.

Il punto F richiesto dal testo è il piede dell'altezza che parte da A su BC perché $\triangle AFC$ è inscritto in una semicirconferenza. Le sue coordinate sono $x_F = -1$, $y_F = -\sqrt{3}$ mentre B è individuato dalla coppia $B(-3, -\sqrt{3})$.

Riassumendo le coordinate dei punti richiesti sono:

$$\begin{array}{lll} A = (-1, \sqrt{3}) & B = (-3, -\sqrt{3}) & C = (1, -\sqrt{3}) \\ D = (-2, 0) & E = (1, \sqrt{3}) & F = (-1, -\sqrt{3}) \end{array}$$

e inoltre $A, D, F, C, E \in K$.

■ d) Il calcolo delle aree richieste va affrontato determinando innanzitutto l'area del triangolo mistilineo DBF , evidenziato in figura 2. Poiché $\angle DOC = \frac{2}{3}\pi$ e il triangolo $\triangle OFC$ è pure equilatero, discende che

$$\angle DOF = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Inoltre essendo pure $\angle OFC = \frac{\pi}{3}$ si ha che $DBFO$ è un parallelogramma la cui area è:

$$\mathcal{A}(DBFO) = \overline{BF} \cdot \overline{OH} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Ricordando che l'area di un settore circolare di raggio r e relativo ad un angolo al centro di α radianti è data dalla $\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \alpha$, l'area del settore richiesto DFO risulta

$$\mathcal{A}(\text{sett}DFO) = \frac{1}{2}\angle DOF \cdot \overline{OF}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3}\pi.$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(DBF) &= \mathcal{A}(DBFO) - \mathcal{A}(\text{sett}DFO) = \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

La restante area della regione compresa tra $DFCEA$ è perciò

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(DFCEA) &= \mathcal{A}(BCED) - \mathcal{A}(DBF) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AE}) \cdot \overline{AF} - 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}(4 + 2) \cdot 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \\ &= 2\left(2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) \approx 9,02. \end{aligned}$$

MATURITÀ '95

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

- **Quesito n. 1**

Considerato il triangolo equilatero ABC , chiamare: C', C'' i punti che dividono il lato AB in tre parti congruenti ($AC' < AC''$); A', A'' i punti che dividono il lato BC in tre parti congruenti ($BA' < BA''$); B', B'' i punti che dividono il lato CA in tre parti congruenti ($CB' < CB''$).

Indicare quindi con: L il punto intersezione dei segmenti AA' e BB'' ; M il punto intersezione dei segmenti AA' e CC'' ; N il punto intersezione dei segmenti BB' e CC'' ; P il punto intersezione dei segmenti BB' e AA'' ; Q il punto intersezione dei segmenti CC' e AA'' ; R il punto intersezione dei segmenti CC' e BB'' .

- a) Dimostrare, con il metodo che si preferisce, che l'area dell'esagono $LMNPQR$ è $\frac{1}{10}$ di quella del triangolo ABC .
- b) Ammesso che l'area di tale esagono sia :

$$\frac{9}{10}h^2\sqrt{3},$$

dove h è una lunghezza assegnata, calcolare il volume del solido generato dall'esagono quando ruota di mezzo giro intorno alla retta NR .

- c) Supponendo nota la formula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

che fornisce il volume di un solido di rotazione, dimostrare le formule dei volumi di un cono e di un tronco di cono circolari retti.

Soluzione

- **Quesito n. 2**

Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H , la facce $ABCD$ e $EFGH$ sono opposte ed i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria.

Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che: $\overline{BP} = x$.

- a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla seguente funzione:

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)}.$$

- b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti.
 c) Considerato infine il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x , dalla regione piana delimitata da tale grafico, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = h$ (con $h > 0$), calcolare per quale valore di h questo volume è $\frac{16}{9}\pi$.

Soluzione

• **Quesito n. 3**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata la curva K di equazione:

$$y = \sin x + \frac{1}{4 \sin x}, \quad \text{con} \quad -\pi < x < \pi.$$

- a) Disegnare l'andamento e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi.
 b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da K e dalla retta di equazione $y = 1$.

N.B. Per il calcolo di una primitiva della funzione $\frac{1}{\sin x}$ si suggerisce di porre $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

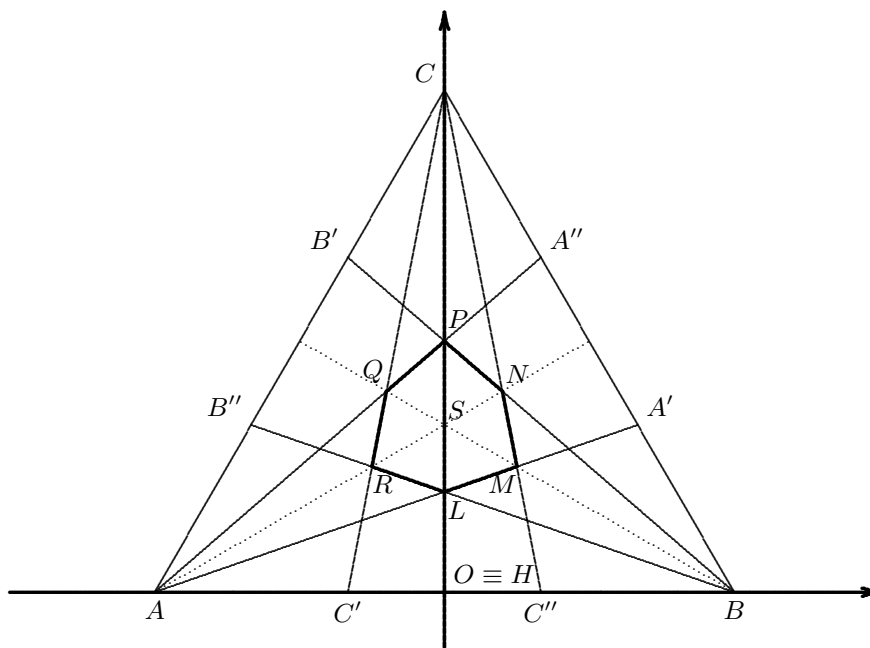
Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

■ a) Costruita la figura 1, seguiamo un approccio che sfrutta le conoscenze di Geometria Analitica. Difatti un'analisi preventiva suggerisce che, ottenute le equazioni delle rette uscenti dai vertici del triangolo e che dividono i lati opposti nel rapporto voluto assieme a quelle delle altezze, risulta poi facile dedurre le coordinate dei vertici dell'esagono e di conseguenza la sua area.

Pertanto, introdotto un sistema di assi cartesiani Oxy con l'origine coincidente con il piede dell'altezza CH relativa al lato AB ($O \equiv H$) e posta la lunghezza del lato del triangolo equilatero pari a $2l$ le coordinate dei vertici sono $A(-l, 0)$, $B(l, 0)$, $C(0, l\sqrt{3})$, mentre per le ascisse di C' , C'' essendo $x_{C'} = -x_{C''}$ è anche

$$x_{C''} - x_{C'} = x_{C''} + x_{C''} = \frac{1}{3} \cdot (2l) \quad \implies \quad x_{C''} = \frac{1}{3} \cdot l = -x_{C'}.$$



Interpretando poi la retta r_{BC} come una trasversale delle rette parallele all'asse y passanti per C , A'' , A' , B , per il teorema di Talete

$$x_{A''} = \frac{1}{3}x_B = \frac{l}{3}, \quad x_{A'} = \frac{2}{3}x_B = \frac{2l}{3},$$

$$y_{A''} = \frac{1}{3}y_C = \frac{1}{3} \cdot l\sqrt{3}, \quad y_{A'} = \frac{2}{3}y_C = \frac{2}{3} \cdot l\sqrt{3}.$$
$$\begin{array}{ll} C' \left(-\frac{l}{3}, 0 \right) & C'' \left(\frac{l}{3}, 0 \right) \\ A' \left(\frac{2l}{3}, \frac{l\sqrt{3}}{3} \right) & A'' \left(\frac{l}{3}, \frac{2l\sqrt{3}}{3} \right) \\ B' \left(-\frac{2l}{3}, \frac{l\sqrt{3}}{3} \right) & B'' \left(-\frac{l}{3}, \frac{2l\sqrt{3}}{3} \right). \end{array}$$
$$m_{AA'} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{3} - 0}{\frac{2l}{3} - (-l)} = \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad m_{AA''} = \frac{\frac{2l\sqrt{3}}{3} - 0}{\frac{l}{3} - (-l)} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

mentre quelli delle altezze AS e BS si ottengono facilmente considerando che $\angle SAH = \angle SBH = \frac{\pi}{6}$ (oppure che $y_S = \frac{1}{3}y_C$). Essi valgono

$$m_{AS} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m_{BS} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Le rispettive equazioni sono

$$\begin{aligned} r_{AA'} : y &= \frac{\sqrt{3}}{5}(x+l) & r_{AA''} : y &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+l) \\ r_{AS} : y &= \frac{\sqrt{3}}{3}(x+l) & r_{BS} : y &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-l) \end{aligned}$$

Per poter determinare tutti i punti rimane la retta $r_{BB''}$ che possiede un coefficiente angolare opposto a $m_{AA'}$ in quanto simmetrica rispetto all'asse y :

$$r_{BB''} : y = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x-l).$$

Allora

$$\{R\} = r_{AS} \cap r_{BB''} \implies \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+l) \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x-l) \end{cases}$$

che risolto fornisce $x_R = -\frac{l}{4}$ e $y_R = \frac{l\sqrt{3}}{4}$. Similmente

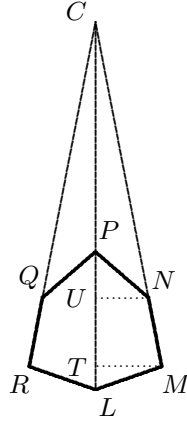
$$\begin{aligned} \{Q\} = r_{BS} \cap r_{AA''} &\implies \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-l) \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+l) \end{cases} \implies Q\left(-\frac{l}{5}, \frac{2l\sqrt{3}}{5}\right) : \\ \{L\} = r_{AA'} \cap r_y &\implies \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{5}(x+l) \\ x = 0 \end{cases} \implies L\left(0, \frac{l\sqrt{3}}{5}\right) : \\ \{P\} = r_{AA''} \cap r_y &\implies \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+l) \\ x = 0 \end{cases} \implies P\left(0, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right) : \end{aligned}$$

Per simmetria infine

$$M\left(\frac{l}{4}, \frac{l\sqrt{3}}{4}\right) \quad N\left(\frac{l}{5}, \frac{2l\sqrt{3}}{5}\right).$$

In riferimento alla fig.2 l'area richiesta si può scrivere ora come

$$\mathcal{A}(LMNPQR) = 2\mathcal{A}(LMNP) = 2[\mathcal{A}(\triangle CLM) - \mathcal{A}(\triangle CPN)],$$

**Fig. 2** Particolare dell'esagono $LMNPQR$.

e poiché le misure delle altezze MT e NU dei due triangoli rispetto alle basi CL e CP sono espresse dalle ascisse dei punti M e N allora

$$\mathcal{A}(\triangle CLM) = \frac{1}{2} \cdot \overline{CL} \cdot |x_M| \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(\triangle CPN) = \frac{1}{2} \cdot \overline{CP} \cdot |x_N|,$$

è anche

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(LMNPQR) &= \overline{CL} \cdot |x_M| - \overline{CP} \cdot |x_N| = (y_C - y_L) \cdot x_M - (y_C - y_P) \cdot x_N \\ &= \left(l\sqrt{3} - \frac{l\sqrt{3}}{5} \right) \cdot \frac{l}{4} - \left(l\sqrt{3} - \frac{l\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{l}{5} \\ &= \frac{l^2\sqrt{3}}{5} - \frac{l^2\sqrt{3}}{10} = \frac{l^2\sqrt{3}}{10}. \end{aligned}$$

Poiché risulta $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \overline{CH} \cdot \overline{HB} = l^2\sqrt{3}$ si ha in definitiva

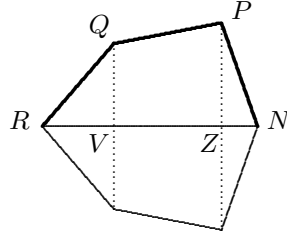
$$\frac{\mathcal{A}(LMNPQR)}{\mathcal{A}(\triangle ABC)} = \frac{(l^2\sqrt{3}/10)}{l^2\sqrt{3}} = \frac{1}{10}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

■ b) Se l'area dell'esagono è posta dal testo pari a $\mathcal{A}(LMNPQR) = \frac{9}{10}h^2\sqrt{3}$ allora avendo precedentemente trovato $\mathcal{A}(LMNPQR) = \frac{1}{10}l^2\sqrt{3}$ ne discende che

$$\frac{9}{10}h^2\sqrt{3} = \frac{1}{10}l^2\sqrt{3} \quad \implies \quad l = 3h.$$

In seguito quindi in luogo di l si sostituirà $l = 3h$.

**Fig. 3** Quadrilatero $NPQR$.

Essendo l'esagono simmetrico rispetto alla retta NR il volume $\mathcal{V}$ del solido generato con una rotazione di π è equivalente a quello generato da una rotazione completa di 2π dal quadrilatero $NPQR$ (fig.3).

Il solido è quindi composto da due coni, rispettivamente generati dai triangoli $\triangle RVQ$ e $\triangle ZNP$ e di volumi $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, e da un tronco di cono generato dal quadrilatero $VZPQ$ di volume $\mathcal{V}_3$. Pertanto

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3$$

dove

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \cdot \overline{RV} \cdot \pi \overline{VQ}^2 \quad \mathcal{V}_2 = \frac{1}{3} \cdot \overline{ZN} \cdot \pi \overline{ZP}^2 \quad (1a, b)$$

e per il tronco di cono, ricordata la formula che ne esprime il volume in base all'altezza h e ai raggi di base r e R cioè

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + rR)$$

si ha

$$\mathcal{V}_3 = \frac{1}{3} \pi \overline{VZ} \left(\overline{ZP}^2 + \overline{VQ}^2 + \overline{ZP} \cdot \overline{VQ} \right). \quad (2)$$

Riprendendo le coordinate dei vari punti e considerando che la simmetria dell'esagono rispetto alle tre altezze del triangolo equilatero permette di identificare il quadrilatero $NPQR$ con $LMNP$ (si vedano le figg.2 e 3), allora

$$\begin{aligned} \overline{RV} &= \overline{PU} = y_P - y_U = y_P - y_N = \frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{2l\sqrt{3}}{5} = \frac{l\sqrt{3}}{10} \\ \overline{VQ} &= \overline{UN} = |x_N| = \frac{l}{5} \\ \overline{ZN} &= \overline{TL} = y_T - y_L = y_M - y_L = \frac{l\sqrt{3}}{4} - \frac{l\sqrt{3}}{5} = \frac{l\sqrt{3}}{20} \\ \overline{ZP} &= \overline{TM} = |x_M| = \frac{l}{4} \\ \overline{VZ} &= \overline{UT} = y_U - y_T = y_N - y_M = \frac{2l\sqrt{3}}{5} - \frac{l\sqrt{3}}{4} = \frac{3l\sqrt{3}}{20} \end{aligned}$$

e sostituendo nelle (1a, b) e (2) si ottiene

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\pi l^3 \sqrt{3}}{75 \cdot 20}, \quad \mathcal{V}_2 = \frac{\pi l^3 \sqrt{3}}{48 \cdot 20}, \quad \mathcal{V}_3 = \frac{61 \pi l^3 \sqrt{3}}{25 \cdot 16 \cdot 20}.$$

Sommando si giunge a

$$\mathcal{V} = \frac{\pi l^3 \sqrt{3}}{100}$$

che con la sostituzione $l = 3h$ assume la forma definitiva

$$\mathcal{V} = \frac{27 \pi h^3 \sqrt{3}}{100}.$$

- c) La risposta all'ultima domanda si ottiene calcolando il volume del cono generato dal triangolo delimitato dalle rette $y = mx$, $x = h$ e dall'asse delle x (fig.4).

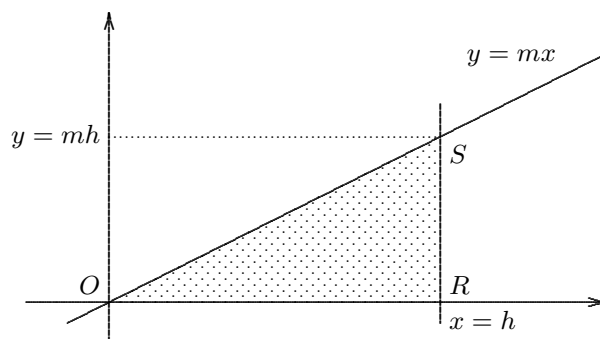


Fig. 4

Il suo volume risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_c &= \pi \int_0^h (mx)^2 dx = \pi \int_0^h m^2 x^2 dx = \pi \left[m^2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^h \\ &= \pi \left[m^2 \cdot \frac{h^3}{3} \right] = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi (mh)^2 \end{aligned}$$

ed essendo $|y| = |mh| = \overline{RS}$ e $h = \overline{OR}$ si ha

$$\mathcal{V}_c = \frac{1}{3} \cdot \overline{OR} \cdot \pi \overline{RS}^2$$

come aspettato.

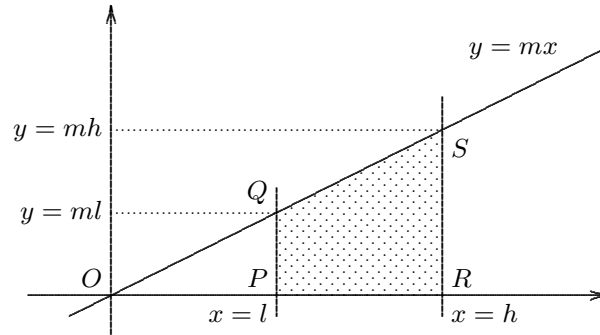


Fig. 5

Per il tronco di cono, definita l'ulteriore retta di equazione $x = l$ con $l < h$ (fig.5), il volume è

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t &= \pi \int_l^h (mx)^2 dx = \pi \int_l^h m^2 x^2 dx = \pi \left[m^2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_l^h \\ &= \pi \left[m^2 \cdot \frac{h^3}{3} - m^2 \cdot \frac{l^3}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi [m^2(h^3 - l^3)] = \frac{1}{3} \cdot \pi m^2(h - l)(h^2 + hl + l^2) \end{aligned}$$

dove nell'ultima espressione si è sfruttata la scomposizione della differenza di due cubi. Poiché $h - l = \overline{PR}$ (fig.5) e $ml = \overline{PQ}$ discende che, inglobando la m^2 nel secondo fattore del prodotto notevole,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t &= \frac{1}{3} \pi \overline{PR} \cdot [(mh)^2 + (mh)(ml) + (ml)^2] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \overline{PR} \cdot (\overline{RS}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{RS} \cdot \overline{PQ}) \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

■ a) In riferimento alla fig.1 sia M il piede dell'altezza del triangolo $\triangle APG$ condotta dal vertice P . Si chiede di determinare la lunghezza del segmento $y = \overline{PM}$. Posto, come suggerito dal testo, $\overline{BP} = x$, le limitazioni di questa variabile discendono immediatamente essendo $0 \leq x \leq 1$.

Considerando che il cubo possiede spigoli di lunghezza unitaria ed applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ABP e PGF discende che

$$\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 = 1 + x^2 \quad \text{così come} \quad \overline{PG}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FG}^2 = (1 - x)^2 + 1.$$

che data la positività del primo membro in quanto $x \geq 0$ permette, con un altro elevamento a potenza, di giungere all'equazione

$$1 + x^2 + 2x = 3 + 3x^2 - 3y^2 \quad \text{da cui} \quad y^2 = \frac{2}{3}(x^2 - x + 1).$$

Considerando che $x^2 - x + 1 > 0$ per $\forall x \in \mathbb{R}$ in quanto $\Delta = 1 - 4 < 0$ e accettando la sola soluzione positiva si ottiene in definitiva

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)} \quad (3)$$

che coincide con l'espressione richiesta dal testo.

■ b) Poiché il testo chiede di determinare gli asintoti della (3) si arguisce che la funzione f debba essere studiata nel suo dominio algebrico anziché in quello determinato dalle restrizioni geometriche cioè in $[0, 1]$. Pertanto, poiché risulta

$$x^2 - x + 1 > 0 \quad \text{per } \forall x \in \mathbb{R}$$

essendo il relativo discriminante $\Delta = -3 < 0$, allora $D = \mathbb{R}$.
 f non risulta simmetrica in quanto

$$f(-x) = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 + x + 1)} \neq \pm f(x).$$

Per il fatto che $\Delta < 0$, $y > 0$ per $\forall x \in \mathbb{R}$.

La funzione è inoltre continua in tutto il dominio in quanto funzione composta di funzioni continue. I limiti necessari si riducono quindi agli estremi di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{2}{3}x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}. \end{aligned}$$

Separando ora i due limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ discende

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = +\infty,$$

così come

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = +\infty.$$

Vi è quindi la possibilità di asintoti in quanto la divergenza ad ∞ è analoga a quella di un polinomio di I grado. Da quanto sopra è immediato trovare per i coefficienti angolari i valori

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = +\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Per il termine noto va invece risolto il limite

$$q_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)} - x\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x \right).$$

Razionalizzando il numeratore moltiplicandolo per $\sqrt{x^2 - x + 1} + x$ si ottiene

$$q_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \right)$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \right).$$

Con un procedimento simile a quello svolto precedentemente il termine ad argomento del limite si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{x \left(-1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \right]$$

ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-1 + \frac{1}{x} \right)}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = -\frac{1}{2}$$

si ottiene

$$q_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Parallelamente per $x \rightarrow -\infty$ si ha

$$\begin{aligned} q_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)} + x\sqrt{\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{x(-1 + \frac{1}{x})}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

In definitiva vi sono due asintoti di equazioni

$$r_1 : y_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad r_2 : y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-x + \frac{1}{2} \right).$$

Il confronto della curva rappresentativa di f con r_1 implica la risoluzione della disequazione $y - y_1 \geq 0$ che esplicitamente diviene

$$\sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 2)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 0.$$

Questa si può riscrivere pure come

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \geq x - \frac{1}{2}$$

che per $x < \frac{1}{2}$ è certamente soddisfatta mentre per $x \geq \frac{1}{2}$ è equivalente alla

$$x^2 - x + 1 \geq x^2 + \frac{1}{4} - x,$$

soddisfatta a sua volta per $\forall x \geq \frac{1}{2}$.

Se invece confrontiamo f con r_2 si ha

$$\sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 2)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-x + \frac{1}{2} \right) \geq 0$$

da cui si ricava

$$\sqrt{(x^2 - x + 2)} \geq -x + \frac{1}{2}.$$

Se $x > \frac{1}{2}$ la precedente è certamente soddisfatta mentre se $x \leq \frac{1}{2}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - x + 1 \geq x^2 + \frac{1}{4} - x \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 1 \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

che permette di concludere che il grafico di f giace per $\forall x \in \mathbb{R}$ “al di sopra” degli asintoti.

Passando al calcolo della derivata prima

$$y' = \frac{\frac{2}{3}(2x-1)}{2\sqrt{\frac{2}{3}(x^2-x+1)}} = \frac{2x-1}{\sqrt{6(x^2-x+1)}},$$

la f sarà crescente quando $y' \geq 0$ ossia se $2x-1 \geq 0$. Pertanto $y' \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$ (fig.2)

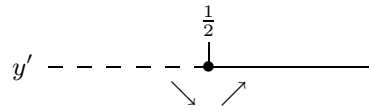


Fig. 2 Segno di y' .

Svolgendo il calcolo della derivata seconda si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned} y'' &= \left(2\sqrt{6(x^2-x+1)} - (2x-1) \cdot \frac{6(2x-1)}{2\sqrt{6(x^2-x+1)}} \right) \cdot \frac{1}{6(x^2-x+1)} \\ &= \left[2\sqrt{6(x^2-x+1)} - \frac{3(2x-1)^2}{\sqrt{6(x^2-x+1)}} \right] \cdot \frac{1}{6(x^2-x+1)} \\ &= \frac{12(x^2-x+1) - 3(4x^2+1-4x)}{6\sqrt{6} \cdot (x^2-x+1)^{3/2}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{6} \cdot (x^2-x+1)^{3/2}}, \end{aligned}$$

che risulta manifestamente positiva per $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto la concavità della funzione sarà rivolta verso la direzione positiva dell'asse y e, calcolata l'ordinata del minimo assoluto $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, il grafico complessivo richiesto assume la forma rappresentata nella fig.3.

■ c) Per rispondere all'ultima domanda va determinato il volume del solido di rotazione generato dalla regione tratteggiata di figura 4.

A tal fine basta risolvere l'integrale

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^h [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^h \frac{2}{3}(x^2-x+1) dx,$$

che implica

$$\mathcal{V} = \frac{2}{3}\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^h = \frac{2}{3}\pi \left[\frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2} + h \right].$$

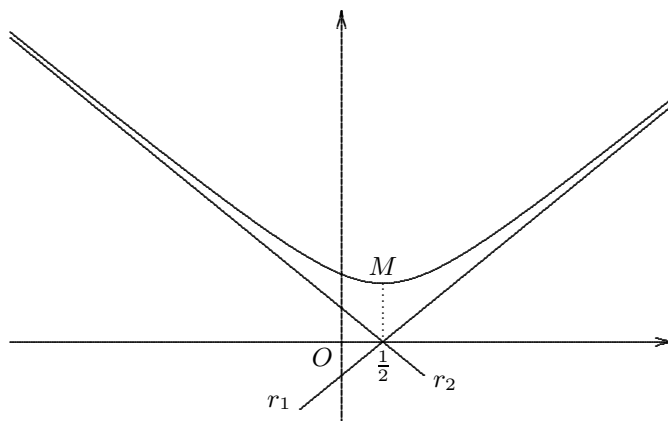
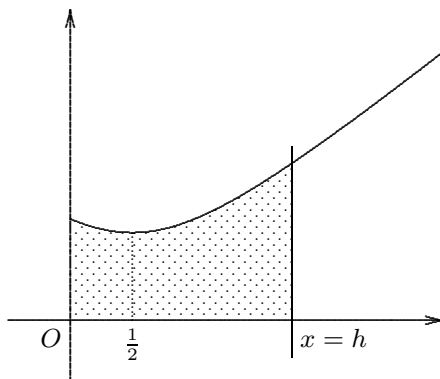
Fig. 3 Grafico della funzione f .

Fig. 4

Posto $\mathcal{V}$ pari a $\frac{16}{9}\pi$ si ottiene l'equazione

$$\frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2} + h = \frac{8}{3} \quad \text{ossia} \quad 2h^3 - 3h^2 + 6h - 16 = 0.$$

Con il metodo di Ruffini è possibile scomporre il polinomio in due fattori: difatti

2	2	-3	6	-16
		4	2	+16
	2	1	8	0

da cui

$$2h^3 - 3h^2 + 6h - 16 = (h - 2)(2h^2 + h + 8) = 0.$$

Essendo negativo il discriminante di $2h^2 + h + 8 = 0$ ($\Delta = 1 - 64 < 0$), si conclude che l'unico valore di h che soddisfa la condizione richiesta è $h = 2$.

Ulteriori metodi di risoluzione

La dimostrazione che la distanza di P dalla diagonale AG del cubo risponde alla legge data si può ottenere anche tramite il calcolo vettoriale qualora si ricordi i significati di prodotto vettoriale tra due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. In particolare il modulo di $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ si può esprimere come

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = ab \sin \alpha = ab_a,$$

(α è l'angolo tra i due vettori) cioè come il prodotto del modulo di uno dei due vettori per la componente perpendicolare dell'altro. Volendo nel nostro caso conoscere $\overline{PM}$ e poiché questa può interpretarsi come la componente perpendicolare di $\overrightarrow{AP}$ alla direzione del vettore $\overrightarrow{AG}$, ne segue che

$$\left| \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AP} \right| = \overline{AG} \cdot \overline{AP} \sin \alpha,$$

ed essendo $\overline{PM} = \overline{AP} \sin \alpha$ discende

$$y = \overline{PM} = \frac{1}{\overline{AG}} \cdot \left| \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AP} \right|.$$

I vettori $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{AP}$ si determinano facilmente appena si associ al cubo una terna di assi cartesiani individuata dai tre versori $\mathbf{i} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{k} = \overrightarrow{AE}$, e con origine posta nel punto A (fig.5).

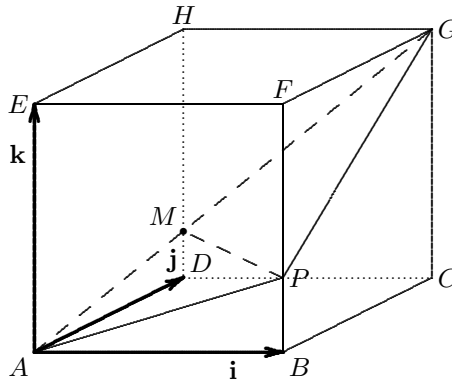


Fig. 5

Ricordando che le componenti di un vettore si ottengono sottraendo ordinatamente le coordinate degli estremi dei segmenti orientati e poiché $A(0,0,0)$, $P(1,0,x)$, $G(1,1,1)$ si ha

$$\overrightarrow{AP} = (1-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (x-0)\mathbf{k} = \mathbf{i} + x\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{AG} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Notato che $\overline{AG} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, ne segue che l'espressione

$$y = \overline{PM} = \frac{1}{\overline{AG}} \cdot |\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AP}|$$

assume la forma

$$y = \overline{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |[x\mathbf{i} - (x-1)\mathbf{j} - 1\mathbf{k}]|.$$

Passando al calcolo esplicito del modulo del vettore eseguendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti cartesiane, si giunge in definitiva

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x^2 + (x-1)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2x^2 - 2x + 2} = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - x + 1)}$$

che costituisce l'espressione cercata.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

- a) Il dominio della funzione K risulta dalla $\sin x \neq 0$ che implica, in generale, $x \neq k\pi$. Nell'insieme dei valori richiesti dal testo ciò esclude il valore $x = 0$ per cui il dominio consiste nell'insieme $D =]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.
- Simmetrie: essendo

$$f(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{4\sin(-x)} = -\sin x - \frac{1}{4\sin x} = -f(x) \quad \text{per } \forall x \in D,$$

K risulta simmetrica dispari e di conseguenza sarà possibile limitarne lo studio all'intervallo $]0, \pi[$.

- La funzione, se considerata in $\mathbb{R}$ sarebbe periodica in quanto $f(x + 2\pi) = f(x)$ ma ciò non fornisce alcuna indicazione utile per l'insieme $]0, \pi[$. Pertanto passando allo studio del segno $y \geq 0$ si ha

$$\sin x + \frac{1}{4\sin x} \geq 0,$$

che, essendo $\sin x > 0$ se $x \in]0, \pi[$ implica per questi valori $f(x) > 0$.

- Limiti: K nel suo dominio è una funzione continua mentre non lo è in $\mathbb{R}$. Allora conviene affrontare il calcolo dei limiti $x \rightarrow 0^+$ e di $x \rightarrow \pi^-$. In entrambi i casi poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0^+$, ne segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin x + \frac{1}{4\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\sin x + \frac{1}{4\sin x} \right) = +\infty,$$

per cui $x = 0$ e $x = \pi$ sono le equazioni dei due asintoti verticali.

■ Il calcolo della derivata prima conduce alle espressioni

$$\begin{aligned} y' &= \cos x + \frac{1}{4}(-1)(\sin x)^{-2} \cdot \cos x \\ &= \cos x - \frac{\cos x}{4 \sin^2 x} \\ &= \cos x \left(\frac{4 \sin^2 x - 1}{4 \sin^2 x} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

tra le quali l'ultima mette in evidenza i termini responsabili del suo segno. Allora per risolvere la $y' \geq 0$ va studiata la $\cos x \geq 0$, che possiede le soluzioni $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. L'altro termine invece conduce a

$$4 \sin^2 x - 1 \geq 0 \implies \sin x \leq -\frac{1}{2} \vee \sin x \geq \frac{1}{2},$$

ed è risolto dalle $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$. Combinando i segni dei due termini si ottiene la fig.1 che permette di riconoscere i sottoinsiemi di $]0, \pi[$ dove K risulta crescente cioè $y' \geq 0$ in $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi]$ (fig.2). Le ordinate dei minimi m_1 e m_2 si calcolano immediatamente e valgono entrambe $y_{m_1} = y_{m_2} = 1$ mentre quella del massimo M risulta $\frac{5}{4}$ ossia $M(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4})$.

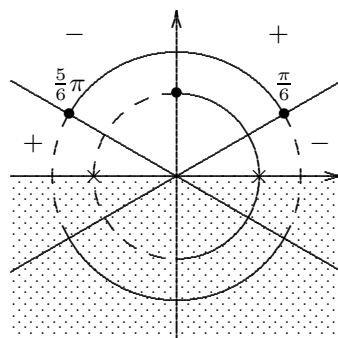


Fig. 1

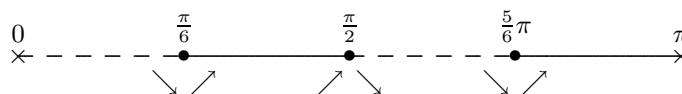


Fig. 2 Segno di y' .

- Partendo dalla (1) per ottenere la y'' si ha

$$\begin{aligned} y'' &= -\operatorname{sen} x - \frac{1}{4} \left[\frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x - \cos x \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x} \right] \\ &= -\operatorname{sen} x + \frac{1}{4 \operatorname{sen}^3 x} \cdot (\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x) \end{aligned}$$

e dopo aver trasformato il $\cos x$ in $\operatorname{sen} x$ si giunge alla

$$y'' = \frac{1}{4 \operatorname{sen}^3 x} [-4 \operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x + 2].$$

La disequazione $y'' \geq 0$ implica lo studio del termine

$$-4 \operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x + 2 \geq 0 \quad (2)$$

che a seguito della posizione $t = \operatorname{sen}^2 x$ si riduce alla $-4t^2 - t + 2 \geq 0$. L'equazione associata possiede le soluzioni

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

e di conseguenza la (2) è risolta dalle

$$\frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \leq \operatorname{sen}^2 x \leq \frac{-1 + \sqrt{33}}{8},$$

delle quali va affrontata solo la

$$\operatorname{sen}^2 x \leq \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$$

in quanto l'altra è sempre soddisfatta. Allora

$$\operatorname{sen}^2 x \leq \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$$

implica

$$-\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}} \leq \operatorname{sen} x \leq +\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}}, \quad (3)$$

per cui definito l'angolo

$$\alpha = \arcsen \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}} \approx 50,4^\circ$$

le soluzioni di (3) sono $-\alpha + k\pi \leq x \leq \alpha + k\pi$. Poste assieme alle $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ provenienti dalla $\operatorname{sen}^3 x > 0$ (fig.3) si giunge al segno complessivo riassunto in fig.4.

Le soluzioni di $y'' \geq 0$ sono $]0, \alpha] \cup [\pi - \alpha, \pi[$.

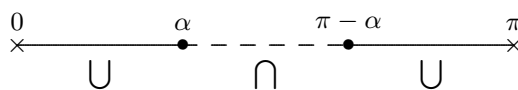


Fig. 4 Segno di y'' .

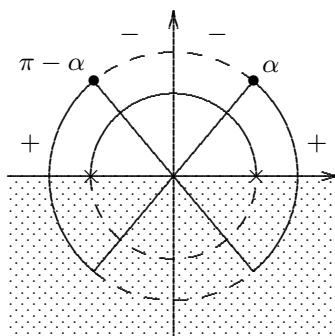


Fig. 3

Vi sono pertanto due punti di flesso aventi ascisse rispettivamente pari ad $x_1 = \alpha$ e $x_2 = \pi - \alpha$. In conclusione, ricordando la simmetria dispari, il grafico di K assume l'andamento di figura 5.

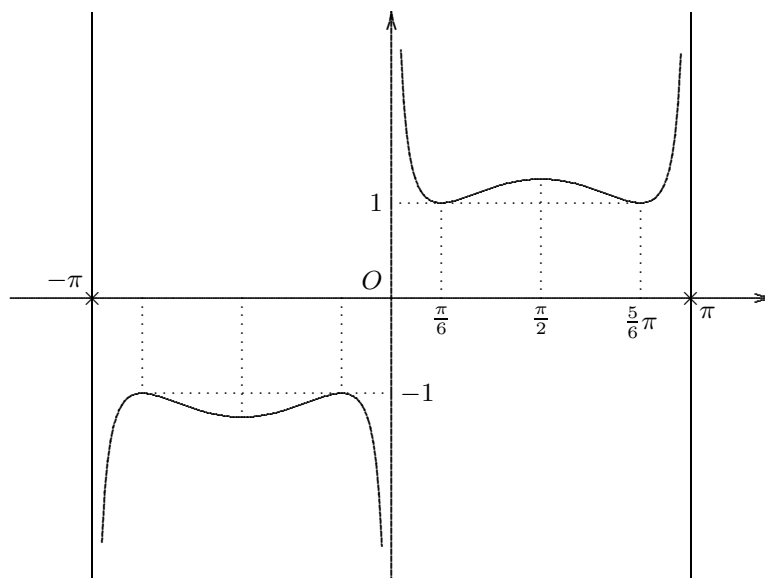


Fig. 5 Grafico di K .

- b) L'area richiesta dalla seconda parte del quesito è rappresentata dalla fig.6 e si determina con il calcolo dell'integrale

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\sin x + \frac{1}{4 \sin x} - 1 \right) dx$$

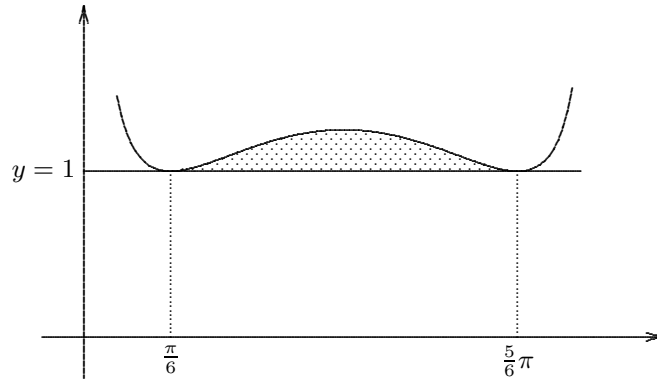


Fig. 6 Area compresa tra K e $y = 1$.

che conduce alla

$$\mathcal{A} = [-\cos x - x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{\sin x} dx. \quad (4)$$

Va quindi trovata una primitiva dell'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sin x} dx, \quad (5)$$

che si può risolvere utilizzando la sostituzione suggerita

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \text{in base alla quale è} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Differenziando si ottiene pure

$$dt = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx$$

da cui

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

che sostituita in (5) fornisce

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c. \end{aligned}$$

Ripresa la (4) si ha

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \left[-\cos x - x + \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \\
 &= -\cos \frac{5}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} \frac{5}{12}\pi - \left(-\cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} \frac{5}{12}\pi - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{4} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{5}{12}\pi - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

Volendo riscrivere il termine logaritmico in modo alternativo va ricordata la formula di bisezione per la tangente (considerata positiva)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Adoperando la seconda forma si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{5}{12}\pi - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right) &= \frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \ln \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \right) - \ln \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[\ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(2 - \sqrt{3}) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}),
 \end{aligned}$$

e in definitiva

$$\mathcal{A} = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 0,296.$$

MATURITÀ '96

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva:

- **Quesito n. 1**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2,$$

dove a è un numero reale positivo.

Tra di esse determinare la parabola p che, con la sua simmetrica q rispetto all'origine O , delimita una regione di area $\frac{128}{3}$.

Constatato che per la parabola p risulta $a = 2$, calcolare l'area del quadrilatero convesso individuato dagli assi di riferimento e dalle tangenti alle due parabole p, q nel loro punto comune di ascissa positiva.

Considerato infine il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero precedente, dimostrare che si tratta di un parallelogramma e calcolarne l'area.

Soluzione

- **Quesito n. 2**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , è assegnata la curva k di equazione:

$$y = \frac{x^2}{4 - x^3}.$$

Dopo aver studiato la funzione $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^3}$ (dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di k), disegnare l'andamento di k .

Indicata con t la tangente a k parallela all'asse delle ascisse distinta dall'asse stesso, calcolare l'area della regione piana delimitata da k e da t .

A completamento del problema, prendere in esame le due seguenti proposizioni:

- Una funzione reale di variabile reale non derivabile in un punto non è continua in quel punto.
- Una funzione reale di variabile reale non continua in un punto non è derivabile in quel punto.

Dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire una esauriente giustificazione della risposta.

Soluzione

• **Quesito n. 3**

Considerato il rettangolo $ABCD$, il cui lato AD è lungo $8a$, dove a è una lunghezza nota, sia M il punto medio del lato AB . Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta per M , prendere un punto V in modo che il piano del triangolo VCD formi col piano del rettangolo un angolo α tale che $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice V e base $ABCD$ è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è $92a^2$, calcolare la lunghezza di AB .

Constatato che tale lunghezza è $5a$, condurre un piano σ parallelo alla base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il poligono sezione di σ con la piramide stessa, ottenendo in questo modo un prisma retto. Determinare la posizione di σ per la quale il volume di tale prisma risulta massimo.

A completamento del problema, dimostrare che se i numeri reali positivi x, y variano in modo che la loro somma si mantenga costante allora il prodotto $x^2 \cdot y$ è massimo quando risulta $x = 2y$.

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

- L'equazione proposta

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2,$$

rappresenta un fascio di parabole aventi tutte la concavità rivolta nella direzione positiva dell'asse y e, in quanto il coefficiente di x^2 non dipende dal parametro a , risultano tutte sovrapponibili per mezzo di una opportuna traslazione.

Riscritta l'equazione nella forma

$$\left(\frac{1}{4}x^2 - y\right) + \left(\frac{1}{4}x\right)a + (-1)a^2 = 0$$

appare pure evidente l'impossibilità per il fascio di avere punti fissi in quanto già il coefficiente di a^2 non si annulla per nessun valore reale di x e y .

Determinate le coordinate dei vertici V

$$x_V = -\frac{1}{2}a, \quad y_V = -\frac{17}{16}a^2$$

ed eliminando il parametro a , si ottiene la parabola $y_V = -\frac{17}{4}x_V^2$ che, assieme ad $x_V < 0$ (si tenga presente che $a > 0$) rappresenta il luogo dei vertici.

Considerato a come assegnato sia ora

$$p : y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2.$$

Ricordate le equazioni rappresentative della trasformazione di simmetria centrale rispetto all'origine σ_O e della sua inversa σ_O^{-1}

$$\sigma_O : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad \sigma_O^{-1} : \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

la parabola q si ottiene sostituendo le equazioni di σ_O^{-1} in p

$$-y' = \frac{1}{4}(-x')^2 + \frac{1}{4}a(-x') - a^2$$

per cui

$$y' = -\frac{1}{4}(x')^2 + \frac{1}{4}a(x') + a^2 :$$

in definitiva q è rappresentata dall'equazione

$$q : y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax + a^2.$$

I punti di intersezione di p e q si ottengono risolvendo il sistema tra le rispettive equazioni

$$p \cap q = \{A, A'\} \implies \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax + a^2 \end{cases}$$

da cui

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax + a^2 \implies \frac{1}{2}x^2 = 2a^2$$

e $x^2 = 4a^2$, $x = \pm 2a$. Se A è il punto di ascissa positiva cioè $x_A = 2a$ la sua ordinata è

$$y_A = \frac{1}{4}(2a)^2 + \frac{1}{4}a(2a) - a^2 = \frac{1}{2}a^2$$

per cui $A(2a, \frac{1}{2}a^2)$ e $A'(-2a, -\frac{1}{2}a^2)$, dove A' è determinato per simmetria rispetto all'origine. I rispettivi vertici sono

$$V_p \left(-\frac{1}{2}a, -\frac{17}{16}a^2 \right) \quad \text{e} \quad V_q \left(\frac{1}{2}a, \frac{17}{16}a^2 \right)$$

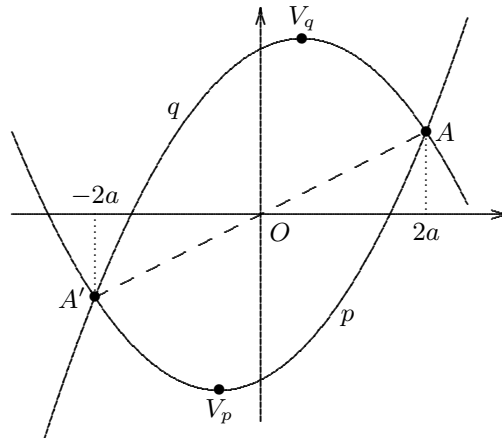


Fig. 1

per cui si può ottenere la rappresentazione grafica di fig.1.

■ La regione di cui si chiede l'area è formata dall'unione di due segmenti parabolici, $\text{seg}(A'V_pA)$ e $\text{seg}(A'V_qA)$. L'area totale è perciò la somma delle aree dei due segmenti ciascuna ottenibile direttamente per mezzo della formula generalizzata di Archimede ossia $\mathcal{A}(\text{segmento}) = \frac{1}{6}|a| \cdot |x_2 - x_1|^3$, con a coefficiente del termine di secondo grado della parabola e x_1, x_2 ascisse dei punti di intersezione tra la parabola e la retta costituenti il segmento. Ne segue

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(A'V_pAV_q) &= \mathcal{A}(A'V_pA) + \mathcal{A}(A'V_qA) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{1}{4} \right| \cdot |2a - (-2a)|^3 + \frac{1}{6} \cdot \left| -\frac{1}{4} \right| \cdot |2a - (-2a)|^3 \\ &= \frac{1}{12} \cdot |4a|^3 = \frac{64}{12}a^3 \quad (a > 0)\end{aligned}$$

che posta uguale al valore suggerito dal testo implica

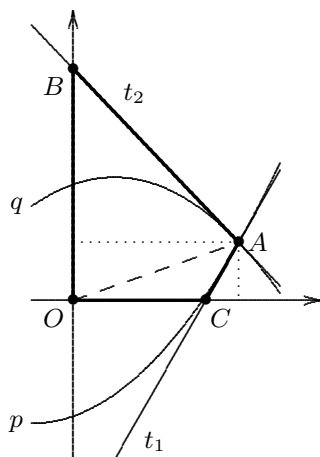
$$\frac{64}{12}a^3 = \frac{128}{3} \implies a^3 = 8, \quad a = 2.$$

Le parabole p e q sono ora

$$\begin{aligned}p: y &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 4 & V_p \left(-1, -\frac{17}{4} \right) \\ q: y &= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 & V_q \left(1, \frac{17}{4} \right),\end{aligned}$$

con $A(4, 2)$ e $A'(-4, -2)$ punti di intersezione. p inoltre interseca l'asse x nei punti con ascisse che soddisfano alla

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 4 = 0 \implies x^2 + 2x - 16 = 0 \implies x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{17}.$$

**Fig. 2** (unità non isometriche).

Per definire il quadrilatero convesso individuato dagli assi e dalle tangenti t_1 e t_2 in A (fig.2) è necessario determinare le equazioni di quest'ultime. Pertanto ottenute le rispettive derivate prime

$$y'_p = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad y'_q = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

il loro calcolo in $x_A = 4$ fornisce i coefficienti angolari

$$y'_p(4) = \frac{5}{2} \quad y'_q(4) = -\frac{3}{2}.$$

L'equazione della tangente t_1 alla parabola p nel punto A è perciò

$$t_1 : y - 2 = \frac{5}{2}(x - 4) \implies y = \frac{5}{2}x - 8$$

mentre t_2 è espressa da

$$t_2 : y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 4) \implies y = -\frac{3}{2}x + 8.$$

Queste permettono di individuare i punti C e B in quanto, intersecate con gli assi forniscono

$$\begin{aligned} C(x_C, 0) : 0 &= \frac{5}{2}x_C - 8 \implies x_C = \frac{16}{5} \\ B(0, y_B) : y_B &= -\frac{3}{2} \cdot 0 + 8 \implies y_B = 8. \end{aligned}$$

In definitiva i vertici del quadrilatero sono

$$A(4, 2), \quad B(0, 8), \quad O(0, 0), \quad C\left(\frac{16}{5}, 0\right).$$

L'area richiesta si può infine ottenere come la somma delle aree dei due triangoli $\triangle OAB$ e $\triangle OCA$ e quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OCAB) &= \mathcal{A}(\triangle OAB) + \mathcal{A}(\triangle OCA) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot |x_A| + \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot |y_A| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot 2 = 16 + \frac{16}{5} = \frac{96}{5},\end{aligned}$$

avendo considerato $|x_A|$ come la misura dell'altezza di $\triangle OAB$ rispetto alla base OB e $|y_A|$ come altezza di $\triangle OCA$ rispetto alla base OC .

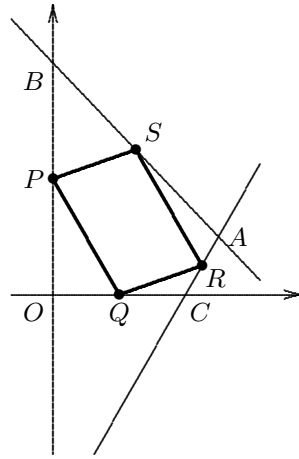


Fig. 3 (unità non isometriche).

- Per dimostrare che il quadrilatero $PQRS$ con P, Q, R, S punti medi rispettivamente dei lati OB, OC, CA, AB , risulta un parallelogramma è sufficiente verificare l'uguaglianza tra le coppie di coefficienti angolari

$$m_{QR} = m_{PS} \wedge m_{QP} = m_{RS}.$$

Ottenute le coordinate dei vertici

$$\begin{aligned}P(0, 4), \quad R\left(\frac{x_C + x_A}{2}, \frac{y_C + y_A}{2}\right) &= \left(\frac{18}{5}, 1\right) \\ Q\left(\frac{x_C}{2}, 0\right) &= \left(\frac{8}{5}, 0\right) \quad \text{e} \quad S\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) &= (2, 5)\end{aligned}$$

discende:

$$\begin{aligned} m_{QR} &= \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = \frac{1 - 0}{\left(\frac{18}{5} - \frac{8}{5}\right)} = \frac{1}{2} \\ m_{PS} &= \frac{y_S - y_P}{x_S - x_P} = \frac{5 - 4}{2 - 0} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad m_{QR} = m_{PS}, \\ m_{QP} &= \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{4 - 0}{\left(0 - \frac{8}{5}\right)} = -\frac{5}{2} \\ m_{RS} &= \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R} = \frac{5 - 1}{\left(2 - \frac{18}{5}\right)} = -\frac{5}{2} \quad \text{e ancora} \quad m_{QP} = m_{RS}. \end{aligned}$$

Il quadrilatero è pertanto un parallelogramma e la sua area si può determinare trovando la distanza h di S dalla retta PQ . L'equazione di quest'ultima si ricava facilmente dalla $y = m_{QP}x + y_P$ ossia $PQ : y = -\frac{5}{2}x + 4$. Ne segue che

$$h = \frac{|y_S - (-\frac{5}{2}x_S + 4)|}{\sqrt{1 + \frac{25}{4}}} = \frac{|5 - (-\frac{5}{2} \cdot 2 + 4)|}{\frac{1}{2}\sqrt{29}} = \frac{12}{\sqrt{29}}.$$

Poiché

$$\overline{PQ} = \sqrt{y_P^2 + x_Q^2} = \sqrt{16 + \frac{64}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{29},$$

discende

$$\mathcal{A}(PQRS) = \overline{PQ} \cdot h = \frac{4}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}} = \frac{48}{5}$$

che risulta la metà dell'area del precedente quadrilatero $OCAB$. Si può in effetti dimostrare che tale risultato è generale.

Ulteriori metodi di risoluzione

Per la dimostrazione del fatto che $PQRS$ è un parallelogramma si può far uso del calcolo vettoriale determinando i vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{SR}$. Allora, detti $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori rispettivamente dell'asse x e y

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (x_Q - x_P)\mathbf{i} + (y_Q - y_P)\mathbf{j} = \left(\frac{8}{5} - 0\right)\mathbf{i} + (0 - 4)\mathbf{j} = \frac{8}{5}\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \\ \overrightarrow{SR} &= (x_R - x_S)\mathbf{i} + (y_R - y_S)\mathbf{j} = \left(\frac{18}{5} - 2\right)\mathbf{i} + (1 - 5)\mathbf{j} = \frac{8}{5}\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \end{aligned}$$

e risultando $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ si verifica la tesi.

■ Per quanto riguarda l'area, dimostriamo con un approccio generale e ancora per mezzo del calcolo vettoriale che l'area di un parallelogramma $PQRS$ costruito

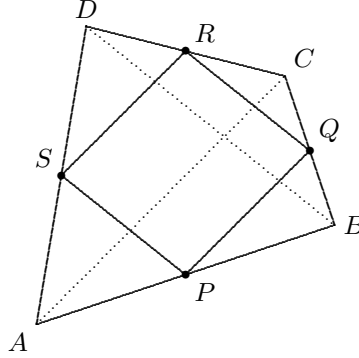


Fig. 4

con i punti medi di un quadrilatero convesso $ABCD$ risulta la metà dell'area di quest'ultimo.

Con riferimento alla figura 4 e ricordando che l'area di un triangolo è espressa dalla

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$$

dove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono i vettori rappresentativi di due lati, possiamo considerare l'area del quadrilatero come somma di quella di due triangoli, per esempio

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle CDA).$$

Ne segue che è anche

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| + \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}| \\ &= \frac{1}{2} (|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}|) \end{aligned}$$

Poiché i vettori $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$ risultano paralleli e concordi (in questo caso perpendicolari al foglio ed uscenti), la somma dei moduli coincide con il modulo della somma ossia

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{1}{2} (|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}|) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}| \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC}| \end{aligned}$$

dove si è utilizzata l'anticommutatività del prodotto vettoriale. Per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma risulta invece

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{1}{2} |(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) \wedge \overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AC}|. \end{aligned}$$

Notato che $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{RC}$ e $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CQ}$, si trova

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{RC} + 2\overrightarrow{CQ} = 2(\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CQ}) = 2\overrightarrow{RQ}$$

e analogamente

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{SD} + 2\overrightarrow{DR} = 2(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}) = 2\overrightarrow{SR}$$

che sostituite nell'espressione dell'area forniscono

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \frac{1}{2} |(2\overrightarrow{RQ}) \wedge (2\overrightarrow{SR})| \\ &= \frac{1}{2} |4\overrightarrow{RQ} \wedge \overrightarrow{SR}| = 2 |\overrightarrow{RQ} \wedge \overrightarrow{SR}|. \end{aligned}$$

Ora l'espressione $|\overrightarrow{RQ} \wedge \overrightarrow{SR}|$ esprime l'area del parallelogramma $PQRS$ per cui

$$\mathcal{A}(ABCD) = 2\mathcal{A}(PQRS) \implies \mathcal{A}(PQRS) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

La curva k è rappresentata da un'equazione razionale fratta in x con il grado del denominatore inferiore di una unità rispetto a quello del denominatore. La condizione che individua il dominio è $4 - x^3 \neq 0$ da cui $x^3 \neq 4$ e $x \neq \sqrt[3]{4} \approx 1,59$. Pertanto $D = \mathbb{R} - \{\sqrt[3]{4}\}$.

- Poiché D non risulta simmetrico rispetto all'origine, k non può né essere simmetrica rispetto all'asse y né rispetto all'origine.
- Segno di k : la disequazione $y \geq 0$ implica

$$\frac{x^2}{4 - x^3} \geq 0$$

per cui il numeratore risulta $x^2 > 0$ per $\forall x \in D \wedge x \neq 0$, $x^2 = 0$ se $x = 0$. Il denominatore invece è positivo se $4 - x^3 > 0$, $x^3 < 4$ da cui discende $x < \sqrt[3]{4}$. Combinando i segni (fig.1) si trova

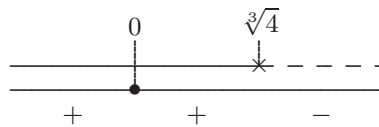


Fig. 1

$$\begin{aligned} y &> 0 & x < \sqrt[3]{4} \wedge x \neq 0 \\ y &= 0 & x = 0 \\ y &< 0 & x > \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

■ La funzione risulta continua nel proprio dominio (in quanto rapporto di funzioni continue) mentre in $\mathbb{R}$ è discontinua per $x = \sqrt[3]{4}$ annullandosi ivi il denominatore. I limiti da affrontare sono pertanto quelli in $\sqrt[3]{4}$ e all'infinito. Ne risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 \left(\frac{4}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\frac{4}{x^3} - 1\right)} = 0^-$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^3} - 1 \right) = -1$$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Analogamente discende che $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0^+$. L'asse x è pertanto un asintoto orizzontale per k . Per $x \rightarrow \sqrt[3]{4}$ è invece

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4} \pm} y = \mp \infty \quad \text{poiché} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} x^2 = \sqrt[3]{16} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4} \pm} 4 - x^3 = 0^\mp,$$

e la retta $x = \sqrt[3]{4}$ risulta asintoto verticale.

■ Derivata prima. Il calcolo di y' risulta

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x(4 - x^3) - x^2(-3x^2)}{(4 - x^3)^2} = \frac{8x - 2x^4 + 3x^4}{(4 - x^3)^2} \\ &= \frac{x(8 + x^3)}{(4 - x^3)^2}, \end{aligned}$$

e la disequazione $y' \geq 0$ implica per il numeratore $x \geq 0$ e per il denominatore $8 + x^3 \geq 0$, disequazione risolta da $x \geq -2$.

Il grafico di fig.2 riassume il segno complessivo e mostra che la curva k sarà crescente quando $x < -2$ e $x > 0 \wedge x \neq \sqrt[3]{4}$ mentre è decrescente se $-2 < x < 0$. In $x = -2$ e $x = 0$ presenta rispettivamente un massimo relativo proprio ed un minimo relativo.

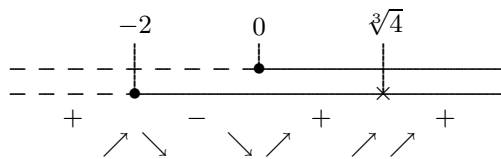


Fig. 2

- Derivata seconda. Partendo dall'espressione per y'

$$y' = \frac{8x + x^4}{(4 - x^3)^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(8 + 4x^3)(4 - x^3)^2 - (8x + x^4) \cdot 2(4 - x^3)(-3x^2)}{(4 - x^3)^4} \\ &= \frac{2(4 - x^3) [(4 + 2x^3)(4 - x^3) - (8x + x^4)(-3x^2)]}{(4 - x^3)^4} \\ &= \frac{2(4 - x^3)(16 - 4x^3 + 8x^3 - 2x^6 + 24x^3 + 3x^6)}{(4 - x^3)^4} \\ &= \frac{2(4 - x^3)(x^6 + 28x^3 + 16)}{(4 - x^3)^4}. \end{aligned}$$

Il primo fattore del numeratore è positivo $4 - x^3 \geq 0$ se $x \leq \sqrt[3]{4}$ mentre per determinare la positività dell'altro $x^6 + 28x^3 + 16 \geq 0$ va fatta la posizione intermedia $t = x^3$: in tal caso la disequazione diviene $t^2 + 28t + 16 \geq 0$. Poiché l'equazione associata è risolta dai valori $t = -14 \pm 6\sqrt{5}$ è anche $t \leq -14 - 6\sqrt{5} \vee t \geq -14 + 6\sqrt{5}$. Ritornando all'incognita x discendono le

$$x^3 \leq -14 - 6\sqrt{5} \quad \vee \quad x^3 \geq -14 + 6\sqrt{5}$$

che implicano

$$x \leq -\sqrt[3]{14 + 6\sqrt{5}} \quad \vee \quad x \geq \sqrt[3]{-14 + 6\sqrt{5}}$$

con $a = -\sqrt[3]{14 + 6\sqrt{5}} \approx -3.01$ e $b = \sqrt[3]{-14 + 6\sqrt{5}} \approx -0.84$. Riassunti questi risultati nella fig.3

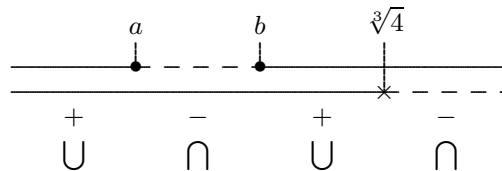


Fig. 3

risulta che le ascisse a e b individuano i punti di flesso della curva k . Calcolata l'ordinata del massimo $M(-2, \frac{1}{3})$, la retta t ha equazione $t : y = \frac{1}{3}$ e il grafico richiesto è rappresentato in fig.4.

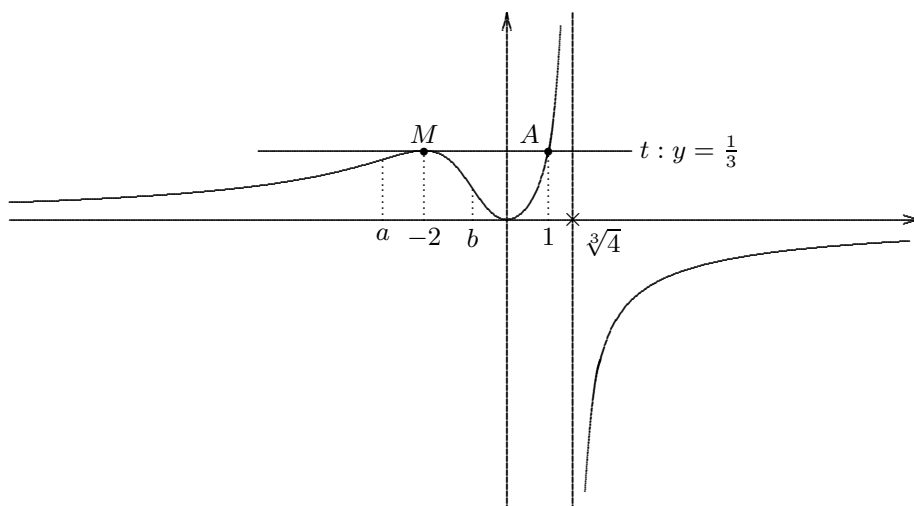


Fig. 4 (unità non isometriche)

- Per individuare l'ascissa del punto A e quindi determinare l'area richiesta basta intersecare t con k ossia

$$t \cap k \implies \frac{1}{3} = \frac{x^2}{4 - x^3},$$

che fornisce l'equazione $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$. Questa, data la tangenza tra t e k , dovrà presentare la soluzione $x = -2$ con molteplicità pari a 2. Difatti applicando il metodo di Ruffini per scomporre il polinomio di terzo grado presente si ha

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

da cui $(x + 2)(x^2 + x - 2) = 0$. Posto $x^2 + x - 2 = 0$ si trovano le radici $x = -2$ (come aspettato) e $x = 1$ che fornisce l'ascissa di A. L'area richiesta, evidenziata in fig.5 è pertanto

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{4 - x^3} \right) dx = \left[\frac{1}{3}x \right]_{-2}^1 - \int_{-2}^1 \frac{x^2}{4 - x^3} dx.$$

Poiché a meno di un fattore costante il numeratore x^2 della funzione integranda è la derivata del denominatore l'integrale indefinito diviene

$$\int \frac{x^2}{4 - x^3} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{-3x^2}{4 - x^3} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(4 - x^3)}{4 - x^3} = -\frac{1}{3} \ln |4 - x^3| + c$$

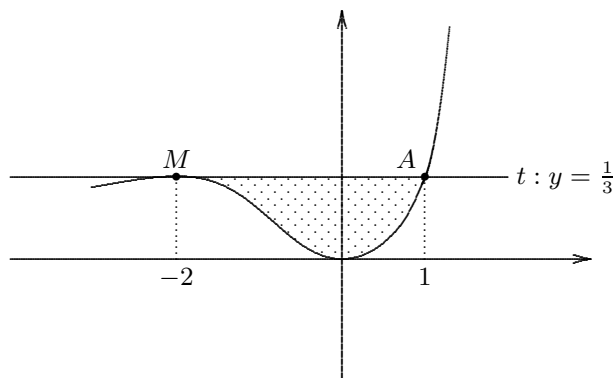


Fig. 5

per cui

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 1 + \frac{1}{3} [\ln |4 - x^3|]_{-2}^1 = 1 + \frac{1}{3} [\ln 3 - \ln |4 - (-8)|] \\ &= 1 + \frac{1}{3} (\ln 3 - \ln 12) = 1 + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1}{4} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \ln 4 \approx 0,54.\end{aligned}$$

■ L'affermazione che *una funzione reale di variabile reale non derivabile in un punto non è continua in quel punto* è falsa in quanto sussistono funzioni non derivabili che risultano continue nei medesimi punti. Quindi per dimostrare la falsità della proposizione è sufficiente fornire un esempio di funzione continua in un punto ma ivi non derivabile. È ben noto che $y = |x|$ rappresenta una funzione continua in $\mathbb{R}$ e in particolare in $x = 0$ ma la sua derivata non esiste nello stesso punto. Difatti il limite del rapporto incrementale destro in $x = 0$ risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{mentre quello sinistro} \quad \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Non esiste quindi $y'(0)$ essendo i due limiti diversi. Altri esempi in $x = 0$ sono $y = e^{-|x|}$, $y = \sin |x|$, $y = |\operatorname{tg} x|$ oppure $y = |x(x - 1)|$.

La seconda proposizione è invece vera.

In effetti essa costituisce la contronominale del noto teorema che afferma la continuità di una funzione derivabile. Difatti se indichiamo con p la proposizione

$$p = \text{la funzione } f \text{ è derivabile in } x_0$$

e con

$$q = f \text{ è continua in } x_0$$

il teorema ricordato afferma che $p \implies q$. Ora la contronominale di questa implicazione è $\bar{q} \implies \bar{p}$ e sappiamo che entrambe, sia l'implicazione diretta che la contronominale, possiedono la medesima tabella di verità ossia sono logicamente equivalenti. D'altra parte $\bar{q} \implies \bar{p}$ significa che *se f non è continua in x_0 allora f non è derivabile in x_0* che è quanto sostenuto dal testo.

Volendo invece seguire una dimostrazione alternativa supponiamo che f non sia continua in x_0 ossia risulti

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \neq f(x_0), \quad (1)$$

e verifichiamo che il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2)$$

o non esiste o è infinito. Possono verificarsi vari casi:

a) $f(x_0)$ non esiste. In tal caso non si può nemmeno porre il problema del calcolo del rapporto incrementale e del conseguente limite (2). Quindi f non è derivabile in x_0 .

b) $f(x_0)$ esiste mentre non esiste $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$. Ne segue che pure il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0)$$

non esisterà: poiché $h \rightarrow 0$ presente al denominatore non può far convergere il limite del rapporto ad un valore finito segue per (2) l'impossibilità di essere finito. (Si pensi ad una funzione oscillante tra due estremi positivi: il limite (2) in questo caso sarebbe ∞).

c) $f(x_0)$ esiste e $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \infty$. Questo implica per il rapporto incrementale un limite infinito ossia

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$$

in quanto rapporto di una funzione divergente con una infinitesima. Ancora non esiste la derivata.

d) $f(x_0)$ esiste e $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$. Ricordando che per (1) dev'essere $l \neq f(x_0)$ risulterebbe

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = l - f(x_0) \neq 0$$

da cui essendo $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ discende ancora una volta un limite infinito per il rapporto incrementale.

In conclusione se la f non è continua in un punto non risulta nemmeno derivabile in quel punto.

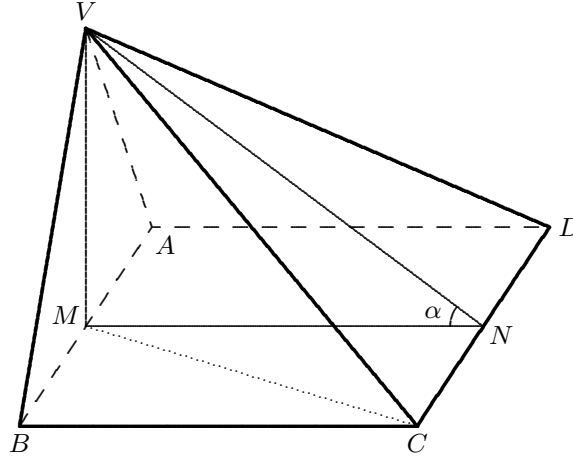


Fig. 1

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Tracciata la figura si sa che $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{MN} = 8a$ e che $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = \overline{VM} / \overline{MN}$.
Ne segue immediatamente che $\overline{VM} = \frac{3}{4} \overline{MN} = \frac{3}{4} \cdot 8a = 6a$.

Poiché il segmento VM è per costruzione perpendicolare al piano di $ABCD$ e quindi ad AB esso è per il triangolo VBA anche altezza. Essendo M il punto medio di AB , VM è pure mediana e quindi $\triangle VBA$ è isoscele. In particolare $\overline{VB} = \overline{VA}$.

Posto $\overline{AB} = 2x$ è $\overline{MA} = \overline{MB} = x$ ($x > 0$) e $\overline{VB}^2 = \overline{VM}^2 + \overline{MB}^2 = 36a^2 + x^2$.
Considerando $\triangle VMC$ con $\angle VMC$ retto, risulta

$$\begin{aligned} \overline{VC}^2 &= \overline{VM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{VM}^2 + (\overline{MB}^2 + \overline{BC}^2) \\ &= 36a^2 + x^2 + 64a^2 = 100a^2 + x^2. \end{aligned}$$

Poiché risulta pure $\overline{VB}^2 + \overline{BC}^2 = (36a^2 + x^2) + 64a^2 = 100a^2 + x^2$ discende $\overline{VB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{VC}^2$ che conferma la perpendicolarità di VB con BC : $\triangle VBC$ è pertanto retto in B . In modo del tutto analogo si procede per la faccia VAD trovando in particolare $\overline{VD}^2 = 100a^2 + x^2$. Poiché $\overline{VD} = \overline{VC}$ segue che $\triangle VCD$ è isoscele.

La superficie laterale si ottiene sommando le aree dei 4 triangoli VBA , VBC , VCD , VAD . Poiché comunque $\mathcal{A}(\triangle VBC) = \mathcal{A}(\triangle VAD)$ ne segue

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_l &= 2 \cdot \mathcal{A}(\triangle VBC) + \mathcal{A}(\triangle VBA) + \mathcal{A}(\triangle VCD) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{VB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{VM} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{VN}, \end{aligned}$$

e avendosi $\overline{VN}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{VM}^2 = 64a^2 + 36^2 = 100a^2$ da cui $\overline{VN} = 10a$, si ottiene

$$\mathcal{S}_l = 8a \cdot \sqrt{36a^2 + x^2} + 6ax + 10ax = 8a \cdot \sqrt{36a^2 + x^2} + 16ax.$$

Posto $\mathcal{S}_l = 92a^2$ e diviso per $4a$ risulta

$$8a \cdot \sqrt{36a^2 + x^2} + 16ax = 92a^2 \implies 2\sqrt{36a^2 + x^2} = 23a - 4x.$$

Questa è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 23a - 4x \geq 0 \\ 4(36a^2 + x^2) = (23a - 4x)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq \frac{23}{4}a \\ 4(36a^2 + x^2) = 529a^2 + 16x^2 - 184ax \end{cases}$$

da cui $12x^2 - 184ax + 385a^2 = 0$. L'equazione ha per soluzioni i valori

$$x = \frac{92 \pm 62}{12}a = \begin{cases} \nearrow \frac{77}{6}a \\ \searrow \frac{5}{2}a \end{cases}$$

di cui solo $x = \frac{5}{2}a$ risulta accettabile in quanto l'altra è $\frac{77}{6}a > \frac{23}{4}a$. In definitiva $\overline{AB} = 2x = 5a$ come sottolineato dal testo.

■ Considerando il triangolo VBA e detti S, T, R, U i punti di intersezione del piano σ rispettivamente con VB, VM, VA, VN , sia $x = \overline{VT}$. Ne segue che $0 \leq x \leq 6a$: se $x = 0$ il prisma retto (parallelepipedo) degenera nel segmento VM , mentre se $x = 6a$ si riduce al rettangolo $ABCD$. In entrambi i casi il volume è nullo.

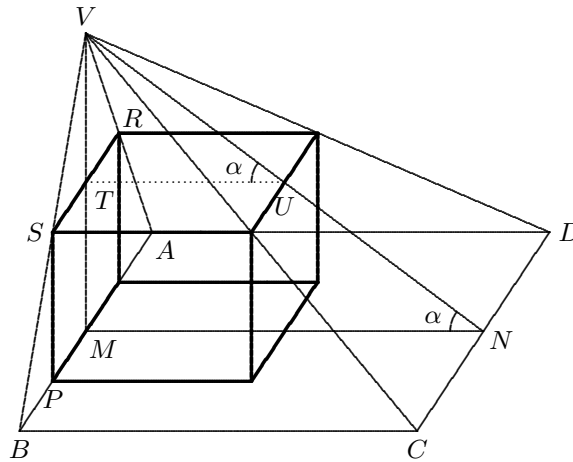
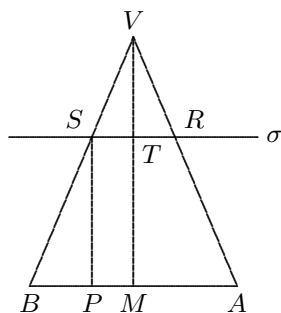


Fig. 2

**Fig. 3**

Notata la similitudine di $\triangle VST$ con $\triangle VBM$ (fig.3) discende

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{VT}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{VM}} \quad \Rightarrow \quad \overline{ST} = \left(\frac{\overline{BM}}{\overline{VM}} \right) \cdot x = \frac{\left(\frac{5}{2}a \right)}{6a} \cdot x = \frac{5}{12}x$$

da cui $\overline{SR} = \frac{5}{6}x$. Poiché è pure

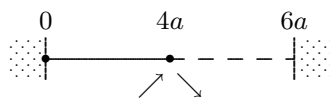
$$\frac{\overline{VT}}{\overline{TU}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{si ricava} \quad \overline{TU} = \frac{\overline{VT}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3}x,$$

che costituisce la misura dell'altro lato del rettangolo di base del prisma. L'altezza si calcola immediatamente come $\overline{TM} = \overline{VM} - \overline{VT} = 6a - x$ per cui il volume diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \overline{TU} \cdot \overline{SR} \cdot \overline{TM} = \left(\frac{4}{3}x \right) \cdot \left(\frac{5}{6}x \right) \cdot (6a - x) \\ &= \frac{10}{9}x^2(6a - x) = \frac{20}{3}ax^2 - \frac{10}{9}x^3 \\ &\quad \text{con } 0 \leq x \leq 6a. \end{aligned}$$

Passando alla derivata prima

$$\mathcal{V}' = \frac{40}{3}ax - \frac{10}{3}x^2$$

**Fig. 4**

e $\mathcal{V}' \geq 0$ se e solo se $-x^2 + 4ax \geq 0$ cioè per $0 \leq x \leq 4a$. Considerando le limitazioni della variabile x si può concludere che il volume massimo è raggiunto quando $x = 4a$ ossia quando il piano σ dista $2a$ dalla base.

- Sia $k > 0$ la somma costante dei due numeri positivi x e y ossia

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y = k \\ k > 0. \end{cases}$$

Si tratta di studiare la funzione in due variabili $z = y \cdot x^2$. Lo studio di z si può ricondurre a quello di una più comune funzione di un'unica variabile reale eliminando, per mezzo della $y = k - x$ la y : procedendo in tal modo si ottiene

$$\begin{cases} z = x^2(k - x) \\ x > 0. \end{cases}$$

Il calcolo della z' fornisce $z' = 2kx - 3x^2$ e la $z' \geq 0$ implica $2kx - 3x^2 \geq 0$ che è soddisfatta dall'intervallo $0 \leq x \leq \frac{2}{3}k$ ($k > 0$).

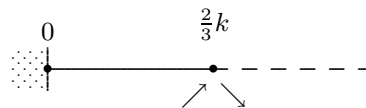


Fig. 5

Il massimo è raggiunto in corrispondenza di $x = \frac{2}{3}k$ che significa per la variabile y assumere il valore $y = k - \frac{2}{3}k = \frac{1}{3}k$.

È immediato notare che $x = 2 \left(\frac{1}{3}k \right) = 2y$ come volevasi dimostrare.

MATURITÀ '97

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

• Quesito n. 1

In un piano sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza nota r ed una parabola p che seca k nei punti A e B e passa per il suo centro C . Inoltre l'asse di simmetria della parabola è perpendicolare alla retta AC e la corda AB è lunga quanto il lato del triangolo equilatero inscritto in k .

Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy) :

- determinare l'equazione della parabola p ;
- calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno alla retta AC , dalla regione piana delimitata dai segmenti di rette AB e AC e dall'arco BC della parabola p ;
- considerata la retta t , tangente alla parabola p e parallela alla retta AB , trovare la distanza delle rette t ed AB ;
- dopo aver dimostrato analiticamente che p e k non hanno altri punti comuni oltre ad A e B , calcolare le aree delle regioni piane in cui p divide il cerchio delimitato da k .

Soluzione

• Quesito n. 2

Sono assegnate le funzioni in x :

$$\frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1}$$

dove a, b sono parametri reali.

- Fra tali funzioni indicare con $f(x)$ quella per cui la curva k di equazione $y = f(x)$, disegnata in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , soddisfi alle seguenti condizioni:
 - la retta di equazione $y = 1$ seci k in due punti e sia tangente ad essa in un punto;
 - l'asse x sia tangente a k in due punti distinti.
- Disegnare l'andamento di k .
- Calcolare l'area della regione piana delimitata da k e dall'asse x .

d) Calcolare:

$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx.$$

Soluzione

• **Quesito n. 3**

Considerare i coni circolari retti in cui è uguale ad una lunghezza assegnata la somma del doppio dell'altezza col diametro della base. Fra tali coni determinare quello di volume massimo e stabilire se ha anche la massima area laterale.

Nel cono di volume massimo inscrivere poi il cilindro circolare retto avente la base sul piano di base del cono e volume massimo.

A completamento del problema, considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I , e detta $f(x)$ decrescente in I se $x' < x''$ implica $f(x') > f(x'')$ per ogni x', x'' , dimostrare il seguente teorema:

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un intervallo I . Condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia decrescente in I è che risulti $f'(x) < 0$ per ogni x appartenente ad I .

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

a) Scelto il sistema cartesiano Oxy coincidente con il centro C della circonferenza, questa assume la forma

$$k : x^2 + y^2 = r^2.$$

Considerando parabole con asse parallelo all'asse y del sistema cartesiano, si potranno verificare le 4 eventualità rappresentate in fig. 1, in ciascuna delle quali viene soddisfatta la perpendicolarità tra la retta AC e l'asse (tratteggiato) della parabola.

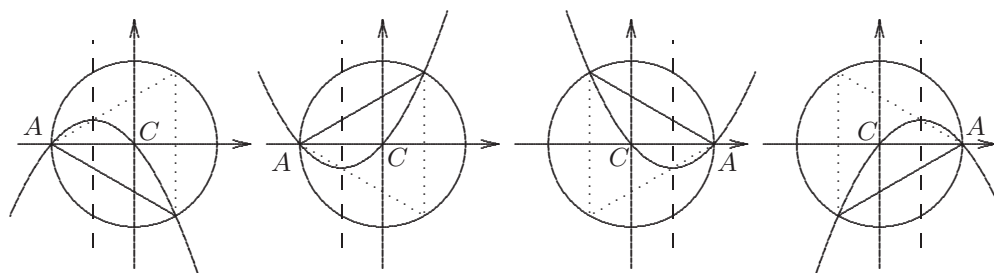


Fig. 1

Dato che il testo non fornisce ulteriori elementi di scelta, affrontiamo il primo caso in cui $A(-r, 0)$ e la concavità della parabola p è rivolta verso la direzione negativa dell'asse y . Abbiamo pertanto la situazione di fig. 2 e l'equazione di p dovrà appartenere al fascio

$$p: y = ax[x - (-r)] = ax(x + r) \quad (1)$$

essendo $A(-r, 0)$ e $O(0, 0)$ i punti di intersezione di p con l'asse x .

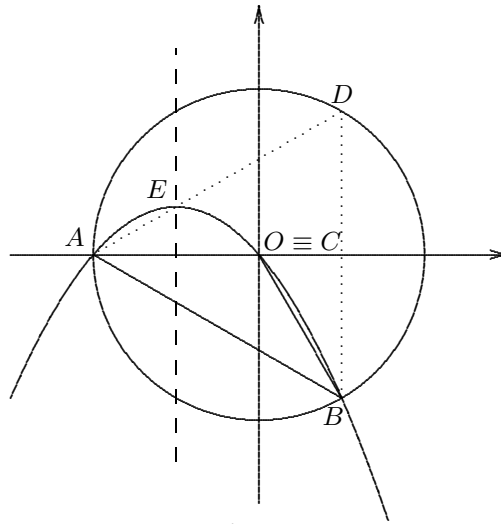


Fig. 2

Per determinare l'equazione di p è sufficiente, trovate le coordinate di B , imporre il passaggio per B . D'altra parte le coordinate di B si determinano notando che $\angle AOB = 2(\angle ADB)$ in quanto rispettivamente angoli al centro e alla circonferenza che insistono sul medesimo arco AB . Essendo la corda il lato del triangolo equilatero inscritto in k è anche $\angle ADB = \frac{\pi}{3}$ per cui $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$. Ne segue che l'angolo orientato formato dal semiasse positivo delle x con la semiretta OB risulta di $-\frac{\pi}{3}$ cosicché

$$B \left[\overline{OB} \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right), \overline{OB} \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] \equiv \left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\sqrt{3} \right).$$

Poiché $B \in p$ segue che, dalla (1)

$$-\frac{r}{2}\sqrt{3} = a \left(\frac{r}{2} \right) \cdot \left(\frac{r}{2} + r \right)$$

da cui $a = -2\sqrt{3}/(3r)$ e quindi l'equazione richiesta è

$$p: y = -\frac{2\sqrt{3}}{3r}x(x + r) = -\frac{2\sqrt{3}}{3r}(x^2 + rx).$$

Per verificare la correttezza dei grafici finora proposti conviene determinare il vertice E di p . Si trova immediatamente $E(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2\sqrt{3}})$, punto che è interno alla circonferenza in quanto la sua distanza da O ,

$$\overline{EO} = \sqrt{\left(-\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{3}} < r$$

risulta minore del raggio di k .

b) Per determinare il volume del solido ottenuto con una rotazione completa attorno all'asse $x \equiv AC$ va innanzitutto determinata l'equazione della retta AB . Questa apparterrà al fascio proprio per A di equazione $y - 0 = m(x + r)$ e il coefficiente angolare si ottiene dalla

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-\frac{r}{2}\sqrt{3}}{\left(\frac{r}{2} + r\right)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} :$$

È quindi $r_{AB} : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x+r)$. Il volume richiesto risulta essere la differenza tra il volume del cono generato dalla rotazione del segmento AB e il volume della figura generata dalla rotazione dell'arco di parabola OB . Utilizzando l'espressione per i volumi dei solidi di rotazione e notato che per il cono gli estremi di integrazione sono $-r, \frac{r}{2}$ mentre per la seconda figura sono 0 e $\frac{r}{2}$, è pertanto

$$V = \pi \int_{-r}^{\frac{r}{2}} \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}(x+r) \right]^2 dx - \pi \int_0^{\frac{r}{2}} \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3r}(x^2 + rx) \right]^2 dx.$$

Eseguendo i calcoli discende,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \int_{-r}^{\frac{r}{2}} (x+r)^2 dx - \frac{4\pi}{3r^2} \int_0^{\frac{r}{2}} (x^2 + rx)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{(x+r)^3}{3} \right]_{-r}^{\frac{r}{2}} - \frac{4\pi}{3r^2} \int_0^{\frac{r}{2}} (x^4 + 2rx^3 + r^2x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{9} \left[\left(\frac{r}{2} + r \right)^3 - (-r+r)^3 \right] - \frac{4\pi}{3r^2} \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2rx^4}{4} + \frac{r^2x^3}{3} \right]_0^{\frac{r}{2}} \\ &= \frac{3}{8}\pi r^3 - \frac{4\pi}{3r^2} \left[\frac{r^5}{32 \cdot 5} + \frac{r^5}{32} + \frac{r^5}{3 \cdot 8} \right] = \frac{3}{8}\pi r^3 - \frac{38\pi r^3}{8 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \frac{97}{360}\pi r^3. \end{aligned}$$

c) Per determinare la distanza tra la retta AB e la tangente t alla parabola parallela ad AB , è sufficiente individuare il punto di tangenza T e quindi la

distanza di questo dalla retta AB . La retta t apparterrà al fascio di rette parallele ad AB di equazione $f: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + q$ con q parametro qualsiasi. Poiché nel punto di tangenza le derivate di p e f dovranno essere uguali discende che

$$\begin{cases} y' = -\frac{2\sqrt{3}}{3r}(2x + r) \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \implies -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3r}(2x + r).$$

Quest'ultima equazione permette di trovare l'ascissa del punto T cioè

$$\frac{2}{r}(2x + r) = 1 \quad \text{da cui} \quad x_T = -\frac{r}{4}.$$

Sostituita nell'equazione della parabola fornisce

$$y_T = -\frac{2\sqrt{3}}{3r} \left(\frac{r^2}{16} - \frac{r^2}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8}r \quad \text{cioè} \quad T \left(-\frac{r}{4}, \frac{\sqrt{3}}{8}r \right).$$

In base alla formula che esprime la distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta di equazione $y = mx + q$,

$$d = \frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}},$$

si ottiene nel nostro caso particolare quanto richiesto

$$d = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{8}r + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{r}{4} + r \right) \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{r\sqrt{3} \left| \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right|}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)} = \frac{3}{2}r \left| \frac{3}{8} \right| = \frac{9}{16}r.$$

d) Per dimostrare analiticamente l'esistenza dei soli punti A e B di intersezione tra k e p cioè che risulta $k \cap p = \{A, B\}$ (geometricamente è evidente notato che $\overline{EO} < r$), vanno studiate le soluzioni del sistema

$$k \cap p \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{3r}(x^2 + rx). \end{cases}$$

In particolare l'equazione risolvente, ottenuta eliminando la variabile y ,

$$x^2 + \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3r}(x^2 + rx) \right]^2 = r^2 \quad (2)$$

dovrà presentare come soluzioni i valori $x_A = -r$ e $x_B = \frac{r}{2}$ e solo questi. Pertanto, riscritta la (2) come

$$x^2 - r^2 + \frac{4}{3r^2}(x+r)^2 \cdot x^2 = 0$$

si nota subito che

$$(x-r)(x+r) + \frac{4}{3r^2}(x+r)^2 \cdot x^2 = 0$$

da cui

$$(x+r) \cdot \left[x-r + \frac{4}{3r^2}(x+r) \cdot x^2 \right] = 0.$$

Per quanto detto, il fattore di terzo grado entro parentesi quadre dev'essere ulteriormente scomponibile e quindi divisibile per $x = \frac{r}{2}$. Riscritta perciò l'equazione come

$$(x+r) \cdot \left(\frac{4}{3r^2}x^3 + \frac{4}{3r}x^2 + x - r \right) = 0$$

ed applicando il metodo di Ruffini al fattore

$$\frac{4}{3r^2}x^3 + \frac{4}{3r}x^2 + x - r = 0$$

si ottiene

$\frac{r}{2}$	$\frac{4}{3r^2}$	$\frac{4}{3r}$	1	$-r$
$\frac{r}{2}$	$\frac{4}{3r^2}$	$\frac{2}{3r}$	1	$+r$
$\frac{r}{2}$	$\frac{4}{3r^2}$	$\frac{2}{r}$	2	0

In definitiva l'equazione risolvente possiede la scomposizione

$$(x+r) \cdot \left(x - \frac{r}{2} \right) \cdot \left(\frac{4}{3r^2}x^2 + \frac{2}{r}x + 2 \right) = 0 :$$

ora dato che l'equazione

$$\frac{4}{3r^2}x^2 + \frac{2}{r}x + 2 = 0$$

possiede un discriminante negativo

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{1}{r^2} - \frac{8}{3r^2} = -\frac{5}{3r^2} < 0$$

significa che per l'equazione risolvibile non esistono ulteriori radici reali in aggiunta a quelle fornite dai termini di primo grado. Ne segue che, essendo queste le ascisse dei punti A e B , questi ultimi sono anche gli unici punti di intersezione tra la circonferenza e la parabola. È pertanto dimostrato che $k \cap p = \{A, B\}$.

■ In base alla figura 3, le aree richieste si possono considerare costituite da un'opportuna combinazione dei seguenti elementi:

- area della circonferenza di raggio r , $\mathcal{A}_1 = \pi r^2$,
- area $\mathcal{A}_2$ del settore circolare AOB relativo ad un angolo al centro $\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$. È quindi

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{2}{3}\pi \right) = \frac{1}{3}\pi r^2.$$

- Area $\mathcal{A}_3$ del segmento parabolico delimitato dall'asse x e dall'arco AEO ,
- area $\mathcal{A}_4$ del segmento parabolico delimitato dalla retta OB e dall'arco di parabola OB .

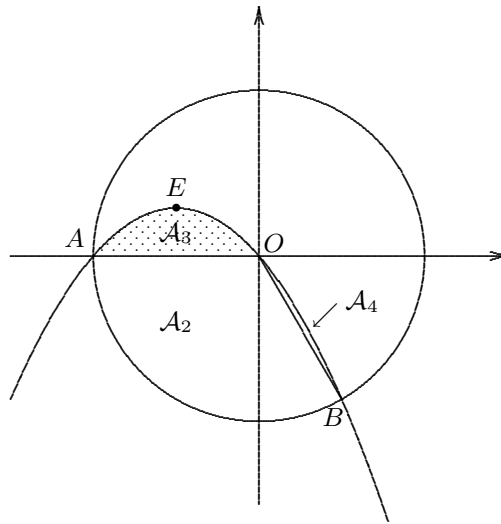


Fig. 3

In particolare, la regione definita dall'arco di parabola $AE OB$ e dall'arco minore di circonferenza AB , possiede area $\mathcal{S}_1$ data

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$$

mentre la rimanente regione della circonferenza ha area $\mathcal{S}_2 = \mathcal{A}_1 - \mathcal{S}_1$. Pertanto, utilizzando per i segmenti parabolici la formula generalizzata di Archimede, risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{1}{6} \left| -\frac{2\sqrt{3}}{3r} \right| \cdot |x_A - x_O|^3 + \frac{1}{6} \left| -\frac{2\sqrt{3}}{3r} \right| \cdot |x_B - x_O|^3 \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{1}{9}\sqrt{3}r^2 + \frac{\sqrt{3}r^2}{72} = r^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right).\end{aligned}$$

Per $\mathcal{S}_2$ invece

$$\mathcal{S}_2 = \pi r^2 - r^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = r^2 \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8} \right).$$

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

L'insieme di curve assegnato è rappresentato dall'equazione

$$k : f(x) = \frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

presenta tutte potenze pari di x . Questo suggerisce una sua importante proprietà e cioè la sua simmetria rispetto all'asse delle ordinate. Difatti k , per $\forall x \in \mathbb{R}$, soddisfa all'identità $f(-x) = f(x)$. La prima condizione implica che l'intersezione di k con la retta di equazione $r : y = 1$ consista di 3 punti $k \cap r = \{A, B, C\}$ tra i quali, diciamo A il punto di tangenza. Ne segue che per la simmetria di k , B e C dovranno avere ascisse opposte ($x_B = -x_C$), mentre quella di A non potrà che essere nulla in quanto un valore diverso non potrebbe essere coerente con la simmetria pari dell'insieme.

Pertanto, ottenuta l'equazione risolvente il sistema

$$k \cap r : \begin{cases} y = \frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1} \\ y = 1 \end{cases} \implies \frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1} = 1$$

da cui

$$x^4 + x^2(a - 1) + b - 1 = 0, \quad (1)$$

e notato il suo grado (4°), questa dovrà presentare una radice nulla di molteplicità 2 mentre le rimanenti due avranno valori opposti: la (1) si potrà pertanto scrivere come $x^2(cx^2 + d) = 0$. Ciò si realizza se si pone in (1) $b - 1 = 0$ da cui $b = 1$. In tal caso discende

$$x^4 + x^2(a - 1) = 0 \implies x^2(x^2 + a - 1) = 0$$

e le ascisse di B e C sono fornite dall'annullarsi del secondo fattore

$$x^2 + a - 1 = 0 \quad x^2 = 1 - a \quad x = \pm\sqrt{1 - a} \quad a \leq 1$$

risultando opposte come previsto. Poniamo $x_B = \sqrt{1-a}$ e $x_C = -\sqrt{1-a}$.
La condizione sulle tangenze all'asse x implica che il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{x^4 + ax^2 + 1}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases}$$

presenti invece un'equazione risolvente

$$x^4 + ax^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

con 2 radici doppie distinte. Essendo questa ancora di 4° grado ciò si ottiene ponendo il discriminante della (2) uguale a zero cioè

$$\Delta = a^2 - 4 = 0 \quad \text{che fornisce} \quad a = \pm 2.$$

Alternativamente si può risolvere la (2), ottenendo

$$x^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \quad a^2 - 4 \geq 0.$$

Supposto il II membro non negativo si trovano le 4 soluzioni

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}} & x_2 &= -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}} = -x_1 \\ x_3 &= \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}} & x_4 &= -\sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}} = -x_3 \end{aligned}$$

e perché vi sia la tangenza le radici dovranno essere uguali a 2 a 2, cioè ciascuna dovrà possedere una molteplicità pari a 2. Imponendo

$$x_1 = x_3 \quad \text{oppure} \quad x_2 = x_4$$

ci si riduce alla medesima condizione $a^2 - 4 = 0$.

Dei due valori trovati per a , la condizione $a \leq 1$ permette di accettare solo quello negativo, $a = -2$. Di conseguenza le soluzioni dell'equazione risolvente $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = 0$ risultano

$$x^2 = 1 \quad \implies \quad x = \pm 1$$

ciascuna dotata di molteplicità 2 e opposta all'altra.

In definitiva k assume la forma

$$k : y = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 + 1}, \quad (3)$$

risultando tangente alla retta $y = 1$ nel punto $A(0, 1)$ e intersecandola in $B(\sqrt{3}, 1)$, $C(-\sqrt{3}, 1)$, mentre è tangente all'asse x nei punti $E(1, 0)$ e $F(-1, 0)$.

Volendo riscrivere la (3) in una terza forma alternativa, eseguiamo la divisione tra i polinomi costituenti il secondo membro:

x^4	0	$-2x^2$	0	1	$x^2 - 3$	
$-x^4$		$-x^2$				
$-3x^2$					1	$x^2 + 1$
$+3x^2$					3	
					4	

ne segue che è anche

$$k : y = x^2 - 3 + \frac{4}{x^2 + 1}. \quad (4)$$

■ Per quanto riguarda il punto $b)$, il dominio di k coincide con $\mathbb{R}$. Come già detto k possiede un grafico simmetrico rispetto all'asse y in quanto l'equazione soddisfa alla $f(-x) = f(x)$: per il segno invece, la seconda forma di k permette di concludere che è $y > 0$ per $\forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ mentre è $y = 0$ se $x = \pm 1$. La funzione è inoltre continua in tutto $\mathbb{R}$ in quanto rapporto di due polinomi dove il divisore risulta sempre diverso da 0.

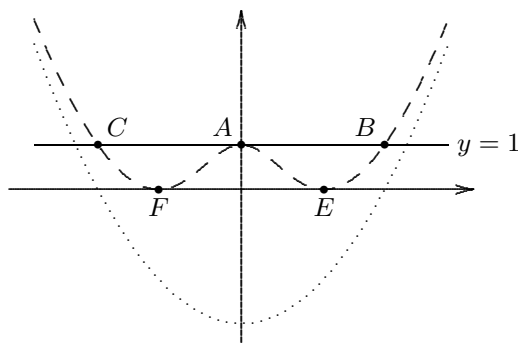
Per i limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ in quanto, in base alla forma (4), è

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - 3 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x^2 + 1} = 0.$$

La medesima espressione evidenzia pure l'esistenza di una funzione asintotica di equazione $y_a = x^2 - 3$, rappresentativa di una parabola. Poiché il secondo addendo risulta per $\forall x \in \mathbb{R}$ positivo e infinitesimo per $x \rightarrow \pm\infty$, la funzione data si avvicina asintoticamente alla parabola rimanendo "al di sopra" della stessa. Con le conclusioni del punto $a)$ si può già intuire che l'andamento di k dovrebbe essere quello sintetizzato dalla fig. 1

Il calcolo di y' fornisce

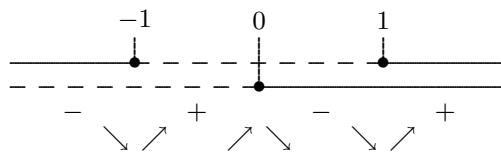
$$\begin{aligned} y' &= 2x + 4 \left[\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \right] = 2x \left[\frac{(x^2 + 1)^2 - 4}{(x^2 + 1)^2} \right] \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \cdot [(x^2 + 1)^2 - 4] \end{aligned}$$

**Fig. 1** (sistema non isometrico)

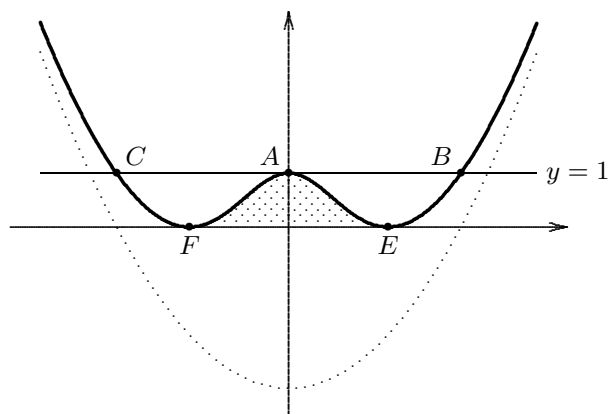
e $y' \geq 0$ implica lo studio di $2x \geq 0$, $x \geq 0$ assieme a $(x^2 + 1)^2 - 4 \geq 0$. Da quest'ultima disequazione discende

$$(x^2 + 1) \geq 4 \implies |x^2 + 1| \geq 2 \implies x^2 + 1 \geq 2$$

e quindi $x^2 \geq 1$, soddisfatta da $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

**Fig. 2**

Combinando i segni (fig. 2) la y' risulta positiva o nulla nell'insieme di valori $-1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 1$. Tralasciando lo studio di y'' (in quanto inutilmente complicato) possiamo concludere che l'andamento è rappresentato dalla fig. 3

**Fig. 3** (sistema non isometrico)

c) L'area richiesta, evidenziata in fig. 3, si ottiene dall'integrale

$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

una volta che si tenga conto della simmetria. Allora

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^1 f(x) \, dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 - 3 + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx.$$

Tendendo conto delle proprietà di linearità dell'integrale definito discende infine

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \int_0^1 x^2 \, dx - 6 \int_0^1 dx + 8 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} - 3x \right]_0^1 + 8 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} - 3x + 4 \operatorname{arctg} x \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - 3 + 4 \operatorname{arctg} 1 \right) \\ &= 2 \left(-\frac{8}{3} + \pi \right) = 2\pi - \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

d) Il calcolo di

$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) \, dx \tag{1}$$

si può eseguire direttamente sostituendo ad x , $\frac{x}{3}$ ottenendo l'integrale

$$\int_0^3 \left[\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 3 + \frac{4}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} \right] dx = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{9} - 3 + \frac{36}{x^2 + 9} \right) dx,$$

oppure più opportunamente, eseguire in (1) la sostituzione $t = \frac{x}{3}$ da cui $x = 3t$ e $dx = 3dt$. In tal caso vanno aggiornati gli estremi di integrazione che implicano se $x = 0$, $t = 0$ e se $x = 3$, $t = 1$. Ne segue

$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) \, dx = \int_0^1 f(t) \cdot 3dt = 3 \cdot \int_0^1 f(t)dt.$$

Il valore dell'integrale rimasto coincide con la metà dell'area calcolata nel punto precedente cosicché si giunge a

$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) \, dx = 3 \int_0^1 f(t)dt = 3 \cdot \left(\pi - \frac{8}{3} \right) = 3\pi - 8.$$

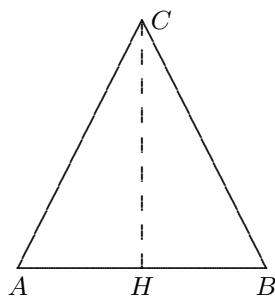


Fig. 1

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

Le condizioni date dal testo legano l'altezza $\overline{CH}$ al diametro $\overline{AB} = 2\overline{HB}$ del cono circolare retto ABC rappresentato in sezione in fig. 1.

È pertanto

$$2\overline{CH} + 2\overline{HB} = \text{costante assegnata positiva}$$

costante che, per comodità di scrittura, indicheremo con $2a$ ($a > 0$). Ne segue

$$2\overline{CH} + 2\overline{HB} = 2a \quad \text{ossia} \quad \overline{CH} + \overline{HB} = a.$$

Posto $x = \overline{HB}$ con $x \geq 0$, dalla $\overline{CH} + \overline{HB} = a$ discende che $\overline{CH} = a - x$ e dovendo pure essere $\overline{CH} \geq 0$, è anche $a - x \geq 0$ e $x \leq a$. Le limitazioni della variabile x sono quindi $0 \leq x \leq a$.

La trattazione dei casi limite è immediata: se $x = 0$ risulta $\overline{CH} = a$ e il cono degenera in un segmento di volume nullo. Per $x = a$ invece, $\overline{CH} = 0$ e ancora il cono degenera in un cerchio. Il volume è ancora nullo.

Per x generico, si ottiene per il volume V

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi\overline{HB}^2 \cdot \overline{CH} = \frac{\pi}{3}x^2(a - x) = \frac{\pi}{3}(ax^2 - x^3) \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$V' = \frac{\pi}{3}(2ax - 3x^2)$$

e lo studio del suo segno $V' \geq 0$, implica la disequazione $2ax - 3x^2 \geq 0$ soddisfatta nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{2}{3}a$.

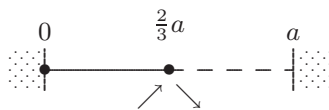


Fig. 2

Il volume massimo si ottiene pertanto in corrispondenza $\overline{HB} = \frac{2}{3}a$ e $\overline{CH} = \frac{1}{3}a$. Poiché si chiede se in concomitanza con il volume massimo il cono possieda pure area laterale massima, va determinata la dipendenza dell'area laterale $\mathcal{A}_l$ dalla variabile x . Ne segue

$$\mathcal{A}_l = \frac{1}{2}(2\pi \cdot \overline{HB}) \cdot \overline{CB} = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{CB} = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2}$$

da cui

$$\begin{cases} \mathcal{A}_l = \pi x \sqrt{(a-x)^2 + x^2} = \pi x \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2} \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

La derivata prima risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_l &= \pi \left[\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2} + \frac{x(-2a + 4x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}} \right] \\ &= \frac{\pi(a^2 - 3ax + 4x^2)}{\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}} \end{aligned}$$

e lo studio del segno $\mathcal{A}'_l \geq 0$ implica la disequazione $4x^2 - 3ax + a^2 > 0$. Poiché il discriminante di questa è negativo $\Delta = 9a^2 - 16a^2 < 0$, risulta $\mathcal{A}'_l > 0$ per $0 \leq x \leq a$ e l'area laterale risulta una funzione crescente di x . $\mathcal{A}'_l$ raggiunge pertanto il valore massimo nel caso degenere quando $x = a$ dove invece, come già notato, il volume è nullo.

■ L'ulteriore richiesta di inscrivere nel cono di volume massimo un cilindro retto di volume massimo configura un terzo problema di max-min dove ora le dimensioni del cono risultano non più variabili ma fisse. In particolare è ora $\overline{HB} = \frac{2}{3}a$ e $\overline{CH} = \frac{1}{3}a$. Allora posto $x = \overline{HD}$ (fig. 3)

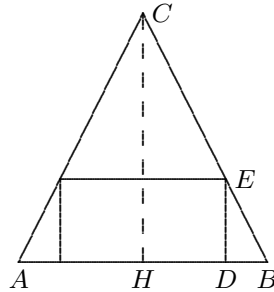


Fig. 3

e notato che $0 \leq x \leq \frac{2}{3}a$, i casi limite per il volume $\mathcal{V}_c$ del cilindro sono:

$$\begin{aligned} E \equiv B, \quad \mathcal{V}_c &= 0, \quad \text{perché degenera nel cerchio di base} \\ E \equiv C, \quad \mathcal{V}_c &= 0, \quad \text{perché degenera nell'altezza } CH. \end{aligned}$$

Per determinare il volume $\mathcal{V}_c = \pi \cdot \overline{HD}^2 \cdot \overline{ED}$ va ottenuta l'altezza $\overline{ED}$. D'altra parte per la similitudine esistente tra i triangoli $\triangle DBE$ e $\triangle HBC$, segue

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{HB}}$$

da cui

$$\overline{ED} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{CH}}{\overline{HB}} = \frac{\frac{a}{3}(\overline{HB} - \overline{HD})}{\frac{2}{3}a} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}a - x \right).$$

Il volume è espresso da

$$\begin{cases} \mathcal{V}_c = \pi x^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}a - x \right) \right] = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{3}ax^2 - x^3 \right) \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}a, \end{cases}$$

mentre la sua derivata prima

$$\mathcal{V}'_c = \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{3}ax - 3x^2 \right) \geq 0$$

è positiva quando $\frac{4}{3}ax - 3x^2 \geq 0$ cioè nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{4}{9}a$.

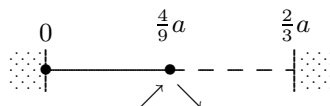


Fig. 4

Il cilindro raggiunge il volume massimo quando il suo raggio di base è pari a $\frac{4}{9}a$.

■ Si chiede infine di dimostrare che, detta $f(x)$ una funzione reale di variabile reale dotata di derivata $f'(x)$, la condizione $f'(x) < 0$ è sufficiente ma non necessaria per la monotonia decrescente di $f(x)$.

Per la dimostrazione della sufficienza, supposta $f'(x) < 0$ per $x \in I$ è possibile applicare ad f il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x', x''] \subseteq I$. Questo teorema assicura l'esistenza di un elemento ξ tale che

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(\xi) \quad \text{con} \quad \xi \in]x', x''[.$$

Essendo $\xi \in I$ è pure, per l'ipotesi posta, $f'(\xi) < 0$. Ne segue

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} < 0. \tag{1}$$

Supposto $x'' > x'$ cioè $x'' - x' > 0$ dalla (1) discende $f(x'') - f(x') < 0$ ossia $f(x'') < f(x')$ che, data l'arbitrarietà di x', x'' , dimostra la monotonia decrescente di f per $\forall x \in I$.

D'altra parte la condizione non è necessaria per la monotonia di una funzione in quanto sussistono funzioni decrescenti per le quali non esiste la derivata prima (negativa) per $\forall x \in I$. Portiamo a tal fine l'esempio della funzione f definita dalle

$$f : \begin{cases} y = -\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ y = \sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Questa è costituita da due archi di parabola, il primo di equazione $x = y^2$ con $y \leq 0$ e $x \geq 0$, il secondo $x = -y^2$ e $y > 0$ (fig. 5).

Tale funzione risulta in $\mathbb{R}$ decrescente com'è facile dimostrare direttamente in base alla definizione ma, essendo la derivata

$$f' : \begin{cases} y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \\ y' = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x < 0, \end{cases}$$

appare evidente che in qualsiasi intervallo del tipo $[\alpha, \beta]$ con $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ non può essere $f'(x) < 0$ per $\forall x \in [\alpha, \beta]$ in quanto non esiste la $f'(0)$.

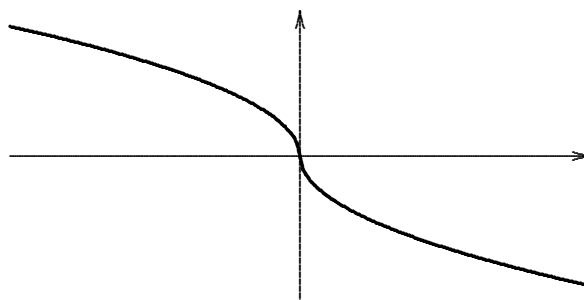


Fig. 5

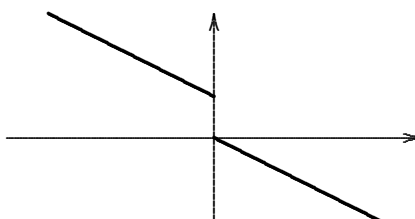


Fig. 6

Un ulteriore esempio è offerto da funzioni con grafici analoghi a quello della funzione h definita sotto e rappresentato in fig. 6 .

$$h: \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ y = -\frac{1}{2}x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

In tal caso risulta $h'(x) = -\frac{1}{2} < 0$ per $\forall x \in \mathbb{R}_0$ mentre per $x = 0$, h non risulta derivabile.

MATURITÀ '98

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

• Quesito n. 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi ortogonali Oxy , sono assegnate le curve di equazione

$$y = ax^3 + 3x + b$$

dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$.

- Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti.
- Calcolare i valori di a e b in modo che la curva γ corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e seci l'asse x nel punto di ascissa $-2\sqrt{2}$.
- Controllato che la curva γ si ottiene per $a = -\frac{1}{2}$, disegnarne l'andamento.
- Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dall'asse x .

Soluzione

• Quesito n. 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , è assegnata la curva C' di equazione

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

- Studiarla e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva seca l'asse x ($x_A > x_B$).
- Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B .
- Disegnare C'' sullo stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C'' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' seca C' .
- Determinare l'angolo sotto cui C' e C'' si secano in B .
- Calcolare le aree delle regioni in cui C' divide il cerchio delimitato da C'' .

Soluzione

• **Quesito n. 3**

Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $2a$, dove a è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$.

- a) Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con x la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di x il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta t .
- b) Verificato che risulta

$$V(x) = \frac{1}{2}\pi a^3(4 \sin x + 3 \cos x),$$

con x appartenente ad un determinato intervallo, studiare la funzione $V(x)$ nell'intervallo stabilito e disegnarne il grafico in un piano cartesiano.

- c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia $k\pi a^3$, dove k è un parametro reale assegnato.
- d) Completare la risoluzione dimostrando, col metodo preferito, che il volume V di un tronco di cono di raggi R ed r ed altezza h è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr).$$

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

a) L'equazione assegnata $y = ax^3 + 3x + b$ è una cubica in quanto $a \neq 0$. La risposta alla domanda si ottiene calcolando la derivata prima $y' = 3ax^2 + 3$ e imponendo che l'equazione $y' = 0$ abbia radici reali cioè

$$y' = 0 \quad 3ax^2 + 3 = 0 \quad ax^2 + 1 = 0 \quad x^2 = -\frac{1}{a}$$

da cui, posto $a < 0$ si ottengono le soluzioni

$$x = \pm \sqrt{-\frac{1}{a}} = \pm \frac{1}{\sqrt{-a}}.$$

Difatti in tale ipotesi è

$$y' \geq 0, \quad 3ax^2 + 3 \geq 0, \quad ax^2 + 1 \geq 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{-a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{-a}} \quad (a < 0)$$

e la rappresentazione grafica di fig. 1 aiuta a capire gli intervalli dove la funzione risulta monotona: appare evidente come y abbia un minimo relativo locale in

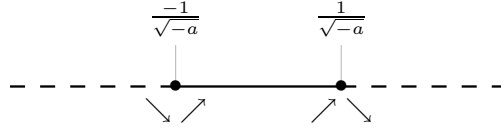


Fig. 1.

$x_1 = -1/\sqrt{-a}$ e un massimo relativo locale in $x_2 = 1/\sqrt{-a}$. In definitiva per $a < 0$ è pure $y' > 0$ per $\forall x \in \mathbb{R}$ e la cubica non possiede i punti richiesti.

b) Avendo il punto di massimo ascissa $x_M = 1/\sqrt{-a}$ imponiamo la condizione $y(x_M) = 0$ cioè

$$y_M = a \left(\frac{1}{\sqrt{-a}} \right)^3 + 3 \left(\frac{1}{\sqrt{-a}} \right) + b = 0 \quad (1)$$

La seconda condizione suggerita dal testo implica invece $y(-2\sqrt{2}) = 0$ che esplicitamente diviene

$$a(-2\sqrt{2})^3 + 3(-2\sqrt{2}) + b = 0. \quad (2)$$

Raccolte queste due ultime equazioni nel sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{-a}} + \frac{3}{\sqrt{-a}} + b = 0 \\ -16a\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + b = 0, \end{cases}$$

dalla prima discende $b = -2/\sqrt{-a}$ (è $b < 0$) che sostituita nella successiva equazione conduce alla

$$-16a\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{-a}} = 0 \quad (3)$$

che si può riscrivere

$$-8(a\sqrt{-a})\sqrt{2} - 3\sqrt{2}(\sqrt{-a}) - 1 = 0.$$

Posto $t = \sqrt{-a}$ e quindi $t^2 = -a$ ($t > 0$) discende

$$8t^3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t - 1 = 0. \quad (4)$$

Osservando che il termine noto non dipende da $\sqrt{2}$, proviamo come possibile radice $t = 1/\sqrt{2}$ (in alternativa si legga la **nota** alla fine di questo quesito). Difatti

$$8 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \sqrt{2} - 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 4 - 3 - 1 = 0 \quad (5)$$

per cui $t = 1/\sqrt{2}$ è una radice che implica $\sqrt{-a} = 1/\sqrt{2}$ cioè $a = -\frac{1}{2}$, valore esplicitato chiaramente dal testo nel quesito successivo. In corrispondenza si trova $b = -2\sqrt{2}$ e l'equazione della cubica risulta

$$y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x - 2\sqrt{2}. \quad (6)$$

N.B. La ricerca delle soluzioni dell'equazione (3) poteva risolversi (anche se in modo discutibile) facendo uso dell'informazione $a = -\frac{1}{2}$ suggerita nel quesito c) e quindi verificando che per $a = -\frac{1}{2}$ la (3) era comunque soddisfatta.

c) Come detto nella nota sopra, il testo stesso suggerisce di controllare che in corrispondenza di $a = -\frac{1}{2}$ le condizioni poste nel punto precedente risultano soddisfatte: difatti ciò appare evidente dall'identità (5). Qui va solo aggiunto che, al fine di studiare l'andamento della curva, l'equazione (6) rappresenta una normale parabola cubica. Pertanto affrontati i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 3x - 2\sqrt{2} \right) = \mp\infty$$

e ottenute per sostituzione dalle $x = \pm 1/\sqrt{-a}$ l'ascissa dei punti di massimo $A(\sqrt{2}, 0)$ e di minimo relativo $B(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ ($C(-2\sqrt{2}, 0)$ è invece il punto di intersezione con l'asse x imposto precedentemente), il calcolo della derivata prima fornisce $y' = -\frac{3}{2}x^2 + 3$ mentre la derivata seconda risulta $y'' = -3x$.

La condizione $y'' \geq 0$ è soddisfatta dai valori $x \leq 0$ per cui per $x < 0$ la concavità è rivolta verso l'alto (fig. 2). Il punto di flesso coincide con $F(0, -2\sqrt{2})$ mentre il grafico è rappresentato dalla fig. 3



Fig. 2.

Si noti che il punto di massimo locale $A(\sqrt{2}, 0)$ possiede ordinata nulla: la cubica è pertanto tangente all'asse x in questo punto.

d) Il calcolo dell'area della regione compresa tra γ e l'asse delle x (in giallo nella fig. 3) si ottiene tramite integrazione definita dell'espressione

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 3x - 2\sqrt{2} \right) dx$$

ponendo attenzione al fatto che, nell'intervallo di integrazione, γ possiede ordinate negative. L'area è pertanto l'opposto dell'integrale sopra

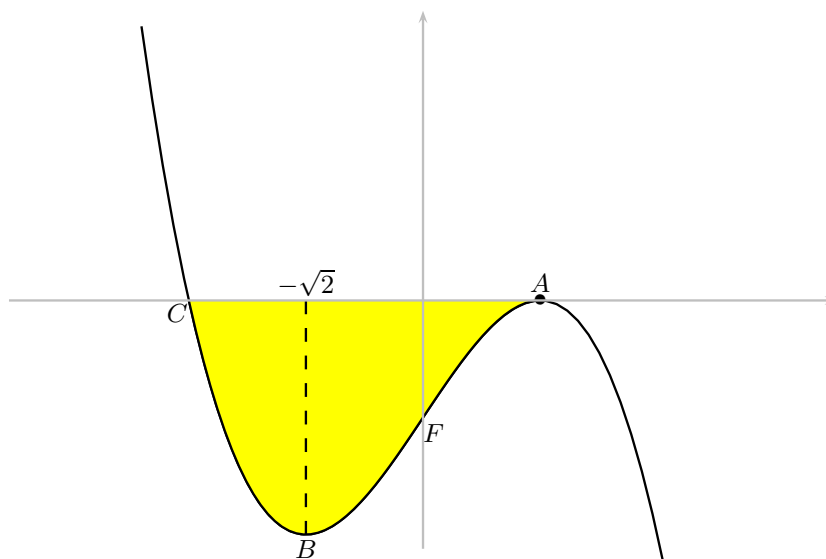


Fig. 3. Grafico della funzione $y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x - 2\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= - \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 3x - 2\sqrt{2} \right) dx = \int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x + 2\sqrt{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2\sqrt{2}x \right]_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot 4 - 3 + 4 - \left(\frac{1}{8} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 8 - 8 \right) = \frac{27}{2}
 \end{aligned}$$

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

L'equazione rappresentativa della curva C' rientra nella classe delle razionali fratte con il grado del numeratore maggiore di quello del denominatore per cui, dopo aver determinato il dominio $D = \mathbb{R} - \{0\}$, si può riscriverla come

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}. \quad (7)$$

Appare pertanto evidente la presenza di un asintoto (che verrà determinato formalmente più avanti) di equazione $y_a = \frac{1}{2}x$ che aiuta ad uno studio sintetico preventivo della funzione. Procedendo comunque nel modo usuale, l'equazione (7) è invariante rispetto ad una simmetria centrale di centro O in quanto

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{2(-x)} = -\frac{x^2 - 1}{2x} = -f(x) :$$

C' è quindi dispari.

- Segno: $y \geq 0$ implica $x^2 - 1 \geq 0$ risolta da $x \leq -1 \vee x \geq 1$ e $x > 0$. Il grafico riassuntivo (fig. 1)

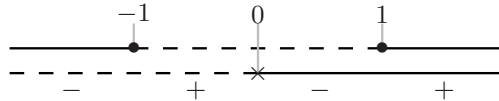


Fig. 1.

mette in evidenza che $y \geq 0$ quando $-1 \leq x < 0 \vee x \geq 1$. I punti in cui la curva secca l'asse x sono $A(1, 0)$ e $B(-1, 0)$.

- Procedendo formalmente i limiti sono:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} = \pm\infty$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2}x = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0 :$$

il limite nel punto singolare di discontinuità in $\mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0\pm} y = \mp\infty \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow 0\pm} x^2 - 1 = -1 \& \lim_{x \rightarrow 0\pm} 2x = 0\pm$$

- Per l'asintoto si ha

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} \right) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2x} = 0$$

e quindi, come aspettato, la sua equazione rappresentativa è $y_a = \frac{1}{2}x$.

- Il confronto della C' con l'asintoto fornisce la posizione reciproca:

$$y - y_a \geq 0 \quad \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} \right) - \frac{1}{2}x \geq 0 \quad -\frac{1}{2x} \geq 0 \quad x < 0.$$

La curva C' giace quindi "sopra" l'asintoto per $x < 0$, "al di sotto" per $x > 0$.

- Passando alla derivata prima

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2 + 1}{2x^2} > 0 \quad \text{per } \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} :$$

la funzione è pertanto crescente in ogni punto del proprio dominio.

- Il calcolo della derivata seconda implica

$$y'' = \frac{1}{2}(-2x^{-3}) = -\frac{1}{x^3} > 0 \quad x^3 < 0 \quad x < 0,$$

e la disposizione delle concavità è riassunta dalla fig. 2

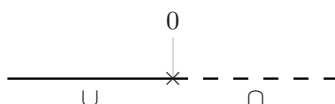


Fig. 2.

In definitiva il grafico (aspettato) di C' è rappresentato dalla figura 3

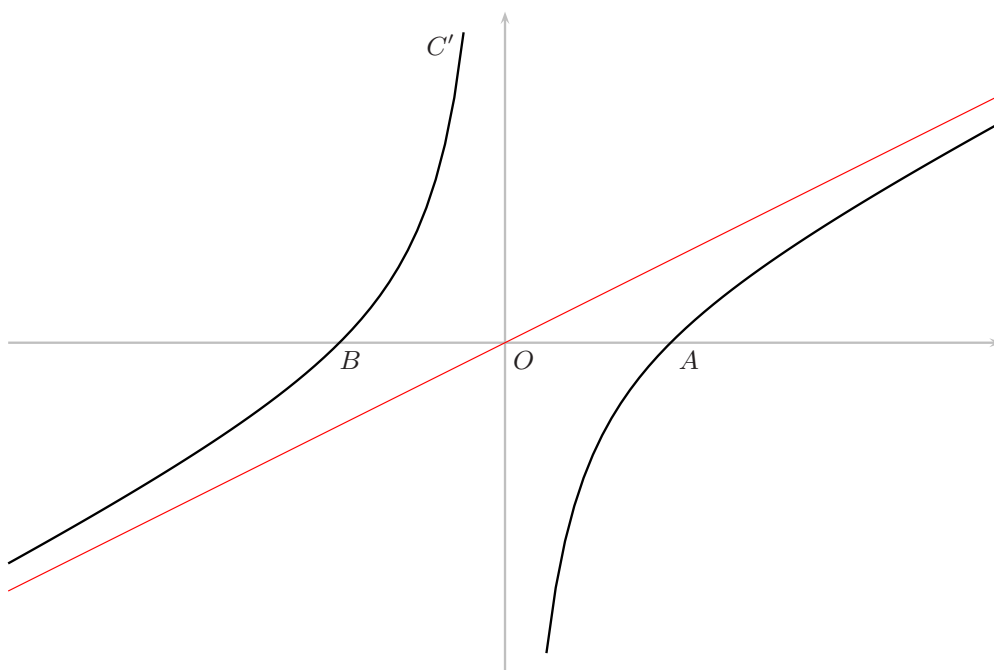


Fig. 3. Grafico della curva C' e asintoto.

b) Per determinare la circonferenza C'' va notato che il suo centro E (fig. 4) deve appartenere all'asse y dovendo passare per i punti A e B , simmetricamente disposti rispetto a quest'asse. La sua equazione sarà pertanto del tipo

$$(x - 0)^2 + (y - y_E)^2 = \overline{EA}^2.$$

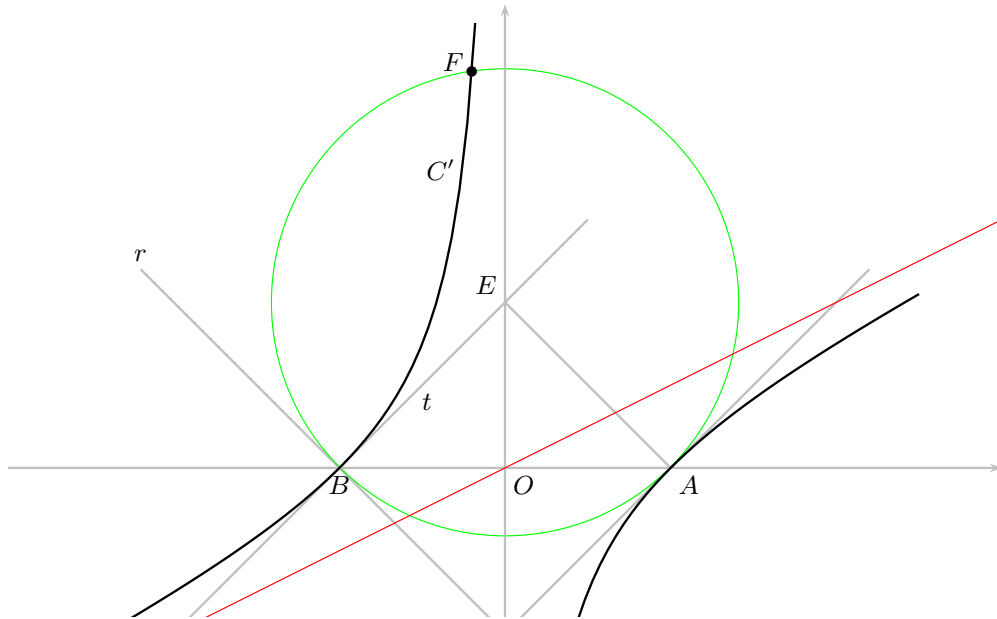


Fig. 4 Grafico della curva C' e circonferenza C'' .

Trovato il coefficiente angolare della retta tangente in A a C' calcolando $y'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, il coefficiente angolare di EA è $m_{EA} = -1$. È immediato determinare l'ordinata di E : imponendo comunque $x = 0$ nella retta EA di equazione

$$EA : y - 0 = -1(x - 1) \quad y = -x + 1 \quad \text{si ottiene} \quad y_E = 1.$$

Discendono pure immediatamente il raggio $\overline{EA} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e l'equazione cercata di $C'' : x^2 + (y-1)^2 = 2$ con centro $E(0, 1)$.

c) Per determinare F (fig. 4) va risolto il sistema tra C' e C'' ossia

$$C' \cap C'' : \begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{2x} \\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Ricavando $x^2 - 1 = 2y - y^2$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima discende

$$y = \frac{2y - y^2}{2x}$$

da cui, dividendo per $y \neq 0$ ($y = 0$ implicherebbe ritrovare come soluzioni i punti già noti A e B) si ottiene a $2x = 2 - y$, $y = -2x + 2$, equazione più semplice essendo

di primo grado. Sostituendo nella prima equazione abbiamo $2x(2 - 2x) = x^2 - 1$ da cui l'equazione $5x^2 - 4x - 1 = 0$. Le sue soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_2 = -\frac{1}{5}$ e poiché l'ascissa cercata dev'essere negativa, l'unica accettabile è $x_F = -\frac{1}{5}$. È immediato ottenere infine $y_F = \frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5}$ per cui, in definitiva $F(-\frac{1}{5}, \frac{12}{5})$.

d) La domanda richiede l'angolo esistente tra le rette tangenti in B rispettivamente a C' e a C'' (fig. 4). D'altra parte, per la simmetria dispari di C' la retta r che interseca C' ed è tangente alla C'' , deve avere coefficiente angolare opposto alla tangente comune in A ossia $m_r = -1$. La tangente t in B a C' possiede invece coefficiente angolare dato dalla

$$y'(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(-1)^2} = 1$$

per cui l'angolo richiesto è pari a $\frac{\pi}{2}$ radianti.

e) Per il calcolo delle aree determiniamo innanzitutto l'area $\mathcal{A}_1$ della regione compresa tra C' e la retta BF (in grigio nella fig. 5).

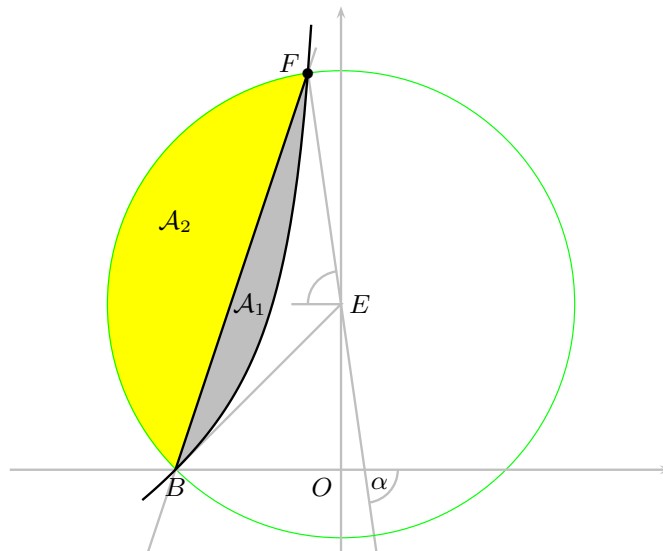


Fig. 5 Regioni del cerchio definite da C' , C'' e retta BF .

Per calcolarla è necessario determinare l'equazione della retta BF : si trova facilmente

$$BF : y - 0 = \frac{12/5}{(-\frac{1}{5} + 1)}(x + 1) \quad y = 3x + 3$$

per cui l'integrazione conduce al risultato

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \int_{-1}^{-\frac{1}{5}} \left(3x + 3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} \right) dx = \left[\frac{5}{4}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \ln x \right]_{-1}^{-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{20} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{5} \right) - \frac{5}{4} + 3 = \frac{6}{5} - \frac{1}{2} \ln 5 \approx 0.3953\end{aligned}$$

Se ora determiniamo l'area $\mathcal{A}_2$ del segmento circolare (in giallo nella fig. 5) possiamo dedurre l'area $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ della prima regione in cui è suddiviso il cerchio da C' . Poi per differenza con l'area totale di C' potremo determinare pure l'area della rimanente parte.

A tale scopo occorre trovare il valore dell'angolo $\angle BEF$: d'altra parte il coefficiente angolare di EF fornisce la tangente dell'angolo α di tale retta con il semiasse positivo delle x . È perciò

$$\operatorname{tg} \alpha = m_{FE} = \frac{\left(\frac{12}{5} - 1\right)}{-\frac{1}{5}} = -7 \quad \alpha = \operatorname{arctg}(-7) \approx -81.9^\circ$$

Considerando una retta s per E parallela all'asse x si vede (fig. 5) che $\angle BEF$ si può considerare formato dalla somma di due angoli $\angle sEF = -\alpha > 0$ e $\angle sBE = \frac{\pi}{4}$: pertanto $\angle BEF = \frac{\pi}{4} + (-\alpha) = \frac{\pi}{4} - \alpha$: l'area del segmento cercato è quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}(\text{settore } BEF) - \mathcal{A}(\triangle BEF) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BE}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \frac{1}{2} \cdot \overline{BE}^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \alpha - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \approx 1.4143,\end{aligned}$$

con $\overline{BE} = \sqrt{2}$, raggio di C'' . Nella precedente si sono usate le formule, $\frac{1}{2}r^2\beta$ che dà l'area di un settore circolare di raggio r e angolo al centro pari a β e $\frac{1}{2}l^2 \operatorname{sen} \beta$ che esprime l'area di un triangolo isoscele di lato obliquo l e angolo al vertice β . L'area della prima regione è quindi

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{6}{5} - \frac{1}{2} \ln 5 + \left[\frac{\pi}{4} - \alpha - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right] \approx 1.8096.$$

L'area della rimanente si ottiene, come detto per differenza con l'area del cerchio:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}(C'') - \mathcal{A} = \pi \cdot \overline{BE}^2 - \mathcal{A} \approx 4.4736.$$

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

a) Tracciata una rappresentazione piana del problema (fig. 1) i dati forniti sono $\overline{AC} = 2a$ e $\cos(\angle ACB) = \cos \alpha = \frac{4}{5}$. Da quest'ultima discende subito

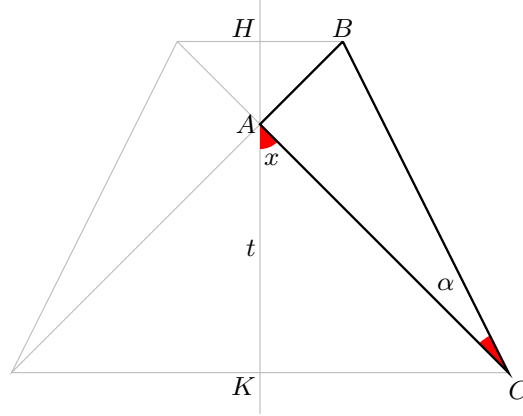


Fig. 1. Sezione piana del problema.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2a\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{3}{2}a,$$

e che il solido generato dalla rotazione di $\triangle ABC$ attorno a t è costituito da un tronco di cono avente raggi di base KC e HB cui sono stati sottratti i volumi di due coni aventi i medesimi raggi di base ed altezze KA , AH .

Posto come detto dal testo, $x = \angle CAK$, variabile soggetta alle limitazioni $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e poiché $\angle BAH = \frac{\pi}{2} - x$ e $\triangle BHA$ e $\triangle AKC$ sono rettangoli, si ottiene $\overline{KC} = \overline{AC} \sin x = 2a \sin x$, $\overline{AK} = 2a \cos x$, $\overline{AH} = \overline{AB} \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{2}a \sin x$, $\overline{HB} = \frac{3}{2}a \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{2}a \cos x$.

Il volume è allora (vedere per la formula la conclusione del punto d):

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi \overline{KH} \cdot \left(\overline{KC}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{KC} \cdot \overline{HB} \right) - \frac{1}{3}\pi \overline{KC}^2 \cdot \overline{AK} - \frac{1}{3}\pi \overline{HB}^2 \cdot \overline{AH}$$

che si riscrive

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\pi}{3} \left[(\overline{AK} + \overline{AH}) \left(\overline{KC}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{KC} \cdot \overline{HB} \right) - \overline{KC}^2 \overline{AK} - \overline{HB}^2 \overline{AH} \right] \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\overline{AK} \cdot \overline{HB}^2 + \overline{AK} \cdot \overline{KC} \cdot \overline{HB} + \overline{AH} \cdot \overline{KC}^2 + \overline{AH} \cdot \overline{KC} \cdot \overline{HB} \right). \end{aligned}$$

Sostituendo alle diverse grandezze la rispettiva espressione in termini di x ed eseguendo i prodotti e riducendo i termini simili si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \frac{\pi}{3} \left[2a \cos x \left(\frac{9}{4} a^2 \cos^2 x \right) + 2a \cos x \cdot 2a \sin x \cdot \frac{3}{2} a \cos x \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} a \sin x (4a^2 \sin^2 x) + \frac{3}{2} \sin x \cdot 2a \sin x \cdot \frac{3}{2} a \cos x \right] \\
&= \frac{\pi}{3} \left(\frac{9}{2} a^3 \cos^3 x + 6a^3 \sin x \cos^2 x + 6a^3 \sin^3 x + \frac{9}{2} a^3 \sin^2 x \cos x \right) \\
&= \frac{\pi}{3} a^3 \left[3 \cos^2 x \left(2 \sin x + \frac{3}{2} \cos x \right) + 3 \sin^2 x \left(2 \sin x + \frac{3}{2} \cos x \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{3} a^3 \left(2 \sin x + \frac{3}{2} \cos x \right) (3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x) \\
&= \frac{\pi a^3}{2} (4 \sin x + 3 \cos x)
\end{aligned}$$

dove si è pure utilizzata l'identità goniometrica fondamentale. In definitiva il volume in termini di x è

$$\mathcal{V} = \frac{\pi a^3}{2} (4 \sin x + 3 \cos x). \quad (8)$$

b) Si tratta di studiare la funzione appena determinata soggetta alle condizioni $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ossia

$$\begin{cases} \mathcal{V}(x) = \frac{\pi a^3}{2} (4 \sin x + 3 \cos x) \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (9)$$

Sottoponendo l'equazione esprimente $\mathcal{V}$ alle trasformazioni standard applicabili alle espressioni lineari in seno e coseno

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \frac{\pi a^3}{2} \left[4 \left(\sin x + \frac{3}{4} \cos x \right) \right] \quad \text{e ponendo } \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4} \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \approx 36,8^\circ \\
&= 2\pi a^3 (\sin x + \operatorname{tg} \beta \cos x) = 2\pi a^3 \left(\sin x + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cos x \right) \\
&= \frac{2\pi a^3}{\cos \beta} \sin(x + \beta) \quad \text{ma } \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{4}{5} \quad \text{cioè } \beta = \alpha \\
&= \frac{2\pi a^3}{(4/5)} \sin(x + \alpha) = \frac{5}{2} \pi a^3 \sin(x + \alpha).
\end{aligned}$$

Il grafico è ora immediato e consiste in quello di un seno di ampiezza $\frac{5}{2} \pi a^3$ traslato verso sinistra di un valore pari ad α (vedi figura 2).

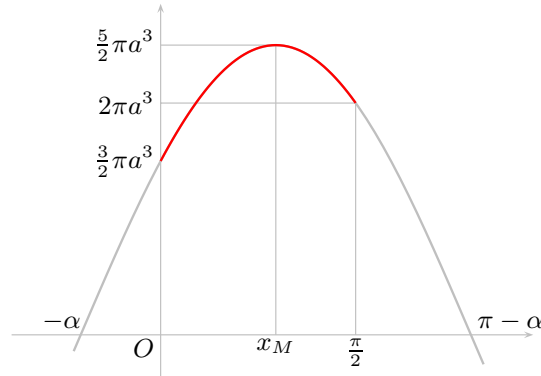


Fig. 2. Grafico (in rosso) della funzione volume $\mathcal{V}$.

Il massimo è raggiunto in corrispondenza dei valori $x + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ che appartengono all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ cioè $x_M = \frac{\pi}{2} - \alpha \approx 14^\circ$: il massimo vale $\mathcal{V}_M = \frac{5}{2}\pi a^3$. Agli estremi la funzione vale

$$\mathcal{V}(0) = \frac{5}{2}\pi a^3 \sin \alpha = \frac{5}{2}\pi a^3 \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{2}\pi a^3$$

$$\mathcal{V}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}\pi a^3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{5}{2}\pi a^3 \cos \alpha = \frac{5}{2}\pi a^3 \cdot \frac{4}{5} = 2\pi a^3.$$

c) Il testo impone la condizione $\mathcal{V}(x) = k\pi a^3$ che implica riscrivere l'equazione 9

$$\begin{cases} k\pi a^3 = \frac{5}{2}a^3 \sin(x + \alpha) \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

La ricerca delle soluzioni della prima equazione si può condurre reinterpretandola come il sistema misto parametrico

$$\begin{cases} y = k\pi a^3 \\ y = \frac{5}{2}a^3 \sin(x + \alpha) \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

dove la prima equazione esprime ora un fascio di rette orizzontali e la seconda dà la curva appena studiata. I valori del parametro k che determinano l'esistenza e il numero delle soluzioni si trovano imponendo il passaggio del fascio rispettivamente per

$$\left(0, \frac{3}{2}\pi a^3\right) \quad k\pi a^3 = \frac{3}{2}\pi a^3 \quad \implies \quad k = \frac{3}{2},$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi a^3\right) \quad k\pi a^3 = 2\pi a^3 \quad \implies \quad k = 2,$$

$$\left(x_M, \frac{5}{2}\pi a^3\right) \quad k\pi a^3 = \frac{5}{2}\pi a^3 \quad \implies \quad k = \frac{5}{2}.$$

In definitiva il fascio di rette orizzontali $y = k\pi a^3$ interseca in un punto la curva studiata se $\frac{3}{2} \leq k < 2$, in due se $2 \leq k \leq \frac{5}{2}$ (due coincidenti se $k = \frac{5}{2}$).

In termini di soluzioni del sistema misto, 1 soluzione se $\frac{3}{2} \leq k < 2$, 2 soluzioni se $2 \leq k \leq \frac{5}{2}$.

d) Per dimostrare la formula che fornisce il volume di un tronco di cono basta considerare la retta di equazione $y = mx$ e il solido di rotazione (attorno all'asse x) che questa definisce assieme alle rette $x = a$, $x = b$ (fig. 3).

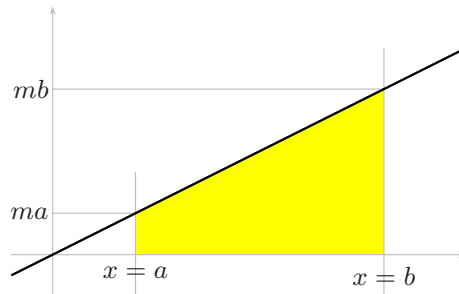


Fig. 3. Sezione che dà origine al tronco di cono.

Allora ricordando la formula dei solidi generati dalla rotazione della curva espressa dall'equazione $y = f(x)$ attorno all'asse x

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

possiamo scrivere

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b (mx)^2 dx = \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{\pi}{3} m^2 (b^3 - a^3).$$

Poiché $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$, il raggio della base maggiore è $R = mb$ e $r = ma$ (fig. 3), quello della minore discende

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\pi}{3} m^2 (b - a)(b^2 + ab + a^2) = \frac{\pi}{3} (b - a)(m^2 b^2 + ma \cdot mb + m^2 a^2) \\ &= \frac{\pi}{3} (h)(R^2 + R \cdot r + r^2) \quad \text{con } h = b - a. \end{aligned}$$

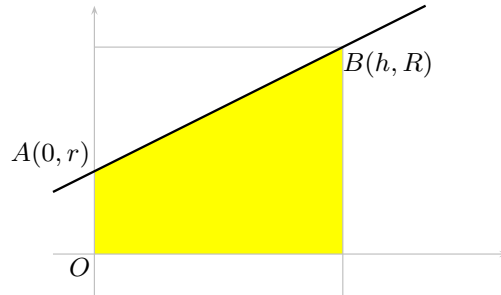


Fig. 4. Sezione che dà origine al tronco di cono.

Alternativamente, definita la retta che passa per i punti $A(0, r)$, $B(h, R)$ (fig. 4) cioè

$$y - r = \frac{R - r}{h}(x - 0) \quad y = \frac{R - r}{h}x + r,$$

il volume cercato si ottiene dall'integrale

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^h \left[\left(\frac{R - r}{h} \right) x + r \right]^2 dx,$$

anch'esso ottenuto applicando la formula dei solidi di rotazione. Procedendo nell'integrazione portando a fattore sotto il segno di integrale la costante $(R - r)/h$ così da riconoscere nel differenziale

$$\frac{R - r}{h} dx \quad \text{quello della funzione integranda} \quad \frac{R - r}{h}x + r,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi \cdot \frac{h}{R - r} \int_0^h \left(\frac{R - r}{h}x + r \right)^2 \cdot \left(\frac{R - r}{h} dx \right) \\ &= \frac{\pi h}{R - r} \left[\left(\frac{R - r}{h}x + r \right)^3 \cdot \frac{1}{3} \right]_0^h = \frac{\pi h}{R - r} \left[\left(\frac{R - r}{h} \cdot h + r \right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{r^3}{3} \right] \\ &= \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{1}{R - r} [R^3 - r^3] = \frac{\pi h}{3} \left(\frac{R - r}{R - r} \right) (R^2 + Rr + r^2) \\ &= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

MATURITÀ '99 PNI

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti.

- **Quesito n. 1**

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} - x.$$

Siano A un punto dell'asse x di ascissa λ , con $\lambda > 0$, B il suo simmetrico rispetto ad O , e A' e B' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B .

Il candidato:

- a. verifichi che le tangenti a e b alla parabola γ , rispettivamente in A' e B' , s'incontrano in un punto E dell'asse y ;
- b. detti C e D i rispettivi punti d'intersezione di a e b con l'asse x , esprima in funzione di λ l'area s del triangolo CED ;
- c. studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'\lambda s$, la curva C di equazione $s = s(\lambda)$;
- d. detto λ_0 il valore di λ per cui s assume valore minimo relativo, e detti a_0 e b_0 le posizioni di a e b per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \leq 0$, compresa tra γ , a_0 e b_0 ;
- e. osservato che, nell'ipotesi posta di $\lambda > 0$, esistono due valori λ_1 e λ_2 , con $\lambda_1 < \lambda_2$, per cui il triangolo CED è equivalente al quadrato di lato OA , descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di λ , con un'approssimazione di 10^{-n} e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

Soluzione

- **Quesito n. 2**

In un piano α è assegnato il triangolo ABC , retto in B , i cui cateti AB e BC misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto A la perpendicolare al piano α e sia V un punto di questa per cui $VA = AB$.

Il candidato:

- dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro $VABC$, anche la faccia VBC è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $\widehat{VBC}$;
- calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro;
- detto M il punto medio di VA e P un punto dello stesso segmento a distanza x da V , esprima in funzione di x il volume v del tetraedro $MPQR$, essendo Q ed R le rispettive intersezioni degli spigoli VB e VC con il piano β parallelo ad α e passante per P ;
- studi come varia v al variare di P sul segmento VA , determinando in particolare la posizione $\overline{P}$ di P in cui il volume v assume valore massimo assoluto;
- detto D il punto medio di VB ed E il punto di AC tale che $AE = AB$, determini la posizione P^* di P che rende minima la somma $DP + PE$ (si consiglia di far ruotare il triangolo VAB attorno ad AV fino a portarlo nel piano del triangolo VAE , simmetricamente a quest'ultimo, e considerare la somma $D'P + PE$, essendo D' il corrispondente di D nella suddetta rotazione).

Soluzione

• Quesito n. 3

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti $P(x, y)$, $A(x', y')$, $B(x'', y'')$, $P'(X, Y)$, legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases} \quad \begin{cases} X = x'' + 2 \\ Y = y'' - 1. \end{cases}$$

Il candidato:

- dica la natura delle trasformazioni T_1 , T_2 , T_3 , rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;
- determini la trasformazione T che fa passare da P a P' ;
- studi la trasformazione T enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare, gli eventuali elementi uniti;
- considerati i punti $C(3, 0)$, $D(0, \sqrt{3})$, $E(0, -\sqrt{3})$, e detti γ la circonferenza per tali punti, a la retta CD , γ' ed a' i trasformati di γ ed a mediante T , determini l'area delle regioni finite di piano delimitate da γ' ed a' ;
- determini il perimetro delle stesse regioni.

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

La parabola

$$\gamma: y = \frac{x^2}{2} - x = \frac{x}{2}(x - 2)$$

passa evidentemente per l'origine O e per il punto $(2, 0)$. Possiede inoltre la concavità rivolta verso l'alto ed un vertice di coordinate $V(1, -\frac{1}{2})$. Ai punti $A(\lambda, 0)$ e $B(-\lambda, 0)$ con $\lambda > 0$ corrispondono su γ

$$A' \left(\lambda, \frac{\lambda^2}{2} - \lambda \right) \text{ e } B' \left(-\lambda, \frac{\lambda^2}{2} + \lambda \right):$$

il grafico è rappresentato in fig. 1.

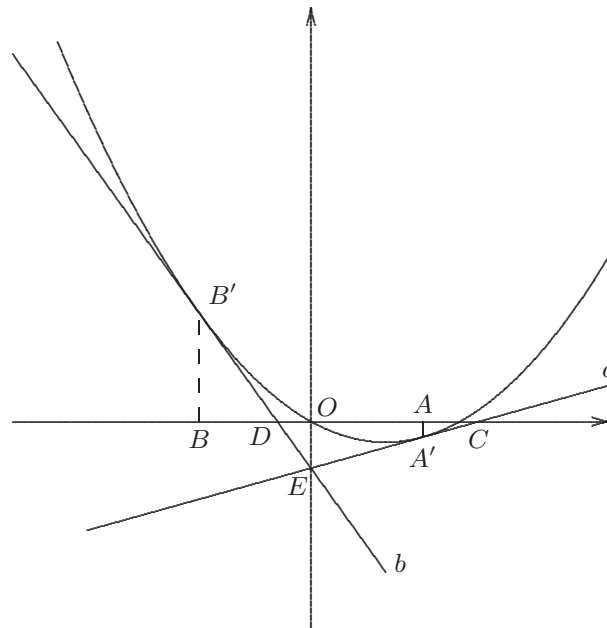


Fig. 1

a) Per determinare le tangenti a e b a γ va calcolata la sua derivata prima: $y' = x - 1$ e sostituendovi le ascisse di A e B otteniamo i coefficienti angolari

$$m_a = \lambda - 1 \quad m_b = -\lambda - 1:$$

ne seguono le equazioni delle tangenti

$$\begin{aligned} a: y - \left(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda \right) &= (\lambda - 1)(x - \lambda) \implies y = (\lambda - 1)x - \frac{\lambda^2}{2} \\ b: y - \left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda \right) &= (-\lambda - 1)(x + \lambda) \implies y = -(\lambda + 1)x - \frac{\lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

È immediato notare che $a \cap b = \{E\}$ con $E\left(0, -\frac{\lambda^2}{2}\right)$ in quanto i termini noti delle rette a e b sono uguali.

b) La determinazione di C e D si ottiene intersecando le due rette con l'asse delle ascisse ($\hat{x}$). Pertanto

$$a \cap \hat{x} = \{C\} \implies 0 = (\lambda - 1)x_C - \frac{\lambda^2}{2} \implies x_C = \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 1)} \quad \lambda \neq 1$$

cioè

$$C\left(\frac{\lambda^2}{2(\lambda - 1)}, 0\right).$$

Analogamente

$$b \cap \hat{x} = \{D\} \implies 0 = -(\lambda + 1)x_D - \frac{\lambda^2}{2} \implies x_D = -\frac{\lambda^2}{2(\lambda + 1)} \quad \lambda \neq -1$$

e

$$D\left(-\frac{\lambda^2}{2(\lambda + 1)}, 0\right).$$

L'area del triangolo $\triangle CED$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle CED) &= s = |x_C - x_D| \cdot \frac{\overline{OE}}{2} = |x_C - x_D| \cdot \frac{|y_E|}{2} \\ &= \left| \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 1)} + \frac{\lambda^2}{2(\lambda + 1)} \right| \cdot \frac{\lambda^2}{4} = \left| \frac{\lambda^4 \cdot \lambda}{4(\lambda^2 - 1)} \right| = \left| \frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} \right|. \end{aligned}$$

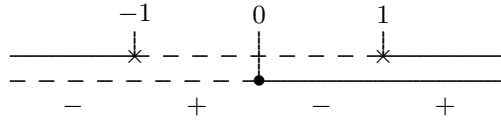
In definitiva è

$$s(\lambda) = \left| \frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} \right| \quad \text{con } \lambda > 0 \& \lambda \neq 1. \quad (1)$$

c) Dovendo studiare la funzione $s(\lambda)$ (1) conviene far uso delle tecniche per lo studio di funzioni espresse dall'equazione $y = |f(x)|$. In tal caso si deve studiare la funzione $y = f(x)$ e successivamente simmetrizzare rispetto all'asse x le parti del grafico corrispondenti alle ordinate negative. Pertanto studieremo la funzione

$$\begin{cases} y = \frac{\lambda^5}{4(\lambda^2 - 1)} \\ \lambda \in \mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \end{cases}$$

estesa nel dominio $\mathcal{D}$.

**Fig. 2**

- È immediato verificare la presenza di una simmetria dispari in quanto $f(-\lambda) = -f(\lambda)$ per $\forall \lambda \in \mathcal{D}$.
- Studio del segno: $y \geq 0$ implica l'analisi di $\lambda^5 \geq 0$ e di $\lambda^2 - 1 > 0$. La prima è soddisfatta da $\lambda \geq 0$ e la seconda da $\lambda < -1 \vee \lambda > 1$. In base alla figura riassuntiva **2** si ottiene che $y \geq 0$ quando $-1 < \lambda \leq 0 \vee \lambda > 1$.
- Limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1\pm} y = \pm\infty \quad \text{essendo} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1\pm} \lambda^2 - 1 = 0 \pm \& \lim_{\lambda \rightarrow 1\pm} \lambda^5 = 1.$$

Il limite all'infinito è invece $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} y = +\infty$ in quanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^5}{4\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^3}{4 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

con $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^3 = +\infty$ e $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 4 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = 4$.

Analogamente per $\lambda \rightarrow -1\pm$ e $\lambda \rightarrow -\infty$.

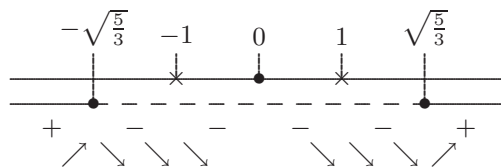
- Il calcolo della derivata prima fornisce

$$y' = \frac{1}{4} \left[\frac{5\lambda^4(\lambda^2 - 1) - 2\lambda \cdot \lambda^5}{(\lambda^2 - 1)^2} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3\lambda^6 - 5\lambda^4}{(\lambda^2 - 1)^2} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{\lambda^4(3\lambda^2 - 5)}{(\lambda^2 - 1)^2} \right]$$

e lo studio del segno di $y' \geq 0$ si riduce all'analisi dei fattori al numeratore:

$$\begin{aligned} \lambda^4 &> 0 \quad \forall \lambda \neq 0, & \lambda^4 &= 0 \quad \text{se } \lambda = 0 \\ 3\lambda^2 - 5 &\geq 0 &\iff \lambda &\leq -\sqrt{\frac{5}{3}} \vee \lambda \geq +\sqrt{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Combinati questi risultati si ottiene la fig. **3**

**Fig. 3**

che permetta di concludere con $y' > 0$ se $\lambda < -\sqrt{\frac{5}{3}} \vee \lambda > \sqrt{\frac{5}{3}}$ mentre $y' = 0$ se $\lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \vee \lambda = 0$.

■ La derivata seconda fornisce

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{4} \left[\frac{(18\lambda^5 - 20\lambda^3)(\lambda^2 - 1)^2 - 2(\lambda^2 - 1)2\lambda(3\lambda^6 - 5\lambda^4)}{(\lambda^2 - 1)^4} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{2\lambda^3(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 - 1)^4} \cdot [(9\lambda^2 - 10)(\lambda^2 - 1) - 2(3\lambda^4 - 5\lambda^2)] \right\} \\ &= \frac{\lambda^3}{2(\lambda^2 - 1)^3} (9\lambda^4 - 9\lambda^2 - 10\lambda^2 + 10 - 6\lambda^4 + 10\lambda^2) \\ &= \frac{\lambda^3(3\lambda^4 - 9\lambda^2 + 10)}{2(\lambda^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

e la condizione $y'' \geq 0$ implica

$$\begin{aligned} \lambda^3 \geq 0 &\implies \lambda \geq 0 \\ 3\lambda^4 - 9\lambda^2 + 10 > 0 &\text{ avendo } \Delta = 81 - 120 < 0 \implies \forall \lambda \in \mathcal{D} \\ (\lambda^2 - 1)^3 > 0 \quad \lambda^2 - 1 > 0 &\implies \lambda < -1 \vee \lambda > 1 \end{aligned}$$

Combinando il segno dei tre termini si ottiene la fig. 4 e il risultato che $y'' \geq 0$ quando $-1 < \lambda \leq 0 \vee \lambda > 1$. Per questi valori la funzione è convessa: $\lambda = 0$ è inoltre un punto di flesso orizzontale.

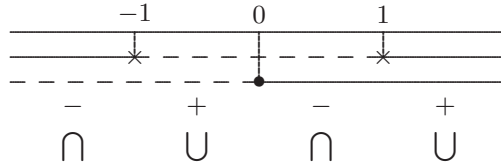


Fig. 4

Ricordando la simmetrizzazione necessaria a seguito della relazione tra la curva richiesta C e quella studiata y e cioè $C : s = s(\lambda) = |y|$, il grafico richiesto, con $\lambda > 0$ risulta quello evidenziato nella fig. 5. Si è pure calcolata l'ordinata corrispondente al punto di minimo relativo $A(\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{25}{24}\sqrt{\frac{5}{3}})$.

d) Posto $\lambda_0 = \sqrt{\frac{5}{3}}$ l'ascissa del minimo A si ottengono in corrispondenza le rette a_0 e b_0 :

$$a_0 : y = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \right) x - \frac{5}{6} \quad b_0 : y = - \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1 \right) x - \frac{5}{6}.$$

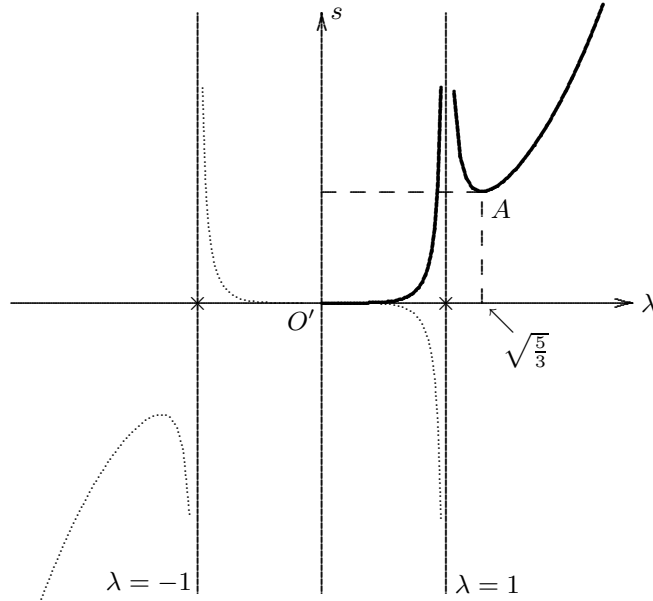


Fig. 5

Si chiede di determinare l'area evidenziata nella figura 6: quest'area è somma dell'area del triangolo $\triangle DOE$ cioè

$$\mathcal{A}(\triangle DOE) = \overline{DO} \cdot \frac{\overline{OE}}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1\right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{72 \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1\right)}$$

con quella $\mathcal{T}$ del trapezoide delimitato dall'asse y , la parabola γ e la retta a_0 . Quest'ultima si calcola facilmente tramite l'integrazione definita della differenza tra le rispettive ordinate

$$\mathcal{T} = \int_0^{\sqrt{5/3}} (y_\gamma - y_{a_0}) dx = \int_0^{\sqrt{5/3}} \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) - \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \right) x + \frac{5}{6} \right] dx.$$

Risolviamo il facile integrale indefinito

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2}{2} - x - \sqrt{\frac{5}{3}} x + x + \frac{5}{6} \right) dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} - \sqrt{\frac{5}{3}} x + \frac{5}{6} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{6} - \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6} x + c \end{aligned}$$

dal quale si ottiene

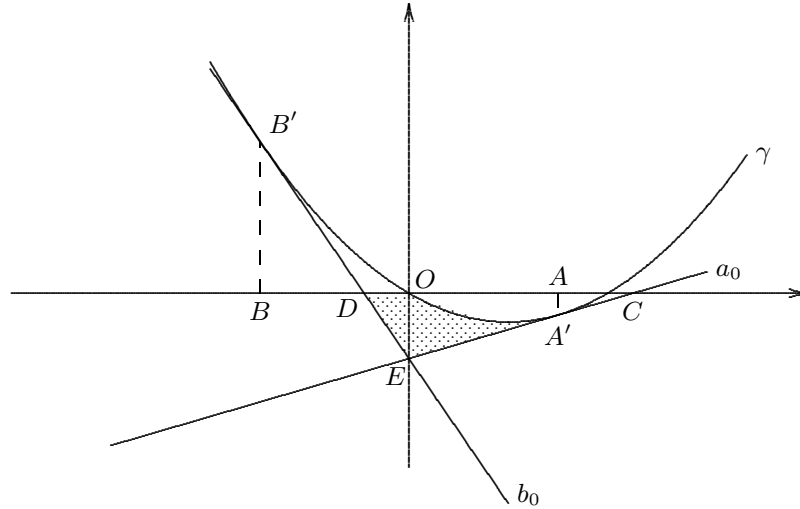


Fig. 6

$$\mathcal{T} = \left[\frac{x^3}{6} - \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x \right]_0^{\sqrt{5/3}} = \frac{5}{18}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{5}{6}\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{5}{6}\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{5}{18}\sqrt{\frac{5}{3}};$$

in definitiva l'area richiesta è

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}(\triangle DOE) + \mathcal{T} \\ &= \frac{25}{72 \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1 \right)} + \frac{5}{18}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{25}{72} \cdot \frac{\sqrt{\frac{5}{3}} - 1}{\frac{2}{3}} + \frac{5}{18}\sqrt{\frac{5}{3}} = \dots = \frac{115}{144}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{25}{48} \approx 0,51 \end{aligned}$$

e) L'equivalenza di $\triangle CED$ con il quadrato di lato OA si traduce nella condizione $\mathcal{A}(\triangle CED) = \overline{OA}^2$ che diventa algebricamente

$$\frac{\lambda^5}{4|\lambda^2 - 1|} = \lambda^2. \quad (2)$$

La precedente equazione può essere interpretata come la ricerca delle intersezioni dei grafici di $s(\lambda)$ e della parabola di equazione $y = \lambda^2$. Alternativamente la (2) può essere riscritta come $\lambda^3 = 4|\lambda^2 - 1|$ ($\lambda > 0$) che si suddivide in

$$\begin{aligned} I \left\{ \begin{array}{l} \lambda^3 = 4(\lambda^2 - 1) \\ \lambda > 1 \end{array} \right. & \quad \vee \quad II \left\{ \begin{array}{l} \lambda^3 = -4(\lambda^2 - 1) \\ 0 < \lambda < 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Interpretando i due membri della prima equazione di entrambi i sistemi come curve note, $y = \lambda^3$ è una normale cubica, mentre $y = \pm 4(\lambda^2 - 1)$ sono delle parabole la prima con la concavità positiva e l'altra negativa, appare da una analisi dei loro grafici (fig. 7) la necessità dell'esistenza, per il primo sistema, di *almeno* una intersezione con $\lambda_0 > 1$.

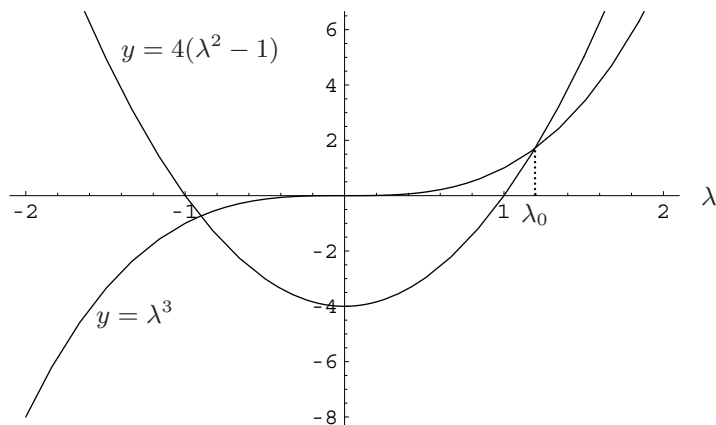


Fig. 7. Primo sistema: $\lambda > 1$.

Per il secondo sistema invece, deve certamente esistere uno e uno solo punto di intersezione di ascissa $\lambda_1 < 1$ (fig. 8).

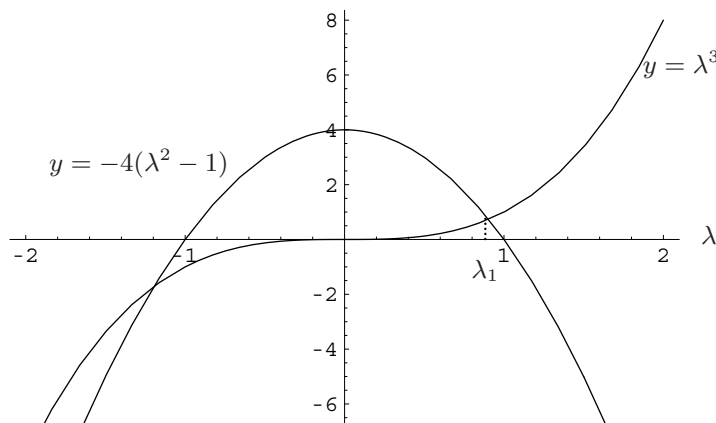


Fig. 8. Secondo sistema: $0 < \lambda < 1$.

La procedura richiesta dovrà pertanto determinare λ_1 dall'equazione $f(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4 = 0$ con $0 < \lambda_1 < 1$ e ottenuta riportando tutti i termini del II sistema a primo membro. Poiché $f(0) = -4 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, si può applicare il metodo

di bisezione. Di seguito proponiamo un programma in Turbo Pascal completo che implementa l'algoritmo di bisezione.

```

PROGRAM Bisezione;

VAR
    EstremoInf, EstremoSup,
    Precisione, Radice      : Real;
    MaxIter                 : Integer;
    Ok                      : Boolean;

(*** inizio dichiarazioni di funzioni e procedure *****)
(* modificare qui la funzione della quale si vuole la radice *)

FUNCTION Funz(x : Real): Real;
BEGIN
    Funz:=x*x*x+4*x*x-4;
END;

(*****)

PROCEDURE ImmissDati(VAR EstremoInf, EstremoSup, Precisione : Real {OUT};
                    VAR MaxIter : Integer {OUT});
BEGIN
    REPEAT
        Write('Immettere il valore dell'estremo inferiore: ');
        ReadLn(EstremoInf);
        Write('Immettere il valore dell'estremo superiore: ');
        ReadLn(EstremoSup);
        (* per applicare il metodo di bisezione la radice dev'essere compresa *)
        (* tra gli estremi dell'intervallo *)
        IF Funz(EstremoInf)*Funz(EstremoSup)>0 THEN
            WriteLn('Gli estremi devono fornire valori opposti per la funzione');
        UNTIL Funz(EstremoInf)*Funz(EstremoSup)<0;
        Write('Immettere la precisione voluta (per es. 0.00001): ');
        ReadLn(Precisione);
        Write('Immettere il numero massimo di iterazioni: ');
        ReadLn(MaxIter);
    END;

    (*****)
    (* si vuole che nell'estremo inferiore la funzione abbia valore negativo: *)
    (* viceversa si dovrebbero modificare le assegnazioni *)
    (* EstremoInf:=ValoreMedio e EstremoSup:=ValoreMedio nella procedura *)
    (* CalcolaRadice *)

PROCEDURE ScambioEstremi(VAR EstremoInf, EstremoSup : Real {IN, OUT});
VAR
    Tmp : Real;
BEGIN
    IF (Funz(EstremoInf)>0) AND (Funz(EstremoSup)<0) THEN BEGIN
        Tmp:= EstremoInf;
        EstremoInf:= EstremoSup;
        EstremoSup:=Tmp;
    END;
END;

```

```

(*****)
PROCEDURE CalcolaRadice(EstremoInf, EstremoSup : Real      {IN};
                        MaxIter      : Integer {IN};
                        Precisione    : Real      {IN};
                        VAR Radice    : Real      {OUT};
                        VAR Ok        : Boolean {OUT});

VAR
  ValoreMedio, Delta : Real;
  i                 : Integer;

BEGIN
  i:=0;
  Ok:=False;
  Delta:=Abs(EstremoSup-EstremoInf);
  WHILE (i<=MaxIter) AND (Delta>=Precisione) AND (Ok=False) DO BEGIN
    i:= i + 1;
    ValoreMedio:=(EstremoInf+EstremoSup)/2;
    (* nel caso si trovi esattamente la radice *)
    IF ValoreMedio=0 THEN BEGIN
      Ok:=True;
      Radice:=ValoreMedio;
    END
    ELSE IF Funz(ValoreMedio)<0 THEN EstremoInf:=ValoreMedio
      ELSE EstremoSup:=ValoreMedio;
    Delta:=Abs(EstremoSup-EstremoInf);
  END;
  IF Delta<Precisione THEN BEGIN
    Radice:=ValoreMedio;
    Ok:= True;
  END;
  (* negli altri casi e' sempre Ok=false *)
END;

(*****)

PROCEDURE Esito(Radice : Real; Ok : Boolean);
BEGIN
  IF Ok=True THEN WriteLn('La radice risulta x= ',Radice:15:10)
  ELSE WriteLn('Non e'' possibile ottenere la precisione richiesta in ',
              MaxIter,' iterazioni');
END;

(** inizio corpo programma *****)

BEGIN
  ImmissDati(EstremoInf, EstremoSup, Precisione, MaxIter);
  ScambioEstremi(EstremoInf, EstremoSup);
  CalcolaRadice(EstremoInf, EstremoSup, MaxIter, Precisione, Radice, Ok);
  Esito(Radice, Ok);
END.

(***** fine programma **)

```

La procedura richiesta dal testo è comunque solo **CalcolaRadice**. A questa vengono forniti in input gli estremi '**EstremoInf**' ed **EstremoSup**' dell'intervallo contenente la radice, il numero massimo di iterazioni '**MaxIter**' e la precisione desiderata '**Precisione**': fornirà in output invece la radice nel caso di esito positivo oppure traccia dell'esito negativo.

La procedura, dopo aver inizializzato le variabili '**i**' che tiene conto del numero di cicli, '**Ok**' che memorizza l'esito positivo o meno della ricerca della radice, '**Delta**' che definisce l'ampiezza (variabile) dell'intervallo durante la ricerca, entra in un ciclo **WHILE**. Qui viene calcolato il valore centrale dell'intervallo e il corrispondente valore della funzione. Se questo è nullo la radice è stata trovata e si esce dalla ciclo e dalla procedura, se invece è negativo si ridefinisce l'estremo inferiore dell'intervallo facendolo coincidere con il valore medio: avviene il viceversa se il valore della funzione è positivo.

Si calcola infine l'ampiezza del nuovo intervallo così ottenuto e il ciclo inizia nuovamente. Questo avrà termine solo se viene raggiunto il numero massimo di iterazioni richieste oppure se l'ampiezza dell'intervallo diventa inferiore della precisione richiesta.

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

a) In riferimento alla figura 1 procediamo alla sua soluzione attraverso tre diversi metodi: il primo si basa sulla geometria sintetica.

Poiché BC risulta, per il teorema delle 3 perpendicolari, perpendicolare al piano individuato da A , B e V , ne segue che esso è pure perpendicolare ad ogni retta giacente in tale piano e in particolare a VB : si conclude pertanto che è pure $\angle VBC = \frac{\pi}{2}$.

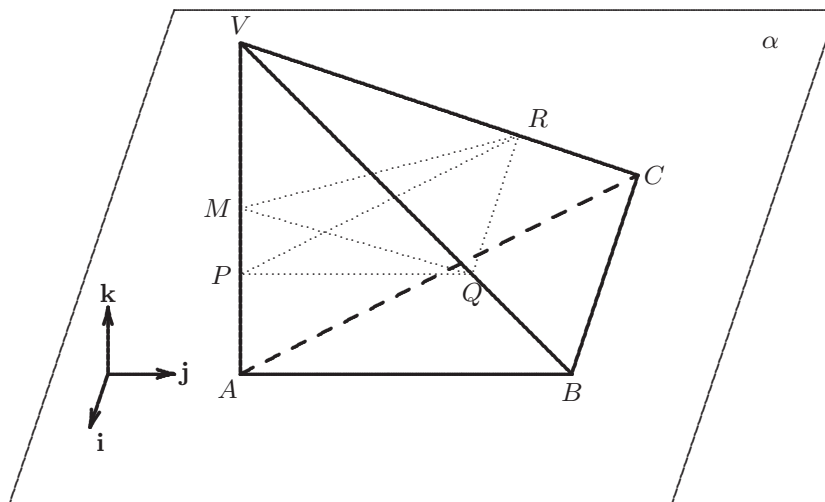


Fig. 1

In modo alternativo, giungiamo alla medesima conclusione con metodi algebrici. Dai dati del problema $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$, $\angle ABC = \angle BAV = \frac{\pi}{2}$, $\overline{VA} = \overline{AB}$, si ricava immediatamente $\overline{AC} = \sqrt{16+9} = 5$ e $\overline{VA} = 4$. Ne segue che

$$\overline{VB}^2 = \overline{VA}^2 + \overline{AB}^2 = 16 + 16 = 32; \quad \overline{VC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{VA}^2 = 25 + 16 = 41.$$

Poiché vale il teorema di Pitagora in quanto $\overline{VB}^2 + \overline{BC}^2 = 32 + 9 = 41 = \overline{VC}^2$ ne discende pure $\angle VBC = \frac{\pi}{2}$.

Infine, risolviamo il medesimo quesito utilizzando i metodi vettoriali. Introdotto un sistema ortonormale di versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (fig. 1), è $\overrightarrow{AB} = 4\mathbf{j}$, $\overrightarrow{VA} = -4\mathbf{k}$, $\overrightarrow{BC} = -3\mathbf{i}$ da cui $\overrightarrow{VB} = \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{AB} = -4\mathbf{k} + 4\mathbf{j} = 4(\mathbf{j} - \mathbf{k})$ e poiché il prodotto scalare di $\overrightarrow{VB}$ con $\overrightarrow{BC}$ risulta nullo

$$\overrightarrow{VB} \times \overrightarrow{BC} = 4(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i}) = -12[\mathbf{j} \times \mathbf{i} - \mathbf{k} \times \mathbf{i}] = -12(0 - 0) = 0,$$

in base alla proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma e alla perpendicolarità reciproca dei versori di base, discende ancora la perpendicolarità richiesta.

b) Immediato è pure il calcolo del volume e della superficie totale del tetraedro: risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{A}(\triangle ABC) \cdot \frac{\overline{VA}}{3} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 8 \\ \mathcal{S}_{\text{tot}} &= \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle ABV) + \mathcal{A}(\triangle ACV) + \mathcal{A}(\triangle BCV) \\ &= 6 + \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 + 6\sqrt{2} = 6(4 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

c) Sia $\overline{VP} = x$ (fig. 1) con $0 \leq x \leq 4$. Per la similitudine dei triangoli $\triangle VPQ \sim \triangle VAB$ nonché di $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ discende

$$\overline{VP} = \overline{PQ} = x \quad \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \implies \quad \overline{QR} = \frac{3}{4}x.$$

Poiché $\overline{MP} = |2 - x|$ il volume del tetraedro $MPQR$ è

$$\begin{cases} \mathcal{V}(MPQR) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\triangle PQR) \cdot \overline{MP} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x \cdot x \right) \cdot |2 - x| = \frac{1}{8}x^2|2 - x| \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Per $x = 0$ è $\mathcal{V} = 0$ com'è intuibile geometricamente, mentre per $x = 4$ vale $\mathcal{V} = 4$.

d) La funzione volume $\mathcal{V}$ da studiare è

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \frac{1}{8}x^2|2-x| \\ 0 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Dal punto di vista geometrico, la determinazione del massimo di $\mathcal{V}$ è immediata in quanto questo non potrà che assumere il valore estremo massimo quando $P \equiv A$. Difatti in tale situazione assumono il loro valore massimo sia il segmento $\overline{MP}$ che l'area di $\triangle PQR$, entrambi fattori che contribuiscono al volume $\mathcal{V}$.

Poiché però è richiesto pure lo studio della variazione di $\mathcal{V}$ in funzione di x , conviene notare che

$$\mathcal{V} = \frac{1}{8}x^2|2-x| = \frac{1}{8}|x^2(2-x)| = |y(x)| :$$

È pertanto possibile studiare innanzitutto la cubica

$$y(x) = \frac{1}{8}x^2(2-x) \quad (3)$$

e da questa risalire al grafico di $\mathcal{V}$. L'equazione della cubica mette in evidenza che questa incontra l'asse x nell'origine e nel punto di ascissa $x = 2$. Poiché $x = 0$ è radice di molteplicità due, nell'origine la cubica è pure tangente ad $\hat{x}$. Inoltre essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$$

possiamo già tracciare il grafico di y . Il grafico di $\mathcal{V} = |y|$ risulta dalla simmetrizzazione rispetto all'asse x della parte negativa di y compresa nell'intervallo $]2, 4[$ (fig. 2).

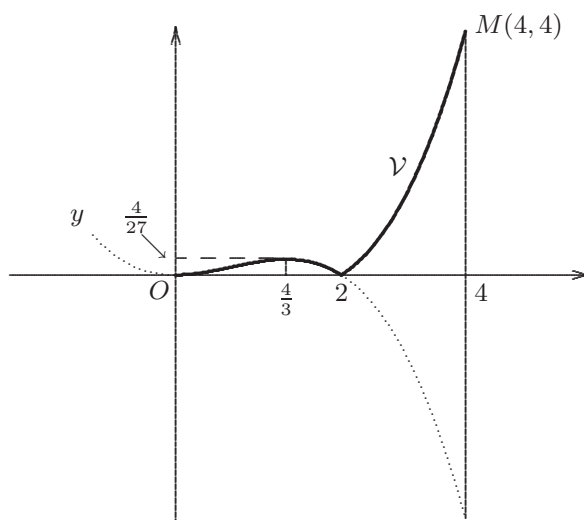


Fig. 2 (proporzioni non mantenute)

Come conferma di quanto già **previsto** geometricamente, conviene confrontare il valore del massimo relativo con il valore assunto all'estremo $\mathcal{V}(4) = 4$.

Pertanto da $y' = \frac{1}{8}(4x - 3x^2) \geq 0$ si ottiene $x(4 - 3x) \geq 0$ che possiede le soluzioni $[0, \frac{4}{3}]$.

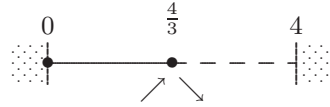


Fig. 3

L'ascissa dell'estremo relativo corrisponde a $x_{max} = \frac{4}{3}$ e in corrispondenza il volume risulta

$$\mathcal{V}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{8} \left(\frac{16}{9}\right) \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27} < \mathcal{V}(4).$$

Il massimo assoluto è raggiunto in corrispondenza di $x = 4$ e la posizione $\overline{P}$ cercata è $\overline{P} \equiv V$.

e) Seguendo il suggerimento del testo, la figura tridimensionale originaria (fig. 4)

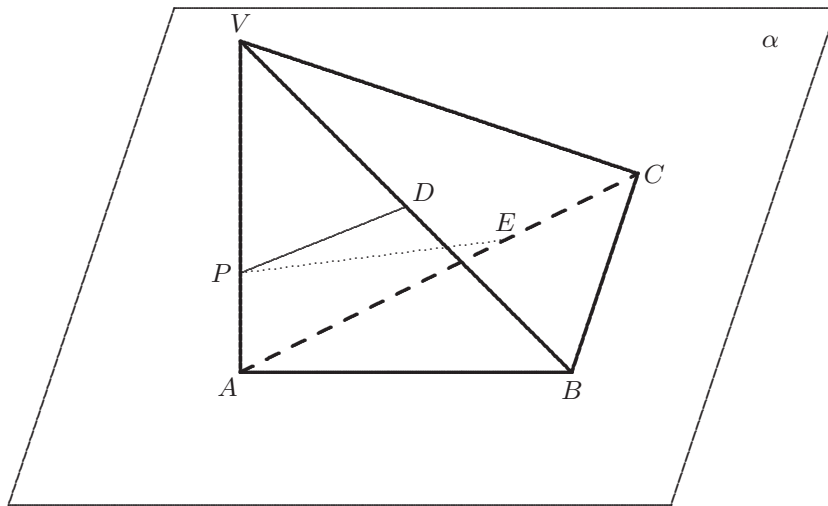


Fig. 4

assume l'aspetto di fig. 5 nel piano.

Dovendo essere $t = \overline{PD} + \overline{PE}$, dopo la trasformazione potremo considerare la somma t espressa dalla $t = \overline{PD'} + \overline{PE}$. Diventa ora possibile proporre una discussione sintetica del problema. Difatti il minimo della somma t sarà raggiunto

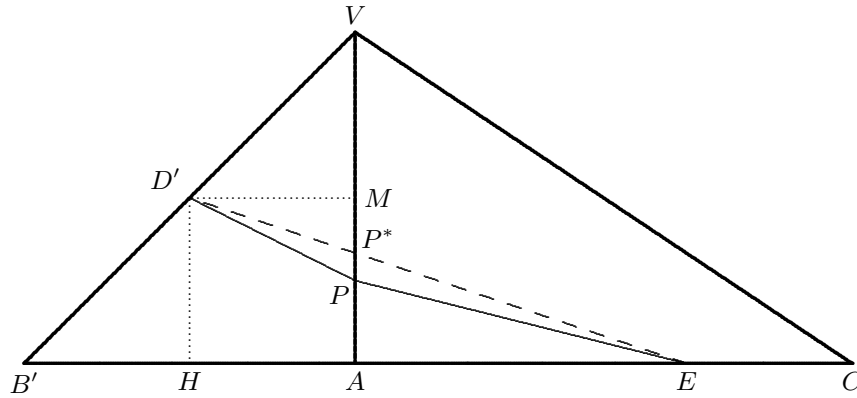


Fig. 5

quando P è allineato con i punti D' e E . In tutti gli altri casi per la disuguaglianza triangolare risulta $\overline{D'P} + \overline{PE} > \overline{D'E}$.

Per determinare $\overline{VP}$ è sufficiente quindi notare la similitudine di $\triangle D'HE \sim \triangle AP^*E$ cioè

$$\frac{\overline{D'H}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{AP^*}}{\overline{AE}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AP^*} = \frac{2 \cdot 4}{(4 + 2)} = \frac{4}{3}.$$

Ne risulta $\overline{VP} = \overline{VA} - \overline{AP^*} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

a) Le trasformazioni proposte dal quesito sono

$$t_1 : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \quad t_2 : \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases} \quad t_3 : \begin{cases} X = x'' + 2 \\ Y = y'' - 1 \end{cases}$$

che possono essere sintetizzate formalmente come

$$P(x, y) \xrightarrow{t_1} A(x', y') \xrightarrow{t_2} B(x'', y'') \xrightarrow{t_3} P'(X, Y).$$

La trasformazione t_1 rappresenta una particolare dilatazione di rapporto 2, sia lungo l'asse x che per l'asse y . Essa rientra nella forma generale

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky, \end{cases}$$

che descrive le omotetie di centro $(0, 0)$ e rapporto k : nel nostro caso il rapporto vale appunto 2.

t_2 rientra invece nelle rotazioni di centro O e angolo α e descritte dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

Difatti, posto $\alpha = \frac{\pi}{2}$ discende

$$\begin{cases} x' = 0 - y = -y \\ y' = x + 0 = x \end{cases} \quad \text{che coincide con } t_2.$$

t_3 infine, è evidentemente una traslazione di vettore $\mathbf{v}(2, -1)$.

b) Il quesito chiede di determinare la trasformazione $T = t_3 \circ t_2 \circ t_1$ che associa P a P' (si noti l'ordine delle trasformazioni: prima agisce t_1 su P , poi t_2 e infine t_3). Per determinare le rispettive equazioni rappresentative è sufficiente partire dalle equazioni di t_3

$$\begin{cases} X = x'' + 2 \\ Y = y'' - 1 \end{cases}$$

e sostituire al II membro le equazioni di t_2

$$\begin{cases} X = (-y') + 2 \\ Y = (x') - 1 \end{cases}$$

e successivamente quelle di t_1

$$\begin{cases} X = (-2y) + 2 = -2y + 2 \\ Y = (2x) - 1 = 2x - 1. \end{cases}$$

La trasformazione T è pertanto descritta dalle equazioni

$$T : P(x, y) \longrightarrow P'(X, Y) \quad T : \begin{cases} X = -2y + 2 \\ Y = 2x - 1. \end{cases}$$

c) La composizione di una omotetia con una rotazione seguita da una traslazione fornisce una similitudine: difatti riscritta la T come

$$\begin{cases} X = 0 - 2y + 2 \\ Y = 2x + 0 - 1 \end{cases}$$

è facile notare come questa rientri nella espressione generale delle similitudini di rapporto $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\sigma : \begin{cases} x' = ax \pm by + c \\ y' = bx \mp ay + d : \end{cases}$$

nel nostro caso è $k = 2$.

Gli eventuali punti uniti si determinano imponendo che $T : (x, y) \rightarrow (x, y)$ ossia che $(X, Y) \equiv (x, y)$: ne segue il sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \implies y = 2(-2y + 2) - 1 \implies y = \frac{3}{5} \quad x = \frac{4}{5}.$$

Esiste pertanto un unico punto unito, $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

d) Tracciata la figura 1 rappresentativa della circonferenza γ per C, D, E e della retta a per C e D ,

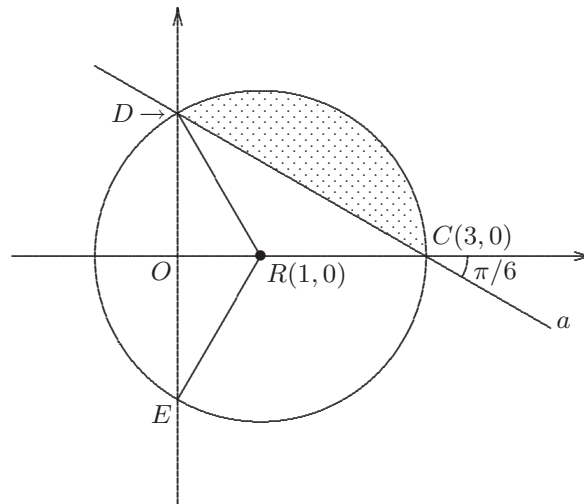


Fig. 1

l'equazione della retta a dovrà essere del tipo $y = m_{CD}x + \sqrt{3}$ dovendo passare per $D(0, \sqrt{3})$. Facilmente si ricava il coefficiente angolare $m_{CD} = \sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$ che implica un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ tra la retta a e il semiasse positivo delle x . Il triangolo $\triangle ECD$ è pertanto equilatero e quindi $\overline{OR} = \overline{OD} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1$. Il raggio della circonferenza γ misura quindi $\overline{RC} = 3 - 1 = 2$ e l'equazione di γ risulta

$$\gamma : (x - 1)^2 + y^2 = 4.$$

Ricordando che il rapporto di similitudine è $k = 2$, sappiamo dalla teoria che le aree ($\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}$) di figure simili stanno nel rapporto $\mathcal{A}' = k^2 \mathcal{A}$: nel nostro caso, posto per brevità $\mathcal{A}(\text{seg.circ.}CD) = \mathcal{A}$ l'area del segmento circolare tratteggiato in fig. 1 e $\mathcal{A}(\text{seg.circ.}C'D') = \mathcal{A}'$ l'area del segmento circolare trasformato mediante T , è $\mathcal{A}' = 4\mathcal{A}$. Analogamente per i segmenti DEC e il trasformato $D'E'C'$.

Ne segue che le aree richieste si ottengono semplicemente determinando le aree dei due segmenti in cui è divisa da a la circonferenza γ . Per il primo è

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\text{settore}DRC) - (\triangle DRC) :$$

poiché $\angle DRC = \frac{2}{3}\pi$ risulta $\mathcal{A}(\text{settore } DRC) = \frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2) = \frac{4}{3}\pi$, $\mathcal{A}(\triangle DRC) = \frac{\overline{RC} \cdot \overline{OD}}{2} = \sqrt{3}$. Ne segue $\mathcal{A} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ e il trasformato

$$\mathcal{A}' = 4 \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right).$$

Per l'altro invece

$$\mathcal{A}(\text{seg.circ } DEC) = 4\pi - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right) = \frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}$$

che implica per il trasformato

$$\mathcal{A}(\text{seg.circ } D'E'C') = 4 \left(\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3} \right).$$

Metodi alternativi. Volendo procedere con le curve trasformate, esplicitata la trasformazione T^{-1}

$$T^{-1} : \begin{cases} y = 1 - \frac{X}{2} \\ x = \frac{Y+1}{2} \end{cases}$$

e sostituite le due espressioni di x e y nelle equazioni di a e γ si ottengono le equazioni delle curve trasformate a' , γ' :

$$a' : 1 - \frac{X}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{Y+1}{2} \right) + \sqrt{3} \quad 2 - X = -\frac{1}{\sqrt{3}}Y - \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$$

che implica $a' : Y = \sqrt{3}X - 2\sqrt{3} + 5$; analogamente

$$\gamma' : \left(\frac{Y+1}{2} - 1 \right)^2 + \left(1 - \frac{X}{2} \right)^2 = 4 \quad (Y-1)^2 + (2-X)^2 = 16.$$

Quest'ultima equazione rappresenta evidentemente una circonferenza di centro $R'(2, 1)$ e raggio 4. I punti di intersezione di a' e γ' sono ovviamente le immagini secondo T dei punti C e D ossia $C'(2, 5)$ e $D'(2 - 2\sqrt{3}, -1)$ (l'immagine E' di E risulta analogamente $E'(2 + 2\sqrt{3}, -1)$). La nuova rappresentazione grafica è riassunta dalla fig. 2.

Poiché il coefficiente angolare della retta $D'R'$ è

$$m_{D'R'} = \frac{1 - (-1)}{2 - 2 + 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

l'angolo β di figura risulta $\beta = \frac{\pi}{6}$ e di conseguenza $\angle D'R'C' = \frac{2}{3}\pi$. Si può pertanto determinare l'area del settore circolare $D'R'C'$ (che si trova essere pari

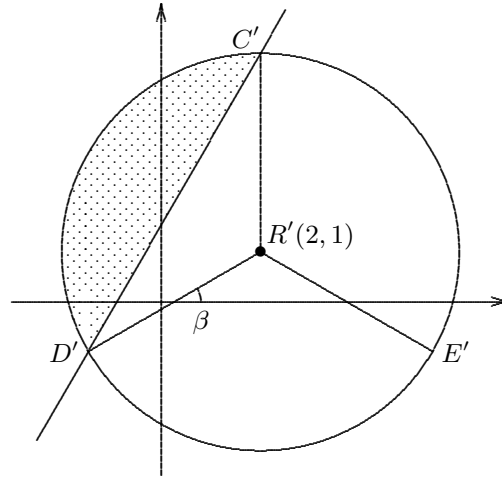


Fig. 2

a $\frac{16}{3}\pi$) e da questa, sottraendo l'area di $\triangle D'R'C'$, determinare l'area del segmento richiesto. Infine, per sottrazione l'area dell'altro.

e) Per la determinazione dei perimetri si procede tenendo presente sempre il rapporto tra le lunghezze trasformate e quelle originarie. Allora essendo la lunghezza dell'arco minore CD pari a $l(CD) = \angle DRC \cdot \overline{RC} = \frac{2}{3}\pi \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi$ e $\overline{DC} = 2\overline{RC} \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$, si ottiene

$$2p(\text{seg.circ.}CD) = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

mentre per il trasformato

$$2p(\text{seg.circ.}C'D') = 2 \left(\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} \right) = 4 \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right).$$

Analogamente per l'altro segmento circolare:

$$2p(\text{seg.circ.}DEC) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2 + 2\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

$$2p(\text{seg.circ.}D'E'C') = 2 \left(\frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3} \right) = 4 \left(\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} \right).$$

MATURITÀ '00

Il candidato svolga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

• Quesito n. 1

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x) dx = -5. \quad [1]$$

a) Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_0^1 f(2x) dx,$$

dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

- b) Posto: $f(x) = ax^3 + bx + c$, dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1].
- c) Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed uno solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.
- d) Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata -4 .
- e) Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

Soluzione

• Quesito n. 2

Il rettangolo $ABCD$ è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD , lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a .

- a) Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.
- b) Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $2/\sqrt{13}$. Calcolare il volume della piramide di vertice V e base $ABCD$.

- c) Condotta il piano α parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.
- d) Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui $x = a/2$.

Soluzione

• **Quesito n. 3**

Il candidato dimostri i seguenti enunciati.

- a) Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
- b) Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è raggio della sfera.
- c) Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

Soluzione

Quesito n. 1: soluzione. (testo del quesito)

- a) Ricordando la proprietà additiva dell'integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

valida tanto nel caso in cui c sia un punto dell'intervallo $[a, b]$ quanto nel caso in cui c sia esterno ad $[a, b]$, dalle condizioni [1] proposte dal testo

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x) dx = -5. \quad (1)$$

si può scrivere che

$$\int_0^2 f(x) dx = -5 = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

e sapendo che il primo addendo dell'ultimo membro vale 2, si deduce pure

$$\int_1^2 f(x) dx = -5 - 2 = -7. \quad (2)$$

Riscrivendo l'integrale

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

in termini della nuova variabile $t = \frac{x}{2}$ ossia $x = 2t$ e $dx = 2 dt$, gli estremi si modificano $t_1 = 0/2 = 0$ e $t_2 = 1/2$ per cui

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \cdot 2 dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt.$$

Quest'ultima non coincide con nessuna delle condizioni fornite dal testo né con la (2) e pertanto non è possibile calcolarne il valore.

Per il secondo integrale delle fornito dal testo

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx,$$

il medesimo cambio di variabile implica

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 f(t) \cdot 2 dt = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot 2 = 4$$

e quindi si può rispondere positivamente al quesito. Analogamente per il terzo discende

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_1^2 f(t) \cdot 2 dt = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \cdot (-7) = -14.$$

Il quarto con la sostituzione $t = 2x$, $dx = \frac{1}{2} dt$ diviene

$$\int_0^1 f(2x) dx = \int_0^2 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot (-5) = -\frac{5}{2}$$

pure calcolabile.

b) Posto $y = ax^3 + bx + c$ le condizioni (1) si riscrivono

$$\int_0^1 (ax^3 + bx + c) dx = 2 \quad \int_0^2 (ax^3 + bx + c) dx = -5$$

e una loro integrazione immediata implica

$$\left[a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^2}{2} + cx \right]_0^1 = 2 \quad \left[a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^2}{2} + cx \right]_0^2 = -5$$

ossia

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 2 \quad \& \quad 4a + 2b + 2c = -5.$$

Considerando a come il parametro conosciuto le precedenti si riducono al sistema lineare

$$\begin{cases} 2b + 4c = 8 - a \\ 2b + 2c = -5 - 4a \end{cases}$$

che possiede le soluzioni

$$b = -9 - \frac{7}{2}a \quad \& \quad c = \frac{13}{2} + \frac{3}{2}a.$$

Il fascio di curve ottenuto è rappresentato dall'equazione parametrica

$$y = ax^3 - \left(9 + \frac{7}{2}a\right)x + \frac{3}{2}a + \frac{13}{2}. \quad (3)$$

c) L'equazione (3) descrive un fascio di parabole cubiche, curve note dotate di un unico punto di flesso determinabile per mezzo della derivata seconda. Così si ha

$$y' = 3ax^2 - 9 - \frac{7}{2}a \quad y'' = 6ax$$

e quest'ultima si annulla, indipendentemente dal valore di $a \neq 0$ in $x = 0$. Per assicurarci che questo valore corrisponda ad un punto di flesso si calcola la $y'(0) = -9 - (7/2)a$ e poiché questa risulta diversa da 0 il punto

$$A\left(0, \frac{3}{2}a + \frac{13}{2}\right)$$

è di flesso per tutte le curve del fascio.

Ricordando che una simmetria centrale di centro (a, b) è descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

nel nostro caso queste si riscrivono

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + 3a + 13 \end{cases} \quad \text{e le inverse} \quad \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' + 3a + 13. \end{cases}$$

Sostituendo queste ultime nell'equazione del fascio (3),

$$-y' + 3a + 13 = -ax'^3 + \left(9 + \frac{7}{2}a\right)x' + \frac{3}{2}a + \frac{13}{2}$$

si deduce facilmente

$$y' = ax'^3 - \left(9 + \frac{7}{2}a\right)x' + \frac{3}{2}a + \frac{13}{2}$$

che dimostra la tesi, ossia l'invarianza dell'equazione del fascio per trasformazioni di simmetria centrale di centro A .

d) Per determinare la curva del fascio (3) che possiede il flesso nel punto di ordinata 4 è sufficiente imporre che $y_A = -4$ cioè

$$\frac{13}{2} + \frac{3}{2}a = -4 \implies a = -7.$$

Di conseguenza la curva richiesta possiede equazione $y = -7x^3 + \frac{31}{2}x - 4$.

e) Per determinare le curve che possiedono punti estremanti la y' (che è espressa da un polinomio di II grado) deve potersi annullare in modo da cambiare il proprio segno in almeno due punti distinti. Poiché $y' = 3ax^2 - 9 - \frac{7}{2}a$, imponendo che l'equazione $y' = 0$ possieda due soluzioni distinte discende

$$\Delta = -4 \cdot 3a \left(-9 - \frac{7}{2}a \right) > 0 \quad \text{da cui le soluzioni} \quad a < -\frac{18}{7} \vee a > 0.$$

Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

a) Disegnato il rettangolo $ABCD$ siano M ed N i punti medi rispettivamente di AB e CD ($\overline{AB} = \overline{CD} = a$). Pertanto $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{CN} = \overline{ND} = a/2$.

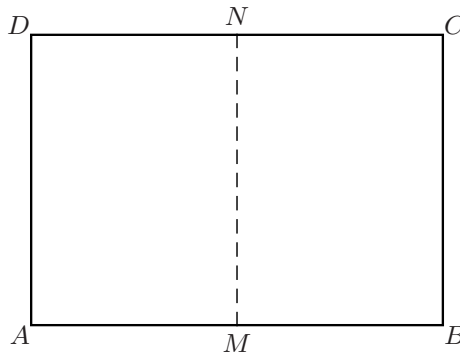
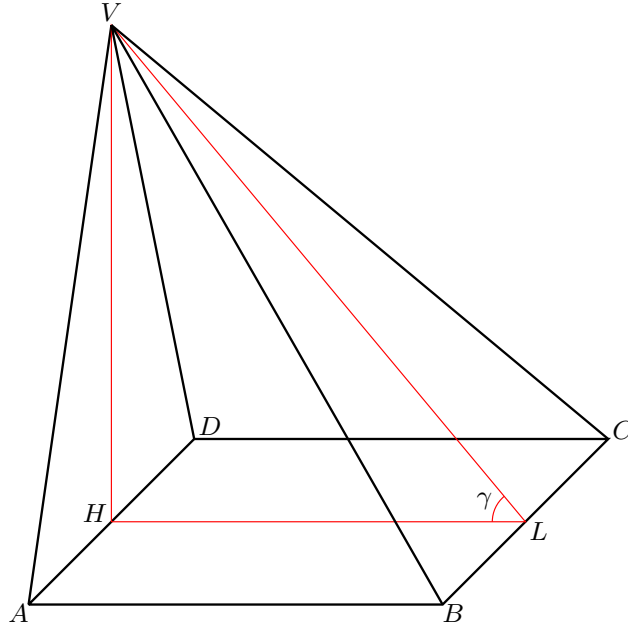


Fig. 1. Rettangolo $ABCD$.

Per determinare la lunghezza dei lati minori è sufficiente impostare una semplice proporzione data la similitudine esistente tra $ABCD$ e $AMND$: difatti

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$$

dalla quale discende $\overline{AD}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AB} = a \cdot \frac{a}{2}$. Si ottiene in definitiva $\overline{AD} = a/\sqrt{2}$.

Fig. 2. Piramide $ABCDV$.

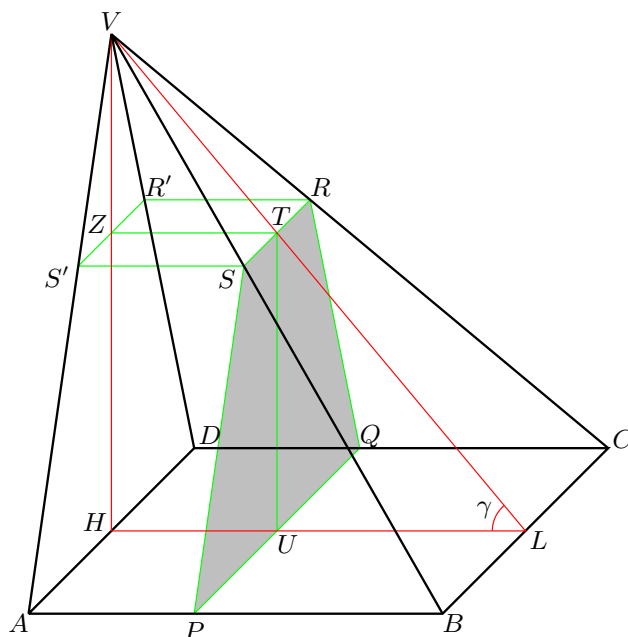
b) Costruita la fig. 2, con H ed L i punti medi rispettivamente di AD e BC e $\gamma = \angle HLC$ si ha che, per determinare il volume della piramide, è necessario conoscere l'altezza $\overline{VH}$. Pertanto se $\operatorname{tg} \gamma = \overline{VH}/\overline{HL}$ e quindi $\overline{VH} = \overline{HL} \operatorname{tg} \gamma = a \operatorname{tg} \gamma$ non rimane che esprimere la $\operatorname{tg} \gamma$ in termini di $\cos \gamma$. Così sapendo che $\operatorname{tg} \gamma = \sin \gamma / \cos \gamma$ discende

$$\overline{VH} = a \operatorname{tg} \gamma = a \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}}{\cos \gamma} = a \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{13}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)}$$

dalla quale si ottiene $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{2}$ e $\overline{VH} = \frac{3}{2}a$. Il volume della piramide $ABCDV$ è quindi

$$\mathcal{V}(ABCDV) = \frac{1}{3} \mathcal{A}(ABCD) \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3} \left(a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{3}{2}a = \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}.$$

c) Sezioniamo la fig. 2 con il piano α parallelo alla faccia ADV della piramide ottenendo la fig. 3 (dev'essere $0 < x < a$). La figura sezione $PQRS$ è un trapezio isoscele di altezza TU e basi PQ e SR . Per determinare $\overline{TU}$ si noti che del triangolo rettangolo $\triangle TUL$ si conosce l'angolo γ e la base $\overline{UL} = \overline{HL} - \overline{HU} = a - x$ e $\overline{HU} = \overline{AP} = x$. Pertanto


$$\frac{\overline{TU}}{\overline{UL}} = \operatorname{tg} \gamma \quad \frac{\overline{TU}}{a-x} = \frac{3}{2}a \quad \overline{TU} = \frac{3}{2}(a-x).$$
$$\frac{\overline{S'R'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{ZT}}{\overline{AB}} \quad \frac{\overline{S'R'}}{(a/\sqrt{2})} = \frac{x}{a} \quad \overline{SR} = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(PQRS) &= \frac{1}{2} (\overline{PQ} + \overline{SR}) \cdot \overline{TU} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{3}{2}(a-x) \\ &= \frac{3}{4\sqrt{2}}(a^2 - x^2) = \frac{3\sqrt{2}}{8}(a^2 - x^2) \quad \text{con} \quad 0 < x < a.\end{aligned}$$

d) La piramide $ABCDV$, della quale si è già ottenuto il **volume** $\mathcal{V}(ABCDV) = \sqrt{2}a^3/4$, si può pensare suddivisa dal piano α in 3 solidi costituenti rispettiva-

mente una piramide di vertici $S'SRR'V$, un prisma di basi $ADR'S'$ e $PQRS$ ed altezza AP e un poliedro di vertici $PBCQRS$: scriveremo pertanto

$$\mathcal{V}(ABCDV) = \mathcal{V}(S'SRR'V) + \mathcal{V}(\text{prisma}) + \mathcal{V}(\text{poliedro}). \quad (4)$$

I volumi dei primi due solidi si ottengono facilmente e la loro somma fornisce il volume di una delle due parti in cui il piano α suddivide la piramide originaria. Il volume dell'altra parte cioè del poliedro si potrà ottenere per differenza utilizzando la (4)

Sostituendo la condizione particolare del testo $x = \frac{a}{2}$ nelle relazioni già trovate si ottiene

$$\overline{SR} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \quad \overline{VZ} = \frac{3}{4}a \quad \mathcal{A}(PQRS) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \left(a^2 - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{32} a^2.$$

Per i volumi dei due costituenti la prima sezione solida (di volume $\mathcal{V}_1$) si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(S'SRR'V) &= \frac{1}{3} \overline{VZ} \cdot \mathcal{A}(S'SRR') = \frac{1}{3} \overline{VZ} \cdot (\overline{SS'} \cdot \overline{SR}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{32} a^3 \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}(\text{prisma}) = \mathcal{A}(PQRS) \cdot \overline{AP} = \frac{9\sqrt{2}}{32} a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{64} a^3$$

per cui si ottiene

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}(S'SRR'V) + \mathcal{V}(\text{prisma}) = \frac{\sqrt{2}}{32} a^3 + \frac{9\sqrt{2}}{64} a^3 = \frac{11\sqrt{2}}{64} a^3.$$

Infine per la (4), il volume $\mathcal{V}(\text{poliedro})$ della parte rimanente si calcola dalla differenza

$$\mathcal{V}(\text{poliedro}) = \mathcal{V}(ABCDV) - \mathcal{V}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} a^3 - \frac{11\sqrt{2}}{64} a^3 = \frac{5\sqrt{2}}{64} a^3.$$

Quesito n. 3: soluzione. (testo del quesito)

a) Poiché l'ipotenusa dev'essere ritenuta assegnata possiamo considerare il triangolo ABC come inscritto in una semicirconferenza di diametro pari ad essa per esempio $\overline{AB} = 2r$ (vedi fig. 1), e dimostriamo la tesi con deduzioni sintetiche di geometria elementare.

La risposta al quesito è in tal caso immediata in quanto l'area di $\triangle ABC$ è data dal semiprodotto di $\overline{AB}$ con l'altezza $\overline{CH}$: poiché $\overline{AB}$ è costante assegnata, l'area raggiunge il massimo in corrispondenza del valore massimo dell'altezza CH ossia

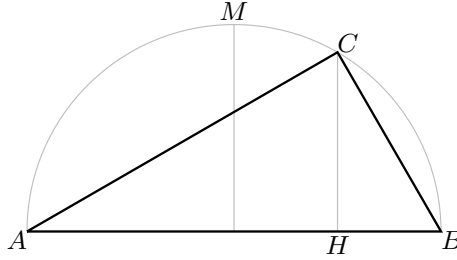


Fig. 1. Triangolo ABC con ipotenusa assegnata.

quando $C \equiv M$ e $\overline{CH} = r$, con M punto medio della semicirconferenza. In questa situazione risulta pure $\overline{BC} = \overline{AC}$ e il $\triangle ABC$ è isoscele.

b) La figura 2 rappresenta la situazione geometrica in sezione: si è posto oltre al vertice V del cono di diametro di base AB , C centro della sfera, S piede dell'altezza del cono e Q proiezione di C sulla faccia laterale del cono (lato VB di $\triangle ABV$). Sappiamo pure che $\overline{CQ} = r$.

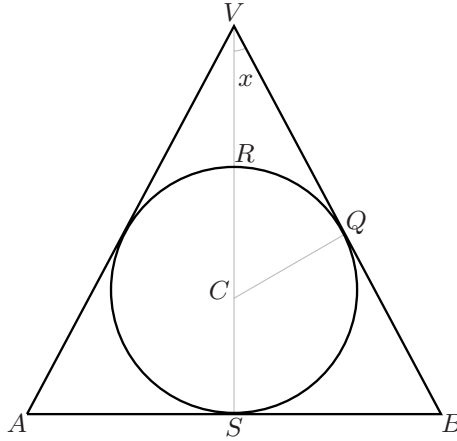


Fig. 2. Sezione del cono e della sfera di raggio r .

Per determinare l'area laterale del cono necessitano il raggio di base $\overline{SB}$ e la lunghezza dell'apotema $\overline{VB}$. A tal fine, posto $x = \angle SVB$ con le limitazioni $0 < x < \frac{\pi}{2}$ si ha che

$$\sin x = \frac{\overline{CQ}}{\overline{VC}} \quad \overline{VC} = \frac{r}{\sin x} \quad (5)$$

$$\overline{VS} = \overline{VC} + \overline{CS} = \frac{r}{\sin x} + r = r \left(\frac{1 + \sin x}{\sin x} \right).$$

Poiché $\overline{SB}/\overline{VS} = \operatorname{tg} x$ e $\overline{VS}/\overline{VB} = \cos x$ otteniamo pure

$$\begin{aligned}\overline{SB} &= \overline{VS} \operatorname{tg} x = r \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} + 1 \right) \operatorname{tg} x = r \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right) \\ \overline{VB} &= \frac{\overline{VS}}{\cos x} = r \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right) \cdot \frac{1}{\cos x} = r \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x} \right).\end{aligned}$$

L'area laterale del cono $\mathcal{A}_l = \pi \overline{SB} \cdot \overline{VB}$ si scrive

$$\mathcal{A}_l = \pi r \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right) r \left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x} \right) = \pi r^2 \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}.$$

Nell'ipotesi che $1 + \operatorname{sen} x \neq 0$ in quanto $0 < x < \frac{\pi}{2}$, questa espressione si può semplificare nella seguente

$$\mathcal{A}_l = \pi r^2 \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}.$$

Un'analisi di questa espressione mette in luce la positività del secondo membro e che, al variare di x nell'intervallo consentito, sussistono questi due limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{A}_l = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \mathcal{A}_l = +\infty$$

entrambi coerenti con la situazione geometrica che si viene a creare (cono infinitamente esteso). Di conseguenza, essendo la funzione $\mathcal{A}_l(x)$ continua nell'intervallo $]0, \frac{\pi}{2}[$ deve esistere almeno un valore minimo determinabile con lo studio della derivata prima. Pertanto

$$\mathcal{A}'_l = \pi r^2 \left[\frac{\cos x \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x) - (1 + \operatorname{sen} x)(\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen} x)^2} \right]$$

che semplificata ai minimi termini risulta

$$\mathcal{A}'_l = \frac{\pi r^2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen} x)^2} \cdot (\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 1) \quad (6)$$

L'unico termine in (6) responsabile del segno di $\mathcal{A}'_l$ è il fattore tra parentesi al numeratore in quanto anche $\cos x > 0$ per $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. La condizione $\mathcal{A}'_l \geq 0$ implica

$$\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 1 \geq 0$$

e posto $t = \operatorname{sen} x$ si ha $t^2 + 2t - 1 \geq 0$. Essendo $t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ le soluzioni dell'equazione associata, le soluzioni della disequazione sono

$$\operatorname{sen} x \leq -1 - \sqrt{2} \quad \vee \quad \operatorname{sen} x \geq -1 + \sqrt{2}.$$

La prima non può presentare soluzioni essendo il codominio del seno l'intervallo $[-1, 1]$ mentre dalla seconda, posto $\alpha = \arcsen(\sqrt{2} - 1) \approx 24.5^\circ$ discende l'intervallo $\alpha \leq x < \frac{\pi}{2}$. Il segno di $\mathcal{A}_l$ è riassunto nella figura 3 che evidenzia come in corrispondenza

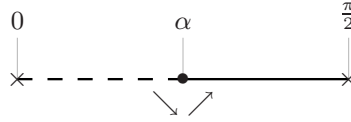


Fig. 3.

dell'angolo α la funzione area laterale del cono presenti un minimo relativo e assoluto. Siccome viene richiesta la misura di $\overline{VR} = \overline{VC} - \overline{CR}$ è facile trovare in base alla seconda delle (5),

$$\overline{VR} = \frac{r}{\sin \alpha} - r = \frac{r}{\sqrt{2} - 1} - r = r\sqrt{2}$$

come anticipato dal testo.

c) Il simbolo $n!$ è definito come $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ed esprime il numero delle permutazioni semplici di n oggetti distinti. Ciascuna permutazione si differenzia dalle altre solo per l'ordine nel quale appaiono gli n oggetti.

I coefficienti binomiali, chiamati così in quanto appaiono nello sviluppo della potenza n -esima del binomio $(a+b)^n$, sono definiti dalla relazione

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad (7)$$

e forniscono il numero delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k ossia tutti quei gruppi che si possono formare con k oggetti a partire da n , considerando distinti due gruppi se differiscono per almeno un elemento.

Moltiplicando il numeratore e il denominatore dell'espressione (7) per $(n-k)!$ si ottiene pure la scrittura alternativa,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)(n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k!(n-k)(n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

che mostra il legame richiesto dal testo tra i coefficienti binomiali e il fattoriale. Volendo giustificare la (7), supponiamo di conoscere il numero $C_{n,k}$ delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k . Da ciascuna combinazione, permutando

in tutti i modi possibili i k oggetti, si ottengono $k!$ permutazioni semplici. Il numero complessivo dei gruppi di k oggetti (presi tra n) che si potranno formare in modo tale che ogni gruppo si differenzi per l'ordine (permutazioni della medesima combinazione) oppure per qualche elemento è $C_{n,k} \cdot k!$ e questo numero coincide con $D_{n,k}$ il numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k : pertanto $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$ dalla quale

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

supposto ovviamente noto $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.