


# Problemi d'esame 3 2019



LORENZO ROI

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Gennaio 2020. 

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di **B. Mandelbrot** centrato nel punto  $(-0.792689, -0.160993)$  e ingrandito  $2,5 \times 10^7$  volte.

Titolo: **Vortici frattali.**

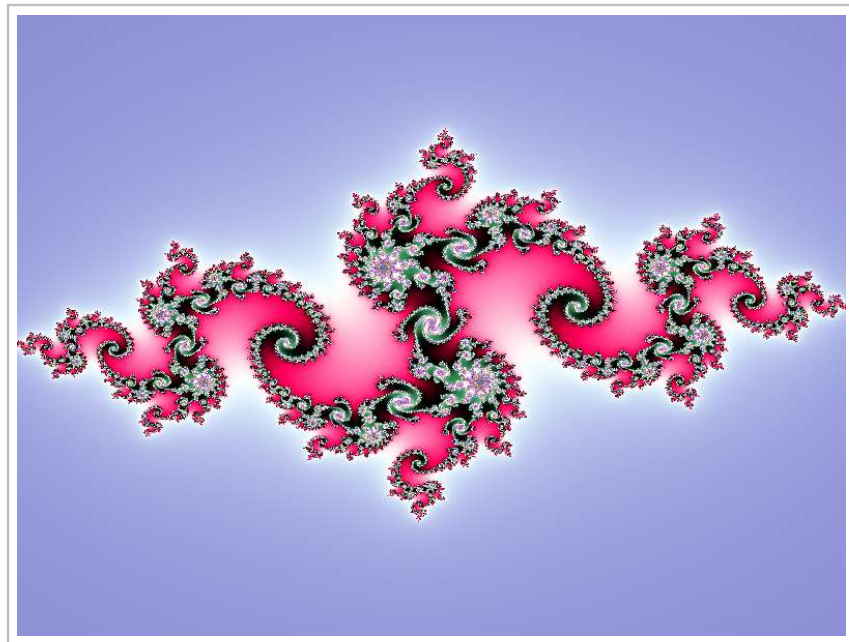
# INTRODUZIONE

Testo e soluzioni dei problemi e quesiti assegnati nell'anno 2019 nella sessione ordinaria degli esami di Stato di liceo scientifico per gli indirizzi di ordinamento (LI02) e opzione scienze applicate (LI03).

In **appendice** si riporta il solo testo delle prove suppletive e straordinarie.

Questo documento è il seguito di una precedente **raccolta** di temi proposti agli esami di Stato negli anni 2015-2018.

*Lorenzo Roi*



Insieme di Julia della copertina

# INDICE

Esame 2019 . . . . .	1
problema 1 . . . . .	1
problema 2 . . . . .	2
quesito 1 . . . . .	3
quesito 2 . . . . .	3
quesito 3 . . . . .	3
quesito 4 . . . . .	4
quesito 5 . . . . .	4
quesito 6 . . . . .	4
quesito 7 . . . . .	4
quesito 8 . . . . .	5
 APPENDICE . . . . .	 38
Esame 2019 suppletiva . . . . .	39
Esame 2019 straordinaria . . . . .	43

pagina lasciata intenzionalmente vuota

# ESAME 2019

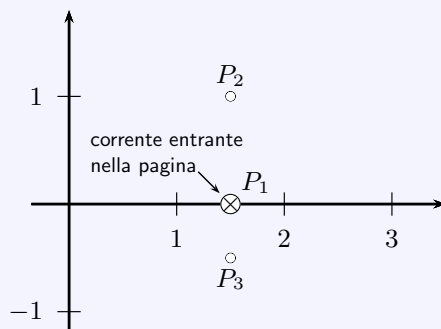
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

## • Problema n. 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \quad g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di  $a$  e  $b$  in  $\mathbb{R}$  con  $a \neq 0$ , la funzione  $g$  ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di  $a$  e  $b$  in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni  $f$  e  $g$  si intersecano nel punto  $A(2, 1)$ .
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere  $a = 1$  e  $b = -1$ . Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di  $g$  ammette un centro di simmetria e che i grafici di  $f$  e  $g$  sono tangenti nel punto  $B(0, -1)$ . Determinare inoltre l'area della regione piana  $S$  delimitata dai grafici delle funzioni  $f$  e  $g$ .
- Si supponga che nel riferimento  $Oxy$  le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano  $Oxy$  e passanti per i punti:



$$P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right), \quad P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right) \quad \text{e} \quad P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità  $i_1 = 2,0 \text{ A}$ ,  $i_2$  e  $i_3$ . Il verso di  $i_1$  è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico generato dalle correnti  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , lungo il contorno di  $S$ , a seconda dell'intensità e del verso di  $i_2$  e  $i_3$ .

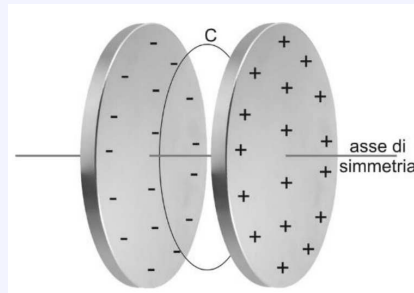
(continua)

- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione  $S$  rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza  $R = 0,20 \Omega$ . La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità  $B = 1,5 \times 10^{-2} \text{ T}$  perpendicolare alla regione  $S$ . Facendo ruotare la spira intorno all'asse  $x$  con velocità angolare  $\omega$  costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a  $5,0 \text{ mA}$ . Determinare il valore di  $\omega$ .

Soluzione

### • Problema n. 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio  $R$ , poste a distanza  $d$ , dove  $R$  e  $d$  sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico  $\vec{B}$ . Trascurando gli effetti di bordo, a distanza  $r$  dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di  $\vec{B}$ , espressa in Tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \quad \text{con } r \leq R$$

dove  $a$  e  $k$  sono costanti positive e  $t$  è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di  $a$  e  $k$ , spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di  $\vec{B}$  e del campo elettrico  $\vec{E}$  nei punti interni al condensatore?
- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia  $C$  la circonferenza avente centro sull'asse e raggio  $r$ . Determinare la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo  $C$  e da essa ricavare che il flusso di  $\vec{E}$ , attraverso la superficie circolare delimitata da  $C$ , è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \left( \frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right).$$



Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende  $|\vec{B}|$  al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per  $a > 0$ , si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$ .

Verificare che la funzione  $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$  è la primitiva di  $f$  il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione  $F$ , individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che  $F$  presenta due flessi nei punti di ascisse  $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a$  e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di  $F$  in tali punti.

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di  $f$  da quello di  $F$ , specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di  $F$  per la funzione  $f$ . Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di  $f$ , l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato  $b > 0$ , calcolare il valore di  $\int_{-b}^b f(t)dt$ .

Soluzione

### Questionario

- Una data funzione è esprimibile nella forma  $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$ , dove  $d \in \mathbb{R}$  e  $p(x)$  è un polinomio. Il grafico di  $f$  interseca l'asse  $x$  nei punti di ascisse 0 e  $12/5$  ed ha come asintoti le rette di equazione  $x = 3$ ,  $x = -3$  e  $y = 5$ . Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione  $f$ .

Soluzione

- È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2017} + x^{2019}.$$

Provare che esiste un solo  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $g(x_0) = 0$ . Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x}.$$

Soluzione

- Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area  $S$ , determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

Soluzione

4. Dati i punti  $A(2, 0, -1)$  e  $B(-2, 2, 1)$ , provare che il luogo geometrico dei punti  $P$  dello spazio, tali che  $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB}$ , è costituito da una superficie sferica  $S$  e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto  $T(-10, 8, 7)$  appartiene a  $S$  e determinare l'equazione del piano tangente in  $T$  a  $S$ .

Soluzione

5. Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.
- Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
  - Quale è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
  - Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

Soluzione

6. Una spira di rame, di resistenza  $R = 4,0 \text{ m}\Omega$ , racchiude un'area di  $30 \text{ cm}^2$  ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla spira varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:



- a) da 0,0 ms a 3,0 ms;
- b) da 3,0 ms a 5,0 ms;
- c) da 5,0 ms a 10,0 ms.

Soluzione

7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse  $x$  di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità  $v = 0,80c$  lungo la direzione  $x$  del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

Soluzione

8. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo  $|\vec{B}| = 1,00 \text{ mT}$ . Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante  $\Delta x = 38,1 \text{ cm}$ , ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio  $r = 10,5 \text{ cm}$  e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con  $\vec{B}$ .

Soluzione

## COSTANTI FISICHE

carica elementare	$e$	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
massa del protone	$m_p$	$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
velocità della luce	$c$	$2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$

**Problema n. 1: soluzione.** (testo del problema)

Per dimostrare l'esistenza di due estremi della funzione

$$g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2} \quad (1)$$

definita nel dominio  $\mathbb{R}$  dal prodotto di due funzioni continue e derivabili, calcoliamo innanzitutto la sua derivata prima  $g'(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= a \cdot e^{2x-x^2} + (ax + b)(2 - 2x)e^{2x-x^2} \\ &= e^{2x-x^2} (a + 2ax - 2ax^2 + 2b - 2bx) \\ &= e^{2x-x^2} \cdot [(a + 2b) + 2x(a - b) - 2ax^2] \end{aligned} \quad (2)$$

e ne studiamo il segno  $g'(x) \geq 0$ . Poiché  $e^{2x-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  il segno dipende dalle soluzioni della disequazione

$$-2ax^2 + 2x(a - b) + (a + 2b) \geq 0 \quad (3)$$

coinvolgente il secondo fattore di (2). L'equazione associata a tale disequazione presenta le soluzioni

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(a - b) \pm \sqrt{(a - b)^2 + 2a(a + 2b)}}{-2a} \\ &= \frac{(a - b) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 4ab}}{2a} \\ &= \frac{(a - b) \pm \sqrt{2a^2 + (a + b)^2}}{2a} \end{aligned} \quad (4)$$

e poiché  $\Delta/4 = 2a^2 + (a+b)^2 > 0$  con  $a \neq 0$ , il segno di  $g'(x)$  dipende dal solo parametro  $a$ , coefficiente del termine quadratico in (3). Posto

$$x_1 = \frac{(a-b) + \sqrt{\Delta/4}}{2a}, \quad x_2 = \frac{(a-b) - \sqrt{\Delta/4}}{2a}, \quad (5)$$

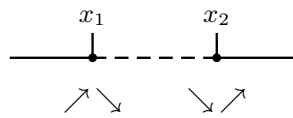
le soluzioni sono

$$a < 0, \implies x \leq x_1 \quad \vee \quad x \geq x_2$$

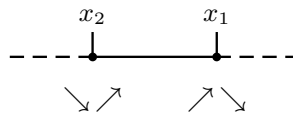
oppure

$$a > 0, \implies x_2 \leq x \leq x_1$$

rispettivamente riassunte graficamente nelle figg. 1 e 2.



**Fig. 1.** Segno di  $g'(x)$  con  $a < 0$ .



**Fig. 2.** Segno di  $g'(x)$  con  $a > 0$ .

In entrambi i casi la funzione  $g$  presenta un massimo e un minimo relativi. Per dimostrare che questi estremi sono pure di massimo e minimo assoluti, ribadita la continuità di  $g$  nel dominio  $\mathbb{R}$  in quanto prodotto di funzioni continue, studiamo il limite di  $g(x)$  agli estremi  $\pm\infty$  del dominio, limite che riscriviamo come

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}}. \quad (6)$$

Poiché valgono i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax + b) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left( a + \frac{b}{x} \right) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x^2 - 2x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \end{aligned} \quad (7)$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left( 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty,$$

la (6) costituisce un caso di indeterminazione della forma  $\infty/\infty$ . Per risolverla analizziamo l'esistenza del limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore di (6) cioè

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{D(ax + b)}{D[e^{x^2 - 2x}]} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{(2x - 2)e^{x^2 - 2x}}. \quad (8)$$

Poiché per il primo fattore al denominatore risulta

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x - 2) = \pm\infty$$

e per il fattore esponenziale vale ancora il risultato (7) e  $a \neq 0$ , il limite della precedente è

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{(2x - 2)e^{x^2 - 2x}} = 0 \quad (9)$$

cosicché, per l'esistenza del limite (8), possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital e concludere che pure

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}} = 0. \quad (10)$$

Questo risultato assicura l'esistenza di un asintoto orizzontale coincidente con l'asse  $x$  per cui, ripresi gli andamenti circa la crescita/decrecenza della  $g$  (figg. 1 e 2), possiamo concludere che i valori  $x_1$  e  $x_2$  sono rispettivamente punti di massimo e di minimo assoluto. A conferma di ciò, osservato come il segno di  $g$  sia dipendente solo dal fattore lineare, ci aspettiamo che sia  $g(x_1) > 0$  e  $g(x_2) < 0$  indipendentemente dal valore di  $a$ . Difatti

$$g(x_1) > 0 \implies ax_1 + b > 0$$

da cui, per (5),

$$a \cdot \frac{(a - b) + \sqrt{\Delta/4}}{2a} + b > 0 \implies \frac{(a + b) + \sqrt{\Delta/4}}{2} > 0 \implies \sqrt{\Delta/4} > -(a + b).$$

Quest'ultima è certamente soddisfatta se  $a + b > 0$  mentre se  $a + b < 0$  è possibile elevare al quadrato ed, esplicitato  $\Delta/4$ , ottenere

$$2a^2 + (a + b)^2 > (a + b)^2 \implies 2a^2 > 0$$

pure soddisfatta. Allo stesso modo si dimostra che  $g(x_2) < 0$ .

– Affinché i grafici di  $f$  e  $g$  si intersechino nel punto  $A(2, 1)$  devono valere le condizioni

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ g(2) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 4a - 2 + b = 1 \\ (2a + b)e^0 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 4a - 3 + 1 - 2a = 0 \\ b = 1 - 2a \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

■ Posto  $a = 1$  e  $b = -1$ , la prima funzione da studiare è

$$f(x) = x^2 - x - 1, \quad (11)$$

equazione che rappresenta una parabola con la concavità rivolta nel verso positivo delle ordinate, di vertice

$$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right),$$

e che interseca l'asse  $x$  nei punti di ascissa

$$x^2 - x - 1 = 0 \implies x_{a,b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e l'asse  $y$  in  $B(0, -1)$ .

Lo studio di

$$g(x) = (x - 1)e^{2x - x^2} \quad (12)$$

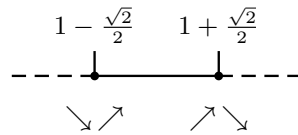
inizia richiamando quanto già svolto precedentemente ossia come tale funzione possiede l'asintoto di equazione  $y = 0$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - 1)e^{2x - x^2} = 0$$

e come sia  $g(x) \geq 0$  se  $x \geq 1$ . Inoltre, ripresa la derivata prima e calcolati in base a (5) i valori di  $x_1$  e  $x_2$ , abbiamo

$$g'(x) \geq 0 \quad \text{nell'insieme} \quad x \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad x \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

segno che riassumiamo graficamente nella fig. 3



**Fig. 3.** Segno di  $g'(x)$  con  $a = 1$  e  $b = -1$ .

Il calcolo della derivata seconda  $g''(x)$  dà

$$\begin{aligned} g''(x) &= e^{2x-x^2}(-4x+4) + e^{2x-x^2}(2-2x)(-2x^2+4x-1) \\ &= e^{2x-x^2}[-4(x-1) - 2(x-1)(-2x^2+4x-1)] \\ &= 2e^{2x-x^2}(x-1)(2x^2-4x-1) \end{aligned}$$

per cui  $g''(x) \geq 0$  comporta lo studio di

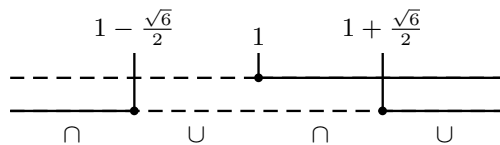
$$x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$$

$$2x^2 - 4x - 1 \geq 0 \implies x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

per cui, quest'ultima, è soddisfatta da

$$x \leq x_3 \quad \vee \quad x \geq x_4 \quad \text{cioè} \quad x \leq 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad x \geq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Combinando i due termini nel grafico di fig. 4 deduciamo che  $g''(x) \geq 0$  negli insiemi  $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 1$  oppure  $x \geq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$  dove  $g$  avrà la concavità rivolta verso l'alto.



**Fig. 4.** Segno di  $g''(x)$  con  $a = 1$  e  $b = -1$ .

Osservato come varia il segno di  $g(x)$  e delle sue prime due derivate, verifichiamo per la funzione  $g$  l'esistenza di una simmetria centrale rispetto al punto di ascissa 1 e ordinata  $g(1) = 0$  ossia  $C(1, 0)$ . Pertanto, per confermare quanto richiesto dal testo, ottenute le equazioni della simmetria  $\sigma(1, 0)$  con centro  $C$

$$\sigma(1, 0): \begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 1 \\ \frac{y+y'}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = 2-x \\ y' = -y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2-x' \\ y = -y' \end{cases} \quad (13)$$

e riscritta la  $g$  nella forma

$$y = (x-1)e^{2x-x^2} \quad (14)$$

sostituiamo l'ultima coppia di equazioni cosicché la precedente diviene

$$\begin{aligned} -y' &= (2-x'-1) \cdot e^{2(2-x')-(2-x')^2} \quad \cdot (-1) \\ y' &= (x'-1) \cdot e^{[4-2x'-4-(x')^2+4x']} \\ y' &= (x'-1)e^{2x'-(x')^2}: \end{aligned}$$

l'invarianza dell'equazione così ottenuta rispetto alla (14) dimostra l'esistenza della simmetria centrale di centro  $C$ .

Per verificare la mutua tangenza tra  $f$  e  $g$  ci assicuriamo innanzitutto che  $B(0, -1)$  appartenga pure al grafico di  $g$ : difatti  $g(0) = -1 \cdot e^0 = -1$ .

Il calcolo delle rispettive derivate fornisce inoltre

$$\begin{aligned} f'(x) = 2x-1 &\implies f'(0) = -1 \\ g'(x) = e^{2x-x^2}(-2x^2+4x-1) &\implies g'(0) = e^0(0+0-1) = -1 \end{aligned}$$

per cui essendo

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases}$$

i rispettivi grafici sono, come richiesto, tangenti in  $B(0, -1)$ .

Il calcolo delle ordinate degli estremi e dei punti di flesso fornisce\*

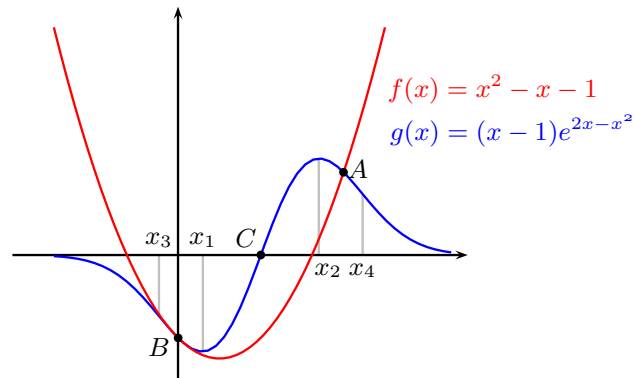
$$\begin{aligned} x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} &\implies g(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(2 - \sqrt{2} - \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}e}{2} \\ x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} &\implies g(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}e}{2} \end{aligned}$$

mentre per i punti di flesso, in aggiunta a  $C(1, 0)$ , abbiamo

$$g\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \exp\left(2 \pm \sqrt{6} - \frac{5}{2} \mp \sqrt{6}\right) = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} e^{-1/2}.$$

---

\*  $\exp(\dots)$  è una scrittura alternativa a  $e^{(\dots)}$  e talvolta più opportuna tipograficamente.



**Fig. 5.** Grafici delle funzioni  $f$  e  $g$ .

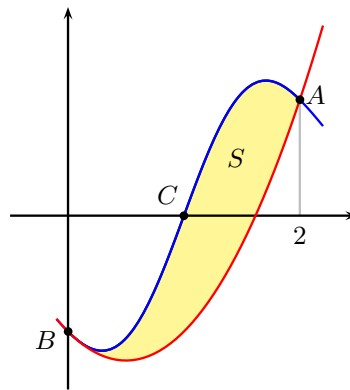
La figura 5 riporta i grafici di entrambe le funzioni.

La regione  $S$  di cui si chiede il calcolo dell'area è evidenziata nella figura 6 e il suo valore discende dalla soluzione dell'integrale

$$\mathcal{A}(S) = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx$$

che esplicitamente è

$$\mathcal{A}(S) = \int_0^2 [(x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1] dx. \quad (15)$$



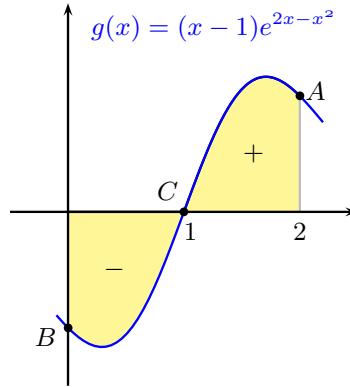
**Fig. 6.** Regione  $S$  compresa tra i grafici di  $f$  e  $g$ .

Sfruttando la proprietà di addittività il calcolo procede immediato per i termini elementari

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S) &= \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 \\ &= \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \left( -\frac{8}{3} + 2 + 2 \right) \\ &= \frac{4}{3} - \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx, \end{aligned} \quad (16)$$



mentre rimane il calcolo che coinvolge la funzione  $g$ . D'altra parte, come dimostrato precedentemente, la funzione integranda possiede quale centro di simmetria il punto  $C(1, 0)$  che è pure il punto medio del segmento di estremi  $B$  e  $A$  per cui il suo integrale definito dev'essere nullo come evidenziato graficamente dalla figura 7).



**Fig. 7.** Trapezoidi coinvolti in  $\int_0^2 g(x)dx = 0$ .

Procedendo in termini più formali, tale integrale si può suddividere nella somma

$$\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx = \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \int_1^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx \quad (17)$$

e riscriviamo il secondo addendo in una forma alternativa tramite il cambio di variabile rappresentato dalla (13)  $x' = -x+2$ . Difatti, calcolato il differenziale della nuova variabile

$$dx' = -dx \quad \text{e aggiornati gli estremi} \quad x'_{inf} = -1+2 = 1, \quad x'_{sup} = -2+2 = 0,$$

l'integrale (17) si modifica come

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \int_1^0 (2-x'-1)e^{2(2-x')-(2-x')^2} (-dx') \\ &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx - \int_1^0 (1-x')e^{2x'-(x')^2} dx' \end{aligned}$$

e quindi, sfruttando la proprietà dell'inversione degli estremi, ottenere quanto aspettato

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \int_1^0 (x'-1)e^{2x'-(x')^2} dx' \\ &= \int_0^1 (x-1)e^{2x-x^2} dx - \int_0^1 (x'-1)e^{2x'-(x')^2} dx' = 0. \end{aligned}$$

In definitiva, ripresa la (16), l'area della regione  $S$  è

$$\mathcal{A}(S) = \left(\frac{4}{3} - 0\right) \text{m}^2 = \frac{4}{3} \text{m}^2 \approx 1,3333 \text{m}^2. \quad (18)$$

*Nota 1.* Per il calcolo di  $\int_0^2 g(x)dx$  nella (16) si può procedere pure in modo esplicito osservando che la derivata dell'esponente è  $D(2x - x^2) = 2(1 - x)$ . Ciò suggerisce di introdurre la nuova variabile di integrazione  $t = 2x - x^2$  il cui differenziale è

$$dt = 2(1 - x)dx \implies (x - 1)dx = -\frac{dt}{2}$$

cosicché

$$\begin{aligned} \int (x - 1)e^{2x - x^2} dx &= \int e^t \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{2x - x^2} + c \end{aligned}$$

per cui

$$\int_0^2 (x - 1)e^{2x - x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{2x - x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

*Nota 2.* Con la medesima sostituzione gli estremi di integrazione sono entrambi nulli per cui, a maggior ragione, è  $\int_0^2 g(x)dx = 0$ .

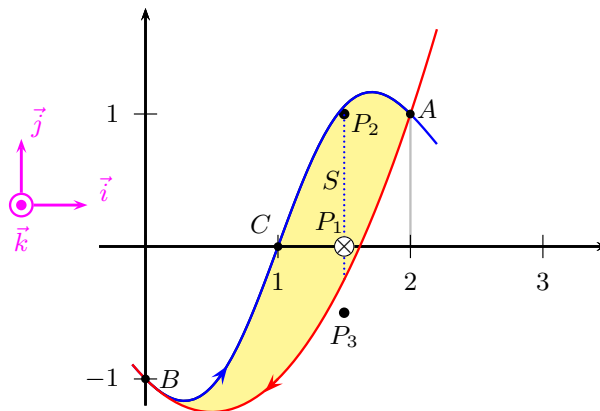
■ Per comprendere come varia la circuitazione del campo magnetico dobbiamo innanzitutto individuare quali correnti sono concatenate o meno al contorno della regione  $S$  posizionando adeguatamente i punti  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  e siccome questi hanno ascissa pari a  $3/2$  converrà calcolare le corrispondenti ordinate sui grafici di  $g$  ed  $f$ . Poiché

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2} - 1\right) \exp\left(2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2} e^{3/4} \approx 1,05 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

allora  $P_1$  e  $P_2$  appartengono alla regione  $S$  in quanto le rispettive ordinate soddisfano la disuguaglianza

$$-\frac{1}{4} < y_{P_1}, y_{P_2} < 1,05,$$

mentre  $P_3 \notin S$  perché  $y_{P_3} = -1/2 < -1/4$  (fig. 8).



**Fig. 8.** Correnti comprese entro il contorno di  $S$  e terna di riferimento.

La corrente  $i_3$  di conseguenza non è concatenata con il percorso quindi non influisce sulla circuitazione del campo magnetico. Introdotta la terna destrorsa costituita dai versori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  ( $\vec{k}$  è uscente dal foglio) e detto  $\gamma$  il contorno di  $S$  che supponiamo di percorrere nel verso orario (fig. 8) cosicché  $i_1 = 2\text{ A} > 0$ , per il teorema di Ampère sulla circuitazione  $\Gamma$  avremo

$$\Gamma(\gamma) = \mu_0(i_1 + i_2) = \mu_0(2\text{ A} + i_2). \quad (19)$$

Pertanto:

– supposto  $\Gamma(\gamma) > 0$  per cui  $2\text{ A} + i_2 > 0$  e quindi  $i_2 > -2\text{ A}$ , le possibilità che si presentano sono

se  $-2\text{ A} < i_2 < 0 \implies i_2$  avrà verso concorde con il versore  $\vec{k}$ ,

se  $i_2 > 0 \implies i_2$  entrante e concorde con  $-\vec{k}$  (come  $i_1$ ),

se  $i_2 = 0 \implies \Gamma(\gamma) = \mu_0(2\text{ A})$ .

– se invece  $\Gamma(\gamma) \leq 0$  per cui  $2\text{ A} + i_2 \leq 0$  e quindi  $i_2 \leq -2\text{ A}$ ,  $i_2$  non potrà che essere sempre negativa e quindi con verso concorde con  $\vec{k}$  cioè uscente dal piano di  $S$ .

■ La rotazione della regione  $S$  nel campo magnetico  $\vec{B} = B\vec{k}$  con  $B = 1,5 \times 10^{-2}\text{ T}$  genera una variazione di flusso magnetico  $\Phi(\vec{B})$  e induce una tensione nel contorno conduttore che, dotato di resistenza  $R = 0,20\ \Omega$ , viene percorso da una corrente il cui valore massimo è  $i_{max} = 5 \times 10^{-3}\text{ A}$ .

Per ottenere il valore della velocità angolare  $\omega$ , definiamo innanzitutto due grandezze:

– il vettore  $\vec{S}$  di modulo uguale all'area (18)  $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A} = 4/3\text{ m}^2$ , perpendicolare al piano (variabile nel tempo) della regione  $S$ ,

– l'angolo  $\alpha$  tra i vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{S}$ .

Nell'ipotesi, fornita dal testo, che la velocità angolare  $\omega$  con cui ruota la spira sia costante, la dipendenza dal tempo  $t$  dell'angolo  $\alpha$  dev'essere rappresentata da una relazione lineare per cui poniamo  $\alpha = \omega t + \alpha_0$  con  $\alpha_0$  fase iniziale.

Il flusso del campo magnetico attraverso  $S$  è dato dal prodotto scalare

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S},$$

e, nell'ipotesi del testo, questa grandezza assume la forma esplicita

$$\Phi(\vec{B}) = B\mathcal{A} \cos \alpha = B\mathcal{A} \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (20)$$

Tale variazione di flusso genera nella spira una tensione indotta  $V$  (o forza elettromotrice) che, per la legge dell'induzione elettromagnetica (o legge di Faraday-Neumann), è descritta dalla

$$V(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -B\mathcal{A}\omega[-\sin(\omega t + \alpha_0)] = B\mathcal{A}\omega \sin(\omega t + \alpha_0) \quad (21)$$

e di conseguenza il bordo conduttore di  $S$  viene percorso da una corrente elettrica  $i(t)$  che invece segue la legge di Ohm

$$V(t) = Ri(t) \implies i(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{B\mathcal{A}\omega}{R} \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (22)$$

Osservato come la corrente dipenda dal tempo con legge armonica, l'intensità massima è quindi rappresentata dall'ampiezza di (22)

$$i_{max} = \frac{BA\omega}{R}$$

dalla quale, esplicitata l'incognita della velocità angolare, otteniamo il risultato

$$\omega = \frac{Ri_{max}}{BA} = \frac{(0,20 \Omega)(5 \times 10^{-3} \text{ A})}{(1,5 \times 10^{-2} \text{ T})(1,33 \text{ m}^2)} = 5,0125 \times 10^{-2} \text{ rad/s} \approx 0,05 \text{ rad/s.}$$

**Problema n. 2: soluzione.** (testo del problema)

- Il testo propone la funzione

$$|B(t)| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \cdot r \quad (1)$$

per descrivere l'andamento dell'intensità del campo magnetico al variare della distanza  $r$  dall'asse di simmetria del condensatore e, soprattutto, dal tempo  $t$ . Dato che quest'ultimo viene misurato in secondi (s) per cui il suo quadrato,  $t^2$ , è in  $\text{s}^2$ , segue che la grandezza  $a^2$  dev'essere omogenea a  $t^2$  per cui pure la sua unità di misura dev'essere il  $\text{s}^2$  e quindi l'unità di  $a$  è il secondo.

Per determinare l'unità di misura della costante  $k$ , riscriviamo la (1) sostituendo alle grandezze coinvolte le rispettive unità di misura sapendo che il testa (T) è relativa al campo magnetico e il metro (m) è l'unità di  $r$ . Abbiamo quindi

$$\text{T} = \frac{k \cdot \text{s}}{\sqrt{(\text{s}^2)^3}} \cdot \text{m}$$

che, semplificata, diviene

$$\text{T} = \frac{k \cdot \text{s}}{\sqrt{\text{s}^6}} \cdot \text{m} = \frac{k \cdot \text{s}}{\text{s}^3} \cdot \text{m} \implies \text{T} = \frac{k \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

per cui, esplicitata la costante  $k$  risulta

$$k = \frac{\text{T} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}. \quad (2)$$

In aggiunta, se consideriamo che su un tratto rettilineo di lunghezza  $l$ , percorso dalla corrente  $i$  ed immerso in un campo magnetico  $B$  agisce la forza  $F = ilB$  per cui il campo  $B$  è pure dato da  $B = F/il$ , il tesla si può esprimere come

$$\text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Inoltre, per la II legge della dinamica, il newton (N) in termini di unità fondamentali è

$$\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

per cui, inserendo tali relazioni nella (2), riportiamo le unità di  $k$  alle unità fondamentali del Sistema Internazionale ossia

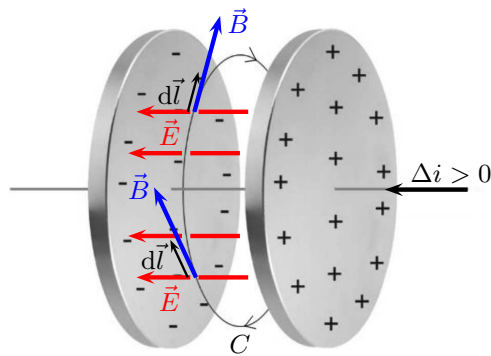
$$\begin{aligned} k &= \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{A} \cdot \text{m}^2} \\ &= \frac{\text{s}^2}{\text{A} \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \end{aligned}$$

La legge di Ampère-Maxwell nel caso di assenza di correnti concatenate si scrive come

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}. \quad (3)$$

Questa espressione lega la variazione nel tempo del flusso del campo elettrico  $\vec{E}$ ,  $d\Phi(\vec{E})/dt$ , con la circuitazione  $\Gamma(\vec{B})$  del campo magnetico e il fattore  $i_s = \epsilon_0 d\Phi(\vec{E})/dt$  costituisce la cosiddetta corrente di spostamento introdotta da Maxwell per salvaguardare la continuità della corrente nei punti in cui è presente un campo elettrico variabile nel tempo.

Tra le direzioni dei campi elettrico e magnetico, vi è una relazione di perpendicolarità in tutto lo spazio compreso tra le armature del condensatore: nel caso che il flusso di  $\vec{E}$  stia aumentando per cui  $d\Phi(\vec{E})/dt > 0$ , la corrente di spostamento  $i_s$  ha verso concorde con la corrente che porta le cariche sull'armatura positiva e il vettore  $\vec{B}$  ha il verso di figura 1 e le sue linee di forza sono delle circonferenze concentriche aventi il centro sull'asse di simmetria e giacenti su piani perpendicolari a questo asse. Il verso di  $\vec{B}$  è opposto se  $d\Phi(\vec{E})/dt < 0$ .



**Fig. 1.** Condensatore piano, corrente in aumento e campi.

- Richiamata la definizione di circuitazione tramite l'integrale di linea

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (4)$$

oppure, in termini meno formali

$$\Gamma(\vec{B}) = \sum_C \vec{B} \cdot \Delta\vec{l},$$

questa grandezza coinvolge il differenziale  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  che rappresenta il prodotto scalare tra il campo  $\vec{B}$  e l'elemento differenziale di percorso  $d\vec{l}$ . Il suo calcolo lungo la circonferenza  $C$  di raggio  $r$  disposta tra le armature del condensatore in un piano perpendicolare all'asse e avente centro sull'asse stesso (fig. 1) si semplifica non appena si osservi come in ogni punto di  $C$  siano paralleli i vettori  $\vec{B}$  e  $d\vec{l}$ : ne segue che

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos 0^\circ = B dl$$

per cui la (4) diviene

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_C B dl. \quad (5)$$

Data inoltre la simmetria cilindrica esistente, lungo  $C$  il modulo  $B$  è costante e (5) si semplifica ulteriormente in

$$\Gamma(\vec{B}) = B \oint_C dl = 2\pi r B \quad (6)$$

dove  $\oint_C dl = 2\pi r$  rappresenta nient'altro che la lunghezza di  $C$ .

Nota la circuitazione, dalla (3) possiamo isolare il differenziale del flusso

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \implies d\Phi(\vec{E}) = \frac{\Gamma(\vec{B}) dt}{\mu_0 \epsilon_0}$$

e quindi con il risultato (6) ottenere

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi r B dt}{\mu_0 \epsilon_0}.$$

Poiché la dipendenza dal tempo del modulo di  $\vec{B}$  è nota dalla (1), ne discende anche la dipendenza da  $t$  del differenziale del flusso

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi r}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \cdot r = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{t \cdot dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}. \quad (7)$$

Se quindi risolviamo l'integrale definito nell'intervallo  $[0, t]$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \int_0^t \frac{t \cdot dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \quad (8)$$

potremo determinare l'espressione finita di  $\Phi(\vec{E})$ . Con tale obiettivo, definiamo il cambio di variabile

$$z = t^2 + a^2, \quad dz = 2t dt \implies t dt = \frac{1}{2} dz,$$

e l'integrale indefinito associato al precedente si riscrive

$$\begin{aligned} \int \frac{t \cdot dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z^3}} = \frac{1}{2} \int z^{-3/2} dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{1-(3/2)}}{1-(3/2)} + c = -\frac{1}{\sqrt{z}} + c \\ &= -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + c \end{aligned}$$

per cui (8) si esplicita in

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{E}) &= \frac{2\pi kr^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right]_0^t = \frac{2\pi kr^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2}} \right] \\ &= \frac{2\pi kr^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right] \quad (a > 0),\end{aligned}\quad (9)$$

che costituisce il risultato richiesto.

– Per giungere alla d.d.p.  $V$  è necessario conoscere il campo elettrico  $\vec{E}$  dato che, in un condensatore con armature a distanza  $d$ , tra queste grandezze sussiste la relazione  $V = E d$ . Se quindi  $\vec{S}$  è il vettore perpendicolare al cerchio di bordo  $C$ , modulo  $S = \pi r^2$  e verso concorde con  $\vec{E}$ , la definizione di flusso per il campo elettrico implica

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = E S \cos 0^\circ = E \cdot (\pi r^2) \quad (10)$$

in quanto i due vettori coinvolti sono, appunto, paralleli e concordi. Sostituendo in quest'ultima la (9)

$$E(\pi r^2) = \frac{2\pi kr^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right]$$

abbiamo l'espressione per il campo elettrico

$$E = \frac{2k}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right]$$

dalla quale, per  $V = E d$  si ha subito

$$V = \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right]. \quad (11)$$

– L'andamento asintotico del campo magnetico si trova calcolando il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |B(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr \cdot t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}. \quad (12)$$

A questo scopo riscriviamo la funzione ad argomento del limite estraendo dalla radice al denominatore il fattore  $t^3$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr \cdot t}{\sqrt{\left[ t^2 \left( 1 + \frac{a^2}{t^2} \right) \right]^3}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr \cdot t}{t^3 \sqrt{\left( 1 + \frac{a^2}{t^2} \right)^3}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr}{t^2 \sqrt{\left( 1 + \frac{a^2}{t^2} \right)^3}}.$$

Poiché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{t^2} = 0 \quad \text{cosicché} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\left( 1 + \frac{a^2}{t^2} \right)^3} = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{kr}{t^2} = 0,$$

il limite richiesto è nullo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |B(t)| = 0$$

e pertanto il campo magnetico si annulla asintoticamente. La ragione di ciò sta nell'andamento, pure asintotico della la d.d.p. tra le armature. Difatti la d.d.p. espressa dalla (11) tende al valore costante

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right] = \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0 a}$$

in quanto (si veda più avanti)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} = 0.$$

Poiché il campo è proporzionale a  $V$  tramite la  $V = E d$  e a sua volta, il flusso lo è al campo,  $\Phi(\vec{E}) = E(\pi r^2)$ , ne segue che

$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{così come, per (3)} \quad \Gamma(\vec{B}) \rightarrow 0$$

e quindi l'annullarsi del campo magnetico.

▪ Definita la funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}, \quad (a > 0) \quad (13)$$

se

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \quad (14)$$

è una primitiva (e, a parte il segno, lo conferma la (9)), allora deve soddisfare la proprietà  $F'(t) = f(t)$ . Difatti il calcolo della sua derivata prima fornisce

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\frac{1}{(t^2 + a^2)} \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + a^2}} \\ &= -\frac{t}{(t^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} = f(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Inoltre il grafico di (14) passa per l'origine in quanto è immediato notare che  $F(0) = 1/a - 1/a = 0$ .

– Iniziamo lo studio del grafico di  $F$  con  $t \in \mathbb{R}$  determinandone innanzitutto il segno: se moltiplichiamo entrambi i membri della disequazione

$$F(t) \geq 0 \quad \implies \quad \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \geq 0$$

per il denominatore comune positivo, questa è equivalente alla

$$a \geq \sqrt{t^2 + a^2} \quad \implies \quad a^2 \geq t^2 + a^2$$



dalla quale discende  $t^2 \leq 0$ , soddisfatta solo se  $t = 0$ . Pertanto  $F(t) < 0$  se  $t \neq 0$  oppure  $F(0) = 0$ .

Circa eventuali simmetrie il calcolo di  $F(-t)$

$$F(-t) = \frac{1}{\sqrt{(-t)^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra la validità dell'identità  $F(-t) = F(t)$  per cui  $F$  è una funzione pari con un grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

La funzione è continua nel dominio  $\mathbb{R}$  in quanto composta da funzioni pure continue e con denominatore diverso dallo zero cosicché gli unici limiti sono  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t)$ . Osservato che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} = 0$$

essendo

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (t^2 + a^2) = +\infty, \quad \text{per cui se } z = t^2 + a^2 \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} = 0,$$

allora

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{a}$$

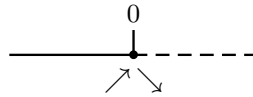
dato che il secondo addendo è una costante. La retta orizzontale  $y_a = -1/a$  è quindi un asintoto per  $F$  e poiché

$$F(t) - y_a > 0 \quad \implies \quad F(t) - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} > 0$$

è  $F(t) > y_a$  e il grafico di  $F$  appartiene al semipiano superiore dei due definiti dall'asintoto. La derivata prima  $F'(t)$  è data dalla (13) e il suo segno è

$$F'(t) \geq 0 \quad \implies \quad -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \geq 0 \quad \implies \quad -t \geq 0 \quad \implies \quad t \leq 0$$

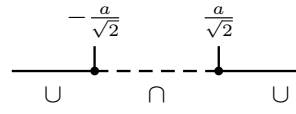
per cui la  $F$  possiede un massimo in  $(0, 0)$  (fig. 2).



**Fig. 2.** Segno di  $F'(t)$ .

Il calcolo della  $F''(t)$  dà

$$\begin{aligned} F''(t) &= - \left[ \frac{(t^2 + a^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(t^2 + a^2)^{1/2} \cdot 2t^2}{(t^2 + a^2)^3} \right] \\ &= - \frac{t^2 + a^2 - 3t^2}{(t^2 + a^2)^{5/2}} = \frac{2t^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{5/2}} \end{aligned}$$



**Fig. 3.** Segno di  $F''(t)$ .

per cui

$$F''(t) \geq 0 \implies 2t^2 - a^2 \geq 0 \implies t \leq -\frac{a}{\sqrt{2}} \vee t \geq \frac{a}{\sqrt{2}},$$

insieme nel quale le concavità sono rivolte nel verso delle ordinate positive (fig. 3).

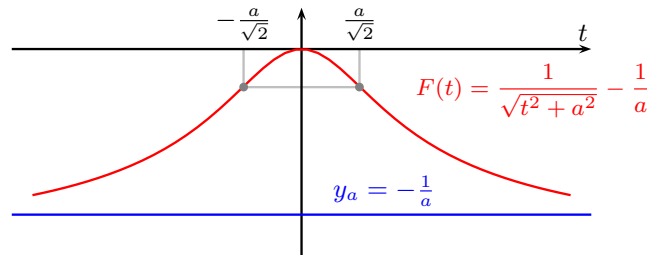
I punti di flesso sono invece  $t_{1,2} = \pm a/\sqrt{2}$  con ordinate

$$F\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 3}{3a} \quad (16)$$

e le pendenze in tali punti si ottengono dal calcolo della derivata prima (15) cioè

$$F'\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pm \frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}a^2\right)^3}} = \frac{\mp \frac{a}{\sqrt{2}}}{a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{2}{3a^2\sqrt{3}}.$$

Il grafico di  $F(t)$  è rappresentato quindi nella figura 4.



**Fig. 4.** Grafico della funzione  $F(t)$ , punti di flesso e asintoto.

- Per dedurre il grafico di  $f(t)$  da quello di  $F(t)$  va ricordato che
  - a)  $f(t)$  è la derivata prima di  $F(t)$  cioè  $F'(t) = f(t)$  cosicché  $F''(t) = f'(t)$ .
  - b) Poiché  $F(t)$  è pari, la sua derivata prima  $F'(t)$  è dispari e, comunque, tale proprietà emerge immediatamente dalla validità dell'identità  $f(-t) = -f(t)$ .

Possiamo quindi circoscrivere lo studio qualitativo all'intervallo illimitato  $t \in ]-\infty, 0]$  e analizzare, con l'aiuto della rappresentazione grafica, l'andamento del coefficiente angolare delle rette tangenti al grafico di figura 4.

Innanzitutto vale il limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$$

in quanto, per l'andamento asintotico di  $F(t)$  le rette tangenti tendono a disporsi parallelamente all'asse dei valori di  $t$  (fig. 5).

Quindi, procedendo nel verso di  $t$  crescente, la pendenza di  $F(t)$  rimane positiva ma va crescendo e raggiunge il valore massimo quando  $t = -a/\sqrt{2}$  (fig. 6) ossia quando la  $F(t)$  presenta il primo flesso: formalmente  $F''(-a/\sqrt{2}) = f'(-a/\sqrt{2}) = 0$ .

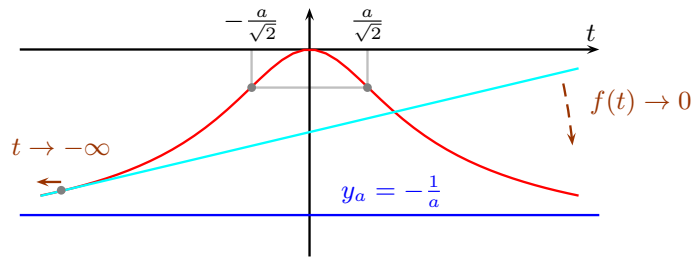


Fig. 5. Grafico della funzione  $F(t)$  e retta tangente con  $t \rightarrow -\infty$ .

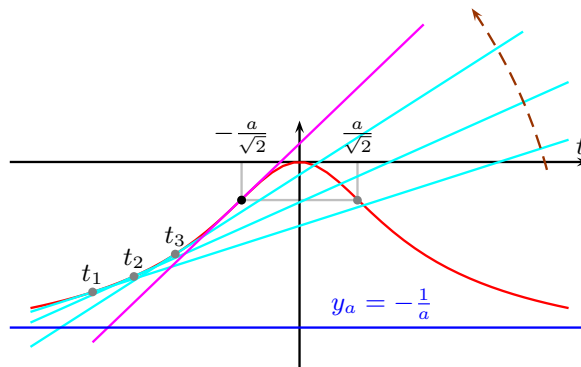


Fig. 6. Grafico della funzione  $F(t)$  e tangenti con  $t$  crescente e  $t < -a/\sqrt{2}$ .

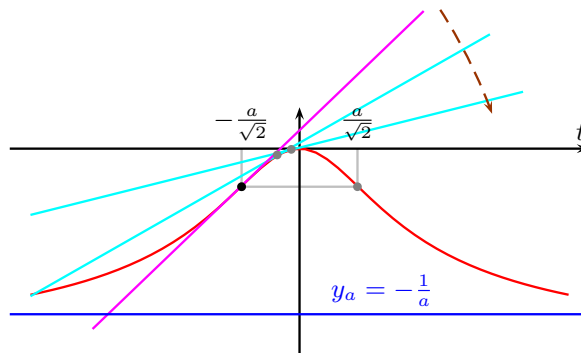


Fig. 7. Grafico della funzione  $F(t)$  e tangenti con  $t$  crescente e  $-a/\sqrt{2} < t \leq 0$ .

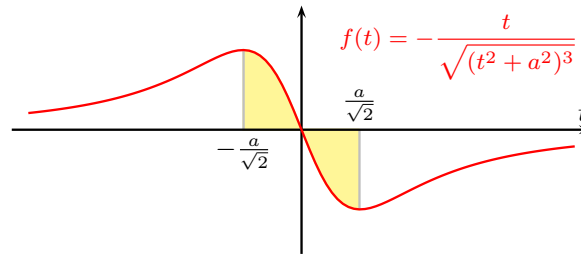
Successivamente l'inclinazione, pur rimanendo positiva, tende a diminuire fino ad annullarsi in corrispondenza di  $t = 0$  (fig. 7.).

Sulla base di queste osservazioni e sfruttando la simmetria dispari di  $f(t)$  proponiamo nella figura 8 un suo grafico approssimativo dove riportiamo le ascisse dei suoi punti di massimo e minimo che, come detto, coincidono con i punti di flesso di  $F(t)$ .

– Per la simmetria dispari di  $f(t)$ , l'area  $\mathcal{A}$  della regione evidenziata in figura 8 è data dall'integrale definito

$$\mathcal{A} = -2 \cdot \int_0^{a/\sqrt{2}} f(t) dt, \tag{17}$$

dove il segno negativo si giustifica in quanto nell'intervallo  $[0, a/\sqrt{2}]$  l'integrale fornirebbe



**Fig. 8.** Grafico della funzione  $f(t)$  e punti di estremo.

un valore negativo dato che  $f(t) < 0$ .

Poiché  $F(t)$  è una primitiva di  $f(t)$  abbiamo che (17) diviene

$$\mathcal{A} = -2[F(t)]_0^{a/\sqrt{2}} = -2\left[F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - 0\right]$$

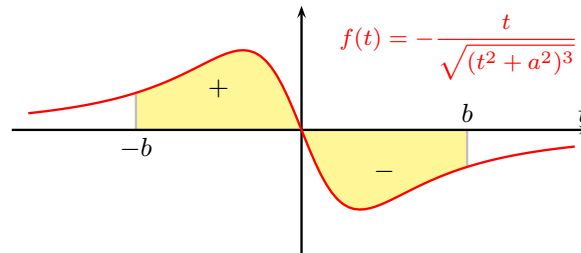
ma, ripreso il risultato (16), troviamo

$$\mathcal{A} = -2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6} - 3}{3a}\right) = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{3a}.$$

– Il calcolo dell'integrale

$$\int_{-b}^b f(t) dt \quad (18)$$

è invece immediato e fornisce un risultato nullo in quanto, per la simmetria dispari di  $f(t)$  e degli estremi di integrazione, esso esprime la somma di due trapezoidi di aree uguali ma algebricamente di segno opposto (fig. 9).



**Fig. 9.** Aree della funzione  $f(t)$  e loro segno.

Più formalmente, l'integrale (18) si può suddividere nella somma

$$\int_{-b}^b f(t) dt = \int_{-b}^0 f(t) dt + \int_0^b f(t) dt \quad (19)$$

e definito il cambio di variabile

$$t = -z, \quad \implies \quad dt = -dz, \quad \implies \quad z_{inf} = -(-b) = b, \quad z_{sup} = 0$$

si può riscrivere il primo addendo di (19)

$$\int_{-b}^0 f(t)dt = \int_b^0 f(-z)(-dz) = \int_b^0 [-f(z)](-dz) = \int_b^0 f(z)dz = -\int_0^b f(z)dz$$

dove si sono utilizzate la simmetria di  $f(t)$  e, nell'ultimo passaggio, la proprietà dell'inversione degli estremi di integrazione. In tal modo l'integrale (19) si riduce alla somma di due valori opposti

$$\int_{-b}^b f(t)dt = -\int_0^b f(t)dt + \int_0^b f(t)dt = 0.$$

**Quesito n. 1: soluzione.** (testo del quesito)

Assegnata la funzione  $f$  nella forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d}, \quad d \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p(x) = \text{polinomio}, \quad (1)$$

il suo grafico interseca l'asse  $x$  nei punti di ascisse  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 12/5$  per cui questi valori devono essere le soluzioni dell'equazione  $f(x_{1,2}) = 0$  che, essendo  $f$  data da un rapporto, si riflettono su  $p(x_{1,2}) = 0$ . Supponendo che il grado del polinomio  $p(x)$  sia  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p(x)$  si potrà scomporre nel prodotto

$$p(x) = (x - 0)\left(x - \frac{12}{5}\right) \cdot q(x) = x\left(x - \frac{12}{5}\right)q(x) \quad (2)$$

con  $q(x)$  a sua volta polinomio di grado  $n = m - 2$ .

L'esistenza di due asintoti verticali di equazioni  $x = \pm 3$  impone invece che il denominatore  $D(x) = x^2 + d$  si annulli in corrispondenza di tali valori: pertanto

$$D(\pm 3) = 0 \quad \implies \quad (\pm 3)^2 + d = 0 \quad \implies \quad d = -9.$$

Inoltre il numeratore dovrà soddisfare la condizione  $p(\pm 3) \neq 0$ .

Con tali informazioni la funzione  $f$  assume la forma

$$f(x) = \frac{x\left(x - \frac{12}{5}\right)q(x)}{x^2 - 9}, \quad (3)$$

ma la presenza nel suo grafico dell'asintoto orizzontale di equazione  $y = 5$  implica che il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{sia } a) \text{ finito e } b) \text{ pari a } 5.$$

La prima condizione è soddisfatta se sono uguali i gradi dei polinomi a numeratore e a denominatore e poiché il grado del denominatore è 2, allora il grado  $n$  di  $q(x)$  dev'essere  $n = 0$ .  $q(x)$  è perciò una costante e poniamo  $q(x) = a$ . La seconda condizione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

permette di determinare  $a$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax(x - \frac{12}{5})}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2(1 - \frac{12}{5x})}{x^2(1 - \frac{9}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(1 - \frac{12}{5x})}{1 - \frac{9}{x^2}},$$

e poiché

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x^2} = 0$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(1 - \frac{12}{5x})}{1 - \frac{9}{x^2}} = a \implies a = 5. \quad (4)$$

La funzione richiesta è, in definitiva,

$$f(x) = \frac{5x(x - \frac{12}{5})}{x^2 - 9} = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 3\}, \quad (5)$$

e la ricerca dei suoi estremi si fonda sul calcolo della derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x - 12)(x^2 - 9) - 2x(5x^2 - 12x)}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{12x^2 - 90x + 108}{(x^2 - 9)^2} = \frac{6(2x^2 - 15x + 18)}{(x^2 - 9)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

e sullo studio del suo segno,  $f'(x) \geq 0$ . Quest'ultimo dipende solo dal termine quadratico a numeratore di (6) per cui

$$2x^2 - 15x + 18 \geq 0 \implies x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{4} = \begin{matrix} \nearrow 6 \\ \searrow 3/2 \end{matrix}$$

e quindi  $f'(x) \geq 0$  nell'insieme  $]-\infty, 3/2] \cup [6, +\infty[$ . Nella rappresentazione grafica del segno della derivata prima e degli intervalli in cui  $f$  è crescente/decrescente (fig. 1) appare evidente che  $x_M = 3/2$  è l'ascissa di un massimo relativo proprio mentre  $x_m = 6$  quella di un minimo relativo proprio.

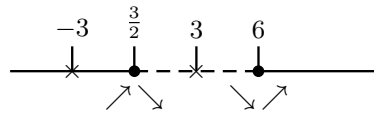


Fig. 1. Segno di  $f'(x)$ .

### Quesito n. 2: soluzione. (testo del quesito)

La funzione polinomiale,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2017} + x^{2019}, \quad (1)$$

di grado 2019 e somma di potenze dispari della variabile  $x$ , è una funzione dispari: difatti

$$g(-x) = \sum_{n=1}^{1010} (-x)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{1010} [-(x^{2n-1})] = -\sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Inoltre i suoi limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

in quanto  $g$  si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2019} \left( \frac{1}{x^{2018}} + \frac{1}{x^{2016}} + \cdots + \frac{1}{x^2} + 1 \right)$$

e il termine di grado massimo ha limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2019} = \pm\infty$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^{2018}} + \frac{1}{x^{2016}} + \cdots + \frac{1}{x^2} + 1 \right) = 1.$$

Circa le proprietà di  $g$  notiamo che essa assume agli estremi dell'intervallo  $[-1, 1]$  i valori

$$g(1) = \sum_{n=1}^{1010} (1)^{2n-1} = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}^{1010 \text{ volte}} = 1010 > 0 \quad (3)$$

e quindi per simmetria

$$g(-1) = -g(1) = -1010 < 0. \quad (4)$$

Inoltre la sua derivata prima

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots + 2017x^{2016} + 2019x^{2018} \\ &= \sum_{n=1}^{1010} (2n-1) \cdot x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{1010} (2n-1)(x^{n-1})^2 \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5)$$

è costituita dalla somma di potenze pari di  $x$  cosicché certamente soddisfa la diseuguaglianza

$$g'(x) > 0 \quad x \in [-1, 1]. \quad (6)$$

Tali proprietà soddisfano le ipotesi del teorema degli zeri (o di B. Bolzano) per cui deve esistere un valore  $x_0 \in [-1, 1]$  tale che  $g(x_0) = 0$ . Inoltre, data la positività di  $g'(x)$  con  $x \in [-1, 1]$  e quindi per la monotonia strettamente crescente in tale intervallo, tale valore è unico e non può che essere, per la simmetria,  $x_0 = 0$ : difatti non solo risulta

$$g(0) = \sum_{n=1}^{1010} (0)^{2n-1} = 0$$

ma pure tale valore emerge evidente nella riscrittura di  $g$  come prodotto

$$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2016} + x^{2018}):$$

difatti tale prodotto si annulla solo per  $x = 0$  in quanto il secondo fattore è diverso dallo zero per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

• Il limite richiesto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} \quad (7)$$

comporta evidentemente lo studio di una indeterminazione del tipo  $\infty/\infty$  in quanto entrambe le funzioni coinvolte possiedono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1,1^x = +\infty.$$

Analizziamo quindi l'eventuale applicabilità del teorema di De L'Hôpital determinando il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{D[1,1^x]}. \quad (8)$$

Ripresa la (5) ed eseguendo la derivata del denominatore otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{D[1,1^x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{1010} (2n-1)(x^{n-1})^2}{1,1^x \cdot \ln(1,1)}$$

che rientra ancora nel caso  $\infty/\infty$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{1010} (2n-1)(x^{n-1})^2 = +\infty.$$

Osserviamo comunque come il polinomio a numeratore abbia ora il grado massimo pari a 2018 e quindi inferiore di una unità rispetto a 2019. Ciò suggerisce di procedere comunque allo stesso modo per altre 2018 volte ottenendo alla fine, a numeratore, una costante  $k$  mentre al denominatore avremo il termine

$$1,1^x \cdot [\ln(1,1)]^{2019}.$$

Poiché il limite di questo termine è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1,1^x \cdot [\ln(1,1)]^{2019} = +\infty \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k,$$

esiste di conseguenza il limite dell'ultimo rapporto ed è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{1,1^x \cdot [\ln(1,1)]^{2019}} = 0.$$



Diviene quindi possibile applicare a ritroso il teorema di De L'Hôpital per 2018 volte e concludere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = 0.$$

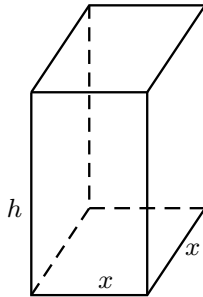
**Quesito n. 3: soluzione.** (testo del quesito)

Sia  $x > 0$  la misura della lunghezza del lato del quadrato di base e  $h > 0$  l'altezza del parallelepipedo (fig. 1). L'area  $S$  della superficie totale è evidentemente

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot (\text{area di base}) + 4 \cdot (\text{area faccia laterale}) = 2(x^2) + 4(hx) \\ &= 2x^2 + 4hx \end{aligned} \quad (1)$$

e poiché devono valere le limitazioni  $x > 0$  e  $h > 0$  per cui pure  $hx > 0$ , dalla (1) discende

$$4hx = S - 2x^2 > 0 \implies S - 2x^2 > 0 \implies x^2 < \frac{S}{2} \implies x < \sqrt{\frac{S}{2}}. \quad (2)$$



**Fig. 1.** Parallelepipedo rettangolo e sue dimensioni.

La somma  $y$  delle lunghezze degli spigoli è la grandezza da studiare e in termini delle dimensioni del parallelepipedo è data dalla

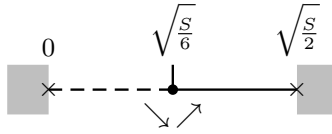
$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot (\text{somma spigoli di base}) + 4 \cdot (\text{altezza}) = 2(4x) + 4h \\ &= 8x + 4h. \end{aligned} \quad (3)$$

Tale grandezza dipende da entrambe le dimensioni del parallelepipedo e per poterla studiare va riportata ad una sola variabile. A tal fine utilizziamo l'informazione sull'area complessiva esplicitando  $h$  nella (1)

$$h = \frac{S - 2x^2}{4x} : \quad (4)$$

sostituita questa espressione nella (3) riduciamo la funzione  $y$  ad una sola variabile aggiungendovi le limitazioni (2)

$$\begin{cases} y = 8x + 4\left(\frac{S - 2x^2}{4x}\right) = 8x + \frac{S}{x} - 2x = 6x + \frac{S}{x} \\ 0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}. \end{cases}$$



**Fig. 2.** Segno di  $y'$  e crescita/decrecenza di  $y$ .

Per la ricerca del minimo di  $y$  calcoliamo la sua derivata prima e ne studiamo il segno

$$y' = 6 - \frac{S}{x^2} \geq 0 \implies 6x^2 - S \geq 0 \implies x^2 \geq \frac{S}{6} \implies x \geq \sqrt{\frac{S}{6}}$$

rappresentandolo poi nella figura 2 assieme alle limitazioni.

La funzione  $y$  presenta quindi un minimo in corrispondenza di  $x_{min} = \sqrt{S/6}$  cui corrisponde un'altezza del parallelepipedo che, dalla (4), risulta

$$\begin{aligned} h &= \frac{S}{4x_{min}} - \frac{x_{min}}{2} = \frac{\sqrt{6S}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{6}} \\ &= \sqrt{S} \left( \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12} \right) = \sqrt{\frac{S}{6}} = x_{min} \end{aligned}$$

per cui, in definitiva, il parallelepipedo che minimizza la somma delle lunghezze degli spigoli si riduce ad un cubo.

**Quesito n. 4: soluzione.** (testo del quesito)

Assegnati i punti nello spazio  $A(2, 0, -1)$  e  $B(-2, 2, 1)$  e definito il punto generico  $P(x, y, z)$  le distanze  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  sono espresse dalle

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2} \quad (1)$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \quad (2)$$

per cui la relazione  $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB}$  si esplicita in

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri

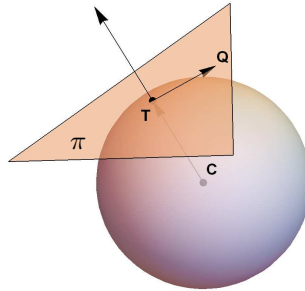
$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2]$$

e sviluppando i quadrati

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + z^2 + 1 + 2z = 2x^2 + 8 + 8x + 2y^2 + 8 - 8y + 2z^2 + 2 - 4z$$

e riducendo i termini simili, otteniamo l'equazione in tre variabili del luogo  $S$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0. \quad (3)$$



**Fig. 1.** Sfera, centro  $C$  e punto  $T$  di tangenza del piano  $\pi$ .

Tale equazione rientra nella forma canonica della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  avente come centro il punto di coordinate  $C(-a/2, -b/2, -c/2)$  e raggio  $r^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/4 - d$ . Nel nostro caso, l'equazione (3) rappresenta una sfera (fig. 1) di centro

$$C\left(-\frac{12}{2}, \frac{8}{2}, \frac{6}{2}\right) \equiv (-6, 4, 3)$$

e raggio

$$r^2 = 36 + 16 + 9 - 13 \implies r^2 = 48 \implies r = 4\sqrt{3}.$$

- La verifica che  $T(-10, 8, 7) \in S$  si esegue sostituendo le coordinate di  $T$  nell'equazione (3)

$$(-10)^2 + 8^2 + 7^2 + 12(-10) - 8 \cdot 8 - 6 \cdot 7 + 13 = 0$$

e poiché l'uguaglianza è verificata,

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0 \implies 0 = 0$$

la risposta è affermativa.

- Il vettore  $\overrightarrow{CT}$  che collega il centro  $C$  della sfera con il punto  $T$  (in fig. 1 è applicato al punto  $T$ ) è perpendicolare al piano  $\pi$  tangente in  $T$  a  $S$ . Se quindi  $Q(x, y, z)$  è un punto di  $\pi$ , il piano si può descrivere tramite il prodotto scalare

$$\pi: \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 \tag{4}$$

che sintetizza la perpendicolarità tra  $\overrightarrow{CT}$  e  $\overrightarrow{TQ}$ . Poiché

$$\overrightarrow{CT} = (-10 + 6, 8 - 4, 7 - 3) \equiv (-4, 4, 4), \quad \overrightarrow{TQ} = (x + 10, y - 8, z - 7)$$

il prodotto (4) si esplicita in

$$\begin{aligned} \pi: (-4, 4, 4) \cdot (x + 10, y - 8, z - 7) &= 0 \\ -4(x + 10) + 4(y - 8) + 4(z - 7) &= 0 & : 4 \\ -x - 10 + y - 8 + z - 7 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi l'equazione rappresentativa del piano è

$$\pi: x - y - z + 25 = 0.$$

**Quesito n. 5: soluzione.** (testo del quesito)

• La prima domanda chiede di determinare la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti a seguito di un lancio di 4 dadi non superi 5. Se quindi indichiamo con  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$  i numeri usciti nel lancio, va calcolata la probabilità

$$P(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5). \quad (1)$$

Poiché gli esiti possibili per un dado sono 6 e questi si possono ripetere per ciascuno dei 4 dadi, il numero  $N$  delle possibili uscite, tutte equiprobabili, è pari a  $N = 6^4$  pari al numero delle disposizioni con ripetizione di 6 oggetti a gruppi di 4.

Il numero di casi con somma  $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5$  si possono elencare: difatti

- se  $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 4$  allora tutti e 4 i dadi devono presentare come esito il numero 1 ossia (1,1,1,1) e questa eventualità si può presentare solo in  $n_1 = 1$  modalità.
- Per avere un'uscita  $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 5$  uno dei 4 dadi deve presentare il numero 2 mentre i rimanenti 3 presenteranno il numero 1. Tale situazione si può presentare in 4 modi diversi che elenchiamo come

$$(2, 1, 1, 1) \vee (1, 2, 1, 1) \vee (1, 1, 2, 1) \vee (1, 1, 1, 2)$$

ed è equivalente al numero delle combinazioni di 4 oggetti a gruppi di uno ossia

$$C_{4,1} = \binom{4}{1} = 4.$$

Utilizzando la definizione classica di probabilità, il valore cercato è quindi

$$P(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq 5) = \frac{n_1 + C_{4,1}}{N} = \frac{1 + 4}{6^4} = \frac{5}{6^4} \approx 0,0039.$$

• Perché sia  $P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n)$  con  $n \in \mathbb{N}_0$  osserviamo che in un lancio di un dado solo i numeri 3 e 6 sono multipli di 3 mentre 4 non lo sono. I casi favorevoli all'evento richiesto si ottengono sottraendo dai  $6^4$  casi possibili i  $4^4$  casi che nel prodotto non presentano il 3 o il 6. Ne segue

$$P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n) = \frac{6^4 - 4^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 0,8025.$$

Anziché procedere con il calcolo combinatorio, la probabilità richiesta si può ottenere anche sfruttando i teoremi sulla probabilità. Poiché in un dado 4 sono i numeri non multipli di 3, (1, 2, 4, 5), definito  $E_1 = (1, 2, 4, 5)$  come l'evento che vede l'uscita di uno di questi numeri nel lancio del primo dado, allora la probabilità di questo evento è  $p(E_1) = 4/6$ . L'evento composto

$$E = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge E_4$$

rappresenta invece il caso che non vi siano multipli di 3 nel lancio dei 4 dadi. Per il teorema della probabilità composta e osservato che ciascun evento  $E_i$  è indipendente dagli altri abbiamo

$$P(E) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3) \cdot p(E_4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{4}{6}\right)^4.$$

Infine, poiché siamo interessati all'evento contrario la sua probabilità è data

$$P(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 = 3 \cdot n) = 1 - P(E) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 0,8025.$$

• Per il calcolo della probabilità che in un lancio compaia come numero più elevato il 4,  $P(d_{max} = 4)$ , dobbiamo escludere la presenza dei numeri 5 e 6 in ogni dado cosicché il numero delle disposizioni con ripetizione di 4 "oggetti" a gruppi di 4 è pari a  $4^4$ . Tra questi eventi vi possono essere uscite coinvolgenti solo i numeri 1, 2, e 3 per cui il numero 4 non sarebbe presente. Volendo invece che lo sia, questi  $3^4$  casi vanno esclusi dal calcolo dei casi favorevoli cosicché il numero di questi ultimi è  $4^4 - 3^4$ . La probabilità richiesta è perciò

$$P(d_{max} = 4) = \frac{4^4 - 3^4}{6^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{175}{1296} \approx 0,1350.$$

#### Quesito n. 6: soluzione. (testo del quesito)

La legge di Faraday-Neumann dell'induzione elettromagnetica afferma che la tensione indotta (o forza elettromotrice)  $V$  in un circuito è legata alla variazione  $d\Phi(\vec{B})/dt$  di flusso del campo magnetico  $\vec{B}$  dalla relazione

$$V = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \quad (1)$$

dove il segno negativo a fattore indica, a sua volta, la legge di Lenz.

Poiché la spira di rame ha una resistenza pari a  $R = 4,0 \text{ m}\Omega$ , la legge di Ohm applicata ad essa dà

$$V = Ri(t) \quad (2)$$

mentre la definizione di flusso per una spira piana caratterizzata dal vettore  $\vec{S}$  che supponiamo parallelo e concorde al campo  $\vec{B}$  fornisce

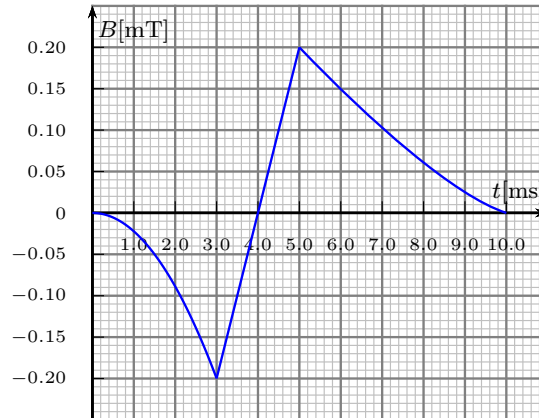
$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \quad (3)$$

con  $S = 30 \text{ cm}^2$ . Aggregando le ultime due in (1) discende

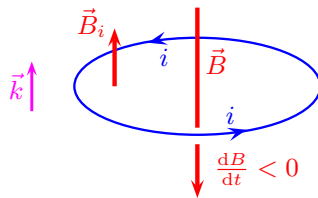
$$Ri(t) = -\frac{d(BS)}{dt} \implies Ri(t) = -S\frac{dB}{dt}$$

in quanto  $S$  non dipende dal tempo  $t$  e, quale costante, si può estrarre dalla derivata e porre a fattore. La corrente  $i(t)$  dipende quindi dalla variazione del campo come

$$i(t) = -\frac{S}{R} \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (4)$$



**Fig. 1.** Dipendenza del campo magnetico  $B(t)$  dal tempo  $t$ .



**Fig. 2.** Variazione di  $\vec{B}$  e verso della corrente con  $t \in [0, 3]$  ms.

Fissata una direzione positiva tramite il versore  $\vec{k}$  (fig. 2), nel primo intervallo dove  $0 \leq t \leq 3$  ms, l'andamento grafico di  $B(t)$  (fig. 1) mostra un campo inizialmente nullo che assume via via valori decrescenti negativi e quindi con derivata negativa,  $dB/dt < 0$ . La corrente indotta, per la (4), ha di conseguenza segno positivo e genera un campo magnetico indotto  $\vec{B}_i$  con verso opposto a  $\vec{B}$  (fig. 2).

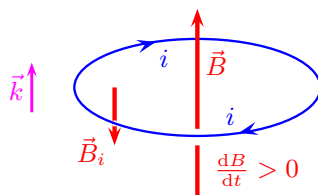
Per  $3 \text{ ms} < t \leq 5 \text{ ms}$  il campo aumenta con andamento lineare crescente e, inizialmente negativo, assume in  $[4, 5]$ ms valori positivi (fig. 3). La sua derivata è costante e positiva

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{B(5) - B(3)}{(5 - 3)\text{ms}} = \frac{[0,2 - (-0,2)]\text{mT}}{2 \text{ ms}} \\ &= 0,2 \text{ mT/ms} = 0,2 \text{ T/s} > 0 \end{aligned}$$

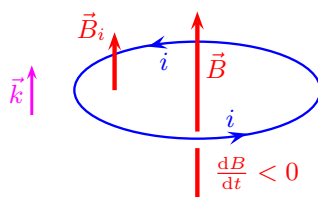
e di conseguenza la corrente indotta (4) è negativa con intensità costante pari a

$$i(t) = -\frac{(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{(4 \times 10^{-3} \Omega)} \cdot 0,2 \text{ T/s} = -0,15 \text{ A}.$$

Infine con  $5 \text{ ms} < t \leq 10 \text{ ms}$  il campo decresce fino ad annullarsi per cui  $dB/dt < 0$  e la



**Fig. 3.** Variazione di  $\vec{B}$  e verso della corrente con  $t \in [4, 5]$  ms.



**Fig. 4.** Variazione di  $\vec{B}$  e verso della corrente con  $t \in [5, 10]$  ms.

corrente ridiventa positiva (fig. 4). Riassumiamo tali osservazioni nello schema seguente:

$$\begin{aligned}
 0 \leq t \leq 3 \text{ ms}, & \quad \frac{dB}{dt} < 0 \implies i(t) > 0, \\
 3 \text{ ms} < t \leq 5 \text{ ms}, & \quad \frac{dB}{dt} = 0,2 \text{ T/s} \implies i(t) = -0,15 \text{ A}, \\
 5 \text{ ms} < t \leq 10 \text{ ms}, & \quad \frac{dB}{dt} < 0 \implies i(t) > 0.
 \end{aligned}$$

Il calcolo dei valori medi della corrente indotta nei tre intervalli deve far uso, formalmente, dell'espressione matematica che definisce il valor medio  $\bar{f}$  di una funzione nell'intervallo  $[a, b]$  ossia

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \tag{5}$$

Definiti per comodità di scrittura i tre istanti  $t_1 = 3 \text{ ms}$ ,  $t_2 = 5 \text{ ms}$ ,  $t_3 = 10 \text{ ms}$ , l'applicazione di tale integrale nel primo intervallo assume la forma

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{(t_1 - 0)} \cdot \int_0^{t_1} i(t) dt$$

che, per la (4) scriviamo come

$$\bar{i}_1 = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} \left( -\frac{S}{R} \cdot \frac{dB}{dt} \right) dt = -\frac{S}{t_1 R} \cdot \int_0^{t_1} \left( \frac{dB}{dt} \right) dt \tag{6}$$

dove si è estratto dall'integrale il fattore  $-S/R$  in quanto costante. Poiché in ambito matematico è nota la proprietà

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a) \tag{7}$$

che, a seconda della notazione utilizzata, può assumere le forme alternative

$$\int_a^x f'(t)dt = \int_a^x \left( \frac{df}{dx} \right) dx = \int_a^x df,$$

e collegate alla nozione di differenziale  $df = (df/dx)dx$ , allora la (6) si riduce alla

$$\bar{i}_1 = -\frac{S}{t_1 R} \cdot \int_0^{t_1} dB$$

e quindi per la (7)

$$\bar{i}_1 = -\frac{S}{t_1 R} \cdot [B(t_1) - B(0)].$$

Dedotti dal grafico di figura 1 i valori  $B(t_1) = -0,2 \text{ mT}$  e  $B(0) = 0 \text{ mT}$ , troviamo

$$\bar{i}_1 = -\frac{(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(-0,2 \times 10^{-3} \text{ T})}{(3 \times 10^{-3} \text{ s})(4 \times 10^{-3} \Omega)} = 0,05 \text{ A}.$$

Nel secondo intervallo il valore medio della corrente  $\bar{i}_2$  è, per (5), dato dall'integrale

$$\bar{i}_2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$$

che, con le medesime deduzioni precedenti, riportiamo come

$$\bar{i}_2 = -\frac{S}{(t_2 - t_1)R} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dB = -\frac{S}{(t_2 - t_1)R} \cdot [B(t_2) - B(t_1)].$$

Essendo  $B(t_2) = 0,2 \text{ mT}$ , il calcolo numerico fornisce il valore

$$\bar{i}_2 = -\frac{(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2)[(0,2 + 0,2) \times 10^{-3} \text{ T}]}{[(5 - 3) \times 10^{-3} \text{ s}](4 \times 10^{-3} \Omega)} = -0,15 \text{ A}.$$

Analogamente, il valor medio  $\bar{i}_3$  della corrente indotta è rappresentato da

$$\bar{i}_3 = \frac{1}{t_3 - t_2} \cdot \int_{t_2}^{t_3} i(t)dt$$

che si riconduce all'espressione

$$\bar{i}_2 = -\frac{S}{(t_3 - t_2)R} \cdot \int_{t_2}^{t_3} dB = -\frac{S}{(t_3 - t_2)R} \cdot [B(t_3) - B(t_2)]$$

e quindi al valore

$$\bar{i}_3 = -\frac{(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2)[(0 - 0,2) \times 10^{-3} \text{ T}]}{[(10 - 5) \times 10^{-3} \text{ s}](4 \times 10^{-3} \Omega)} = 0,03 \text{ A}.$$



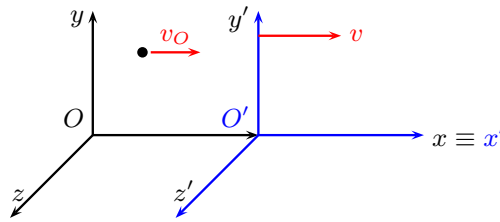


Fig. 1. Sistemi di riferimento inerziali  $O$  e  $O'$ .

**Quesito n. 7: soluzione.** (testo del quesito)

Definiti i due sistemi di riferimento  $Oxyz$ , solidale al laboratorio, e  $O'x'y'z'$  solidale alla navicella in moto lungo l'asse  $x$  con velocità relativa ad  $O$  pari a  $v = 0,80c$  (fig. 1) e indicati come

$$\Delta t = 2 \text{ ns} = 2 \times 10^{-9} \text{ s}, \quad \text{e} \quad \Delta x = 25 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (1)$$

rispettivamente, l'intervallo di tempo e lo spostamento della particella rilevati in laboratorio, la velocità di questa nel sistema di origine  $O$  è evidentemente data dal rapporto

$$v_O = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25 \times 10^{-2} \text{ m}}{2 \times 10^{-9} \text{ s}} = 1,25 \times 10^8 \text{ m/s} = 0,417c. \quad (2)$$

Per moti relativi lungo l'asse comune, la velocità  $v'_x$  osservata nel sistema  $O'$  in moto con velocità  $v$  rispetto ad  $O$ , è collegata alla velocità  $v_x$ , rilevata dall'osservatore  $O$ , dalle trasformazioni di Lorentz per le velocità

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z. \quad (3)$$

Identificato  $v_O$  con  $v_x$ , la prima delle (3) fornisce la velocità

$$v'_x = \frac{v_O - v}{1 - \frac{v_O v}{c^2}} = \frac{0,417c - 0,8c}{1 - \left(\frac{0,417 \cdot 0,8c^2}{c^2}\right)} = -0,575c = -1,73 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

La distanza percorsa  $\Delta x'$  e rilevata nel sistema  $O'$  così come l'intervallo di tempo  $\Delta t'$  trascorso per  $O'$  si deducono applicando le trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

che, poiché si stanno considerando intervalli, si riflettono nelle

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ciascuna delle quali con i valori presenti in (1) fornisce il risultato

$$\Delta x' = \frac{25 \times 10^{-2} \text{ s} - (0,8c) \cdot 2 \times 10^{-9} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0,8)^2}} = -0,383 \text{ m}$$

$$\Delta t' = \frac{2 \times 10^{-9} \text{ s} - (0,8/c) \cdot 25 \times 10^{-2} \text{ m}}{\sqrt{1 - (0,8)^2}} = 2,22 \times 10^{-9} \text{ s.}$$

Notiamo infine che la velocità media  $v'_x$  rilevata dalla navicella si ottiene pure dal rapporto delle ultime due grandezze  $v'_x = \Delta x' / \Delta t'$ .

**Quesito n. 8: soluzione.** (testo del quesito)

Una particella con carica  $e$ , qual è il protone, immessa in un campo magnetico  $\vec{B}$  con velocità  $\vec{v}$  è soggetta alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

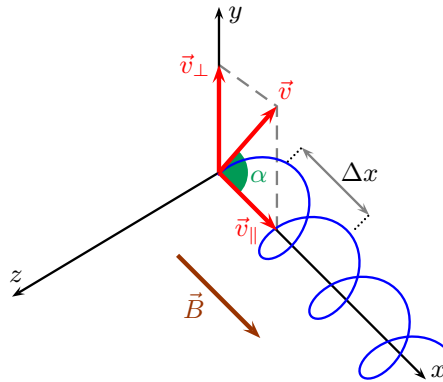
Se si scompone la velocità nella somma di due componenti,  $\vec{v}_\perp$  vettore componente perpendicolare al campo magnetico  $\vec{B}$  e  $\vec{v}_\parallel$  vettore componente parallelo a  $\vec{B}$  per cui

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel,$$

la forza di Lorentz si riscrive come

$$\vec{F} = e(\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} = e(\vec{v}_\perp \times \vec{B}) + e(\vec{v}_\parallel \times \vec{B}) = e\vec{v}_\perp \times \vec{B} \quad (2)$$

in quanto i due vettori  $\vec{v}_\parallel$  e  $\vec{B}$  sono paralleli per cui  $\vec{v}_\parallel \times \vec{B} = \vec{0}$ .



**Fig. 1.** Traiettoria del protone, velocità e campo magnetico.

Supposto il vettore  $\vec{B}$  parallelo all'asse  $x$  (fig. 1), la (2) mostra come tale forza debba agire nel piano  $yz$  avendo nulla, in ogni istante del moto, la sua componente lungo l'asse  $x$ . Sempre dalla (2) ricaviamo il suo modulo

$$F = ev_\perp B \quad (3)$$

che, essendo costante, è responsabile del moto circolare uniforme della particella nel piano  $yz$ . Poiché lungo l'asse  $x$  nella direzione del campo non agiscono forze, la particella procede di moto rettilineo uniforme con la velocità  $v_{\parallel}$ . La combinazione di questi due moti genera, appunto, la traiettoria ad elica cilindrica richiamata dal testo.

Considerando il moto sul piano  $yz$ , l'applicazione della seconda legge della dinamica fornisce la relazione

$$ev_{\perp}B = m \frac{v_{\perp}^2}{r}$$

essendo  $r$  il raggio della circonferenza e  $v_{\perp}^2/r$  l'accelerazione centripeta del moto. Da quest'ultima relazione possiamo determinare la componente  $v_{\perp}$  ossia

$$v_{\perp} = \frac{eBr}{m} \quad (4)$$

e quindi, sostituendo i dati del problema e i valori delle **costanti** fisiche, ottenere il suo valore

$$v_{\perp} = \frac{(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-3} \text{ T})(10,5 \times 10^{-2} \text{ m})}{1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 1,01 \times 10^4 \text{ m/s}.$$

Se  $T$  è il periodo di rotazione, la cinematica del moto circolare fornisce pure la relazione

$$v_{\perp} = \frac{2\pi r}{T} \quad (5)$$

per cui uguagliandola con (4) discende

$$\frac{eBr}{m} = \frac{2\pi r}{T} \implies T = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (6)$$

Poiché il passo  $\Delta x$  dell'elica (fig. 1) è la distanza percorsa alla velocità  $v_{\parallel}$  nell'intervallo di tempo  $T$  la cinematica del moto rettilineo uniforme assicura  $\Delta x = v_{\parallel} \cdot T$  e quindi la componente parallela al campo della velocità è, per la (6),

$$v_{\parallel} = \frac{\Delta x}{T} = \frac{eB\Delta x}{2\pi m} \quad (7)$$

e numericamente

$$v_{\parallel} = \frac{(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-3} \text{ T})(38,1 \times 10^{-2} \text{ m})}{2\pi(1,673 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 5,81 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

Ottenute in (4) e (7) le due componenti della velocità, il suo modulo è

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$$

che, con i valori numerici trovati risulta

$$v = \sqrt{(1,01 \times 10^4)^2 + (5,81 \times 10^3)^2} \text{ m/s} = 1,17 \times 10^4 \text{ m/s}. \quad (8)$$

Infine l'angolo  $\alpha$  che il vettore velocità  $\vec{v}$  forma con la direzione del campo magnetico (fig. 1) è

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \implies \alpha = \text{arctg} \left( \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \right), \quad (9)$$

per cui, introdotti i valori numerici delle due componenti, assume il valore

$$\alpha = \text{arctg} \left( \frac{1,01 \times 10^4}{5,81 \times 10^3} \right) = 60,1^\circ.$$

# APPENDICE

Nelle pagine seguenti proponiamo, senza soluzioni, il testo delle prove assegnate nelle sessioni suppletiva e straordinaria dei corsi di liceo scientifico di ordinamento e opzione scienze applicate (LI02, LI03).

## **Indice delle prove suppletive**

Esame 2019 sessione suppletiva . . . . .	39
Esame 2019 sessione straordinaria . . . . .	43

# Esame 2019: sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

## Problemi

1) Al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}), & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4}, & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

- Discutere segno e continuità della funzione  $f_a$  al variare del parametro  $a$ . Dimostrare che, qualunque sia  $a \in \mathbb{R}$ , la funzione  $f_a$  ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con  $f$  la funzione ottenuta da  $f_a$  per  $a = 2$ , stabilire se  $f$  è derivabile in  $x = 0$ . Studiare l'andamento della funzione  $f$  specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive  $h$  e  $k$  tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h \left[ 1 + (3 - kx)e^{kx-1} \right]$$

si abbia  $g(3-x) = f(x)$  per  $x \geq 0$ .

- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente  $\vec{B}$ , viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con  $\mathcal{E}(x)$  l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo  $x$  centimetri (cm) di cammino in acqua e sia  $d\mathcal{E}$  l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto  $dx$ . Supponendo che la funzione  $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$  possa essere approssimata con la funzione  $y = g(x)$ , ponendo  $h = 9/2$  e  $k = 1$ , calcolare l'energia  $\mathcal{E}$  assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

2) Due cariche elettriche puntiformi  $Q_1 = q$  (con  $q$  positivo) e  $Q_2 = -q$  sono collocate rispettivamente nei punti  $A$  e  $B$ , posti ad una distanza  $2k$ . Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con  $r$  la retta passante per i punti  $A$  e  $B$ .

- Determinare, in un punto  $C$  della retta  $r$ , l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche  $Q_1$  e  $Q_2$ , al variare di  $C$  su  $r$ . Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.
- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da  $Q_1$  e  $Q_2$  in un punto  $P$  posto sull'asse del segmento  $AB$  decresce quando  $P$  si allontana dal punto medio di  $AB$ .

Indicata con  $x$  la distanza di  $P$  dal punto medio di  $AB$ , esprimere l'intensità del campo elettrico in  $P$  in funzione di  $x$ .

- Fissati i parametri reali positivi  $h$  e  $k$ , studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ , determinare le primitive di  $f$ .

Dimostrare che, se  $h = k^2$ , la funzione  $f$  rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo  $[0; +\infty)$ . Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

### Questionario

- 1) Fissati i numeri reali positivi  $a$  e  $b$ , con  $a \geq b$ , provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(x^a + x^b) = a.$$

- 2) È assegnata la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt.$$

Studiare il segno della funzione  $f$  e provare che essa è crescente. Determinare il valore di

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx.$$

- 3) Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un rombo è un rettangolo.

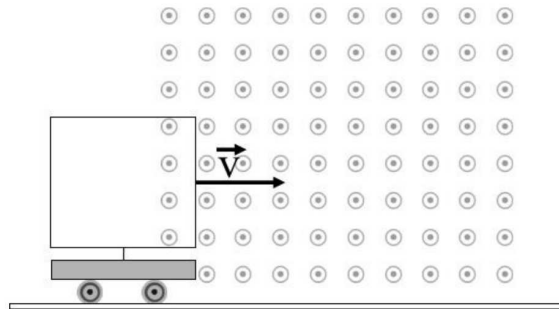
4) Considerati i punti  $A(2, 3, 6)$ ,  $B(6, 2, -3)$ ,  $C(3, -6, 2)$  nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  (dove il punto  $O$  indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera  $S$  circoscritta a tale cubo.

5) Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?

6) Consideriamo un'astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocità  $v = 0,90c$ . Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni  $a = 40$  cm,  $b = 50$  cm e  $h = 20$  cm, con il lato  $b$  disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola?

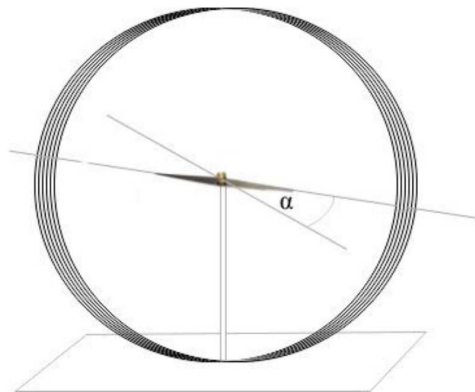
Se l'astronauta lancia la scatola con una velocità  $v_s = 0,50c$  nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l'osservatore sulla terra?

7) Una bobina è costituita da  $N$  spire quadrate di lato  $l$ , ha una resistenza elettrica  $R$  ed è montata su un carrello che può muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Il carrello viene tirato con velocità costante  $\vec{v}$  ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico  $\vec{B}$ , uscente dalla pagina come in figura. Spiegare perché la bobina si riscalda e determinare l'espressione della potenza dissipata. Cosa accade se il carrello viene lanciato con velocità  $\vec{v}$  verso la stessa regione?



8) Una bobina compatta è costituita da 130 spire di raggio  $R = 15$  cm.

Si pone un ago magnetico, le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a  $R$ , al centro della bobina, come in figura.



Il piano della bobina viene orientato in modo da contenere l'ago che, a sua volta, è orientato nella direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Quando la bobina è attraversata da corrente, l'ago devia di un angolo  $\alpha$ . Spiegare la causa di questa deviazione.

In tabella sono riportati alcuni valori, misurati sperimentalmente, di  $\alpha$  e della corrispondente corrente nella bobina. Utilizzando questi dati, misurare l'intensità della componente orizzontale del campo magnetico terrestre, con la relativa incertezza.

Deviazione di $\alpha$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$
Intensità di corrente	11,4 mA	23,3 mA	36,8 mA	52,4 mA	73,9 mA

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	$e$	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
massa del protone	$m_p$	$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
velocità della luce nel vuoto	$c$	$2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$
elettronvolt	eV	$1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$

Prove suppletive: [indice](#)



# Esame 2019: sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

## Problemi

1) Dato  $k > 0$ , si consideri la funzione  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{k}{x^2}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- Dimostrare che, qualunque sia  $k > 0$ , la funzione  $f$  è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di  $k$  le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto  $\gamma$  tale che  $\tan \gamma = 3$ ?
- Posto  $k = 1$ , sia  $r$  una retta di equazione  $y = t$ , con  $0 < t < 1$ . Detti  $S$  e  $T$  i punti d'intersezione tra  $r$  ed il grafico della funzione  $f$ , siano  $S'$  e  $T'$  le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse  $x$ . Come deve essere scelto il valore di  $t$ , in modo che sia massima l'area del rettangolo  $SS'T'T'$ ?

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio  $R$ , espresso in metri (m). La densità di carica, indicata con  $\rho$  ed espressa in coulomb al metro cubo ( $\text{C}/\text{m}^3$ ), è uniforme.

- Indicata con  $x$  la distanza di un punto  $P$  dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq R \\ \frac{kR^3}{x^2}, & \text{se } x > R \end{cases}$$

dove  $k$  è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica  $\rho$  e la dimensione fisica.

- Sia  $q$  una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica  $q$  a distanza  $2R$  dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica  $q$  a distanza infinita dal centro della sfera?

2) In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame  $RS$  rettilineo, rigido, di lunghezza  $l$ , misurata in metri (m), di massa  $m$ , misurata in chilogrammi (kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici,  $P$  e  $Q$ , posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci  $P$  e  $Q$  vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico  $\vec{B}$ , uniforme e costante, perpendicolare al filo

(fig. 1) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità  $i$ , misurata in ampère (A) e il filo  $RS$  si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui  $PR$  forma un angolo  $\theta$  con la direzione verticale (fig. 2).

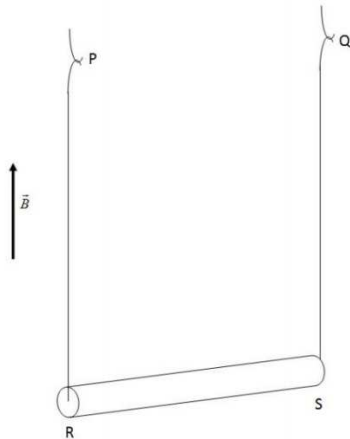


Fig.1

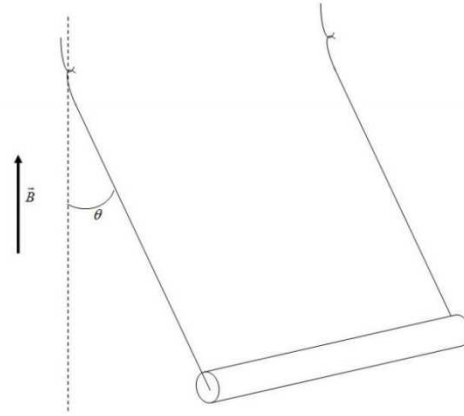


Fig.2

- Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo  $\vec{B}$  agisce sulla corrente che attraversa il tratto  $RS$ . Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?
- Rappresentare tutte le forze agenti sul filo  $RS$ . Considerando costanti  $\vec{B}$ , la massa  $m$  e la lunghezza  $l$  del filo  $RS$ , verificare che l'ampiezza dell'angolo  $\theta$  in funzione dell'intensità di corrente  $i$  è data da  $\theta(i) = \arctan\left(\frac{Bl}{mg} \cdot i\right)$ , in cui  $g$  è l'accelerazione di gravità.
- Posto  $\theta(x) = \arctan(kx)$ , si considerino, in un sistema cartesiano  $Oxy$ , le funzioni  $y = \theta(x)$  e la sua inversa  $y = \theta^{-1}(x)$ . Determinare il valore di  $k > 0$ , affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di  $k$  in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di  $30^\circ$  nell'origine.
- Posto  $k = 1$ , determinare l'equazione della funzione  $F(x)$ , primitiva di  $\theta(x)$  e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione  $y = \theta(x)$  e da esso dedurre il grafico di  $y = F(x)$ .

### Questionario

1) Determinare il valore di questo limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$ .

2) Data la funzione  $f(x) = x \sin x$  e fissato un numero  $k > 0$ , provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} k \cdot f(kx) dx$$

(dove  $x_0$  indica il minimo numero reale positivo per cui  $f(kx_0) = 0$ ) non dipende dalla scelta di  $k$ .

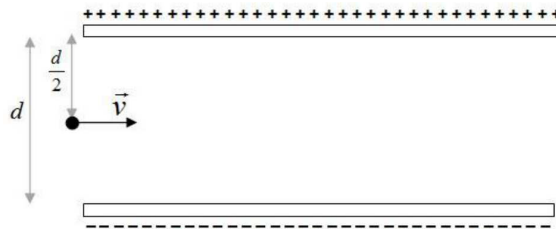
3) Dato un triangolo  $ABC$ , sia  $M$  il punto medio del lato  $BC$ . Dimostrare che, se la lunghezza di  $AM$  è la metà di  $BC$ , allora  $ABC$  è un triangolo rettangolo.

4) Dopo aver verificato che il punto  $T(1, 0, 1)$  appartiene al piano  $\pi: x - 2y + 2z = 3$ , determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto  $P(1, 0, 5)$  e tangente in  $T$  al piano  $\pi$ .

5) Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
- Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6) Un condensatore piano, costituito da due armature quadrate di lato  $l = 4,0$  cm, distanti  $d = 3,0$  cm, è soggetto a una d.d.p.  $\Delta V = 15$  V. Un elettrone vi entra perpendicolarmente al campo elettrico, come in figura, con una velocità  $v_0 = 2,5 \times 10^6$  m/s. A quale distanza dall'ingresso del condensatore deve essere posto uno schermo, affinché la deflessione verticale totale sia 20 cm?



7) Un protone viene sparato su una particella  $\alpha$  (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10 cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità  $v_0 = 5,00 \times 10^3$  m/s. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.

8) Un elettrone entra in una regione di spazio, sede di un campo magnetico di intensità  $B = 0,20$  T, con velocità di modulo  $v_0 = 1,5 \times 10^4$  m/s, che forma un angolo di  $10^\circ$  con la direzione di  $\vec{B}$ . Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico necessario affinché l'elettrone non subisca deflessione.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	$e$	$1,602 \times 10^{-19}$ C
massa dell'elettrone	$m_e$	$9,109 \times 10^{-31}$ kg
massa del protone	$m_p$	$1,673 \times 10^{-27}$ kg
massa particella alfa	$m_\alpha$	$6,645 \times 10^{-27}$ kg
costante dielettrica del vuoto	$\epsilon_0$	$8,854 \times 10^{-12}$ F/m
permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m