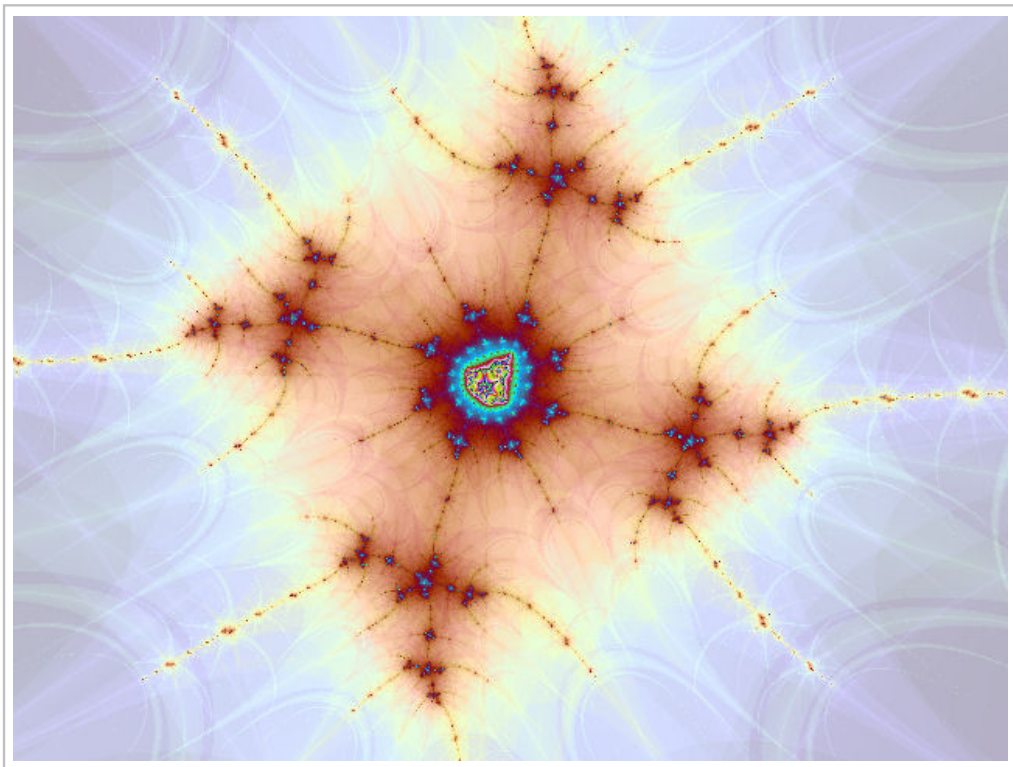


Alcune conseguenze delle leggi di Ohm e circuiti reali



LORENZO ROI

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Febbraio 2007. 

L'immagine frattale di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato nel punto $(-1.7706641038117, 0.0163329858547764)$ e ingrandito 78124 volte.

Titolo: Ortogonalità frattali.

INDICE

1.1	Interpretazione atomica delle leggi di Ohm	1
1.2	Circuiti shunt	3
1.3	Generatori di tensione	4
1.4	Misure di corrente continua	7
1.5	Misure di d.d.p. in continua	8
1.6	Ponte di Wheatstone	10
1.7	Dimensioni e unità della resistività nel C.G.S.	11

In queste pagine sviluppiamo inizialmente un semplice modello della conduzione nei conduttori metallici e trattiamo alcune conseguenze delle leggi di Ohm sui circuiti reali evidenziando le principali caratteristiche delle batterie e degli strumenti di misura.

1.1 Interpretazione atomica delle leggi di Ohm

Forniamo di seguito una semplice interpretazione modellistica delle leggi di Ohm per evidenziare alcune caratteristiche della conduzione nei metalli.

Consideriamo un conduttore cilindrico di sezione S e lunghezza l , percorso dalla corrente I .

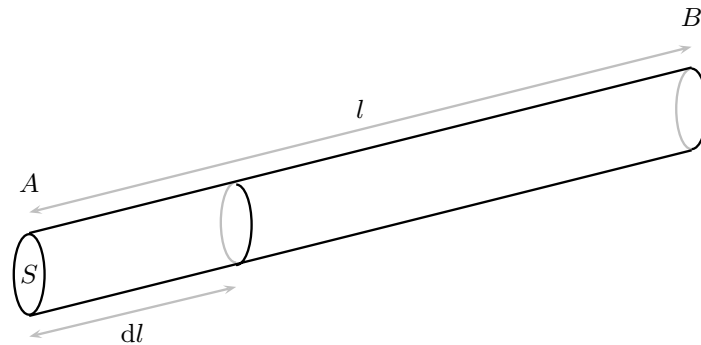


Fig. 1. Parametri per un conduttore cilindrico.

Le leggi di Ohm applicate ad un tale elemento implicano

$$V_A - V_B = V = RI \quad R = \rho \frac{l}{S} \quad \text{da cui} \quad V = \rho \frac{l}{S} I. \quad (1.a.b.c)$$

Supposto il campo \vec{E} , responsabile del moto delle cariche q , uniforme, la differenza di potenziale V si può esprimere come $V_A - V_B = V = El$ e (1.c) diviene

$$El = \rho \frac{l}{S} I \quad E = \rho \frac{I}{S} \quad \text{cioé} \quad \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} E.$$

Se ora, in analogia alle varie “densità” introduciamo una *densità di corrente* j definita come

$$j = \frac{I}{S} \quad (2)$$

e cioè la corrente che passa attraverso l’unità di area (ossia la carica che attraversa l’unità di superficie nell’unità di tempo) e chiamiamo *conduttività* la costante

$\sigma = 1/\rho$, allora le due leggi di Ohm assumono la forma $j = \sigma E$ che vettorialmente diventa

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3)$$

Per poter dedurre delle informazioni sul moto delle cariche e quindi ottenere un significato fisico di carattere atomico dell'equazione (3), è necessario delineare con maggiore precisione il ruolo della densità di corrente e quindi esprimerla nell'ambito di un qualche modello atomico.

Sia allora n il numero delle cariche per unità di volume nel conduttore: la carica per unità di volume sarà perciò $q \cdot n$. Se queste cariche, come sembra plausibile supporre, si muovono con una velocità $v = dl/dt$, il tratto di conduttore dl percorso da queste nel tempo dt , è espresso da $dl = vdt$. Attraverso la superficie S nel tempo dt passa perciò una quantità di carica $dQ = nq(dl \cdot S)$, dove $dl \cdot S$ rappresenta il volume occupato dalle cariche che hanno attraversato S . Riscritta la precedente come $dQ = nqvSdt$, dividendo per $dt \cdot S$ e ricordando la definizione di corrente elettrica $I = dQ/dt$ e la (2), discende

$$\frac{dQ}{dt \cdot S} = nqv \quad \frac{I}{S} = nqv \quad j = nqv,$$

che vettorialmente risulta

$$\vec{j} = nq\vec{v}. \quad (4)$$

Nell'ambito del pur semplice modello teorico delineato sopra, siamo riusciti ad assegnare un significato al vettore \vec{j} . Ora identificando l'espressione (3), per noi di origine sperimentale, con la (4)

$$nq\vec{v} = \sigma \vec{E} \quad \text{discende} \quad \vec{v} = \left(\frac{\sigma}{nq} \right) \vec{E} \quad (5.a.b)$$

che implica, data la costanza di σ , q , n , E , un moto delle cariche ($q = -e$ se elettroni) con velocità uniforme (detta *velocità di drift* o di deriva).

In realtà il moto effettivo è di tipo browniano con velocità v_b , anche in assenza di campo; comunque la presenza di una corrente elettrica in un conduttore ohmico implica una deriva v_d degli elettroni con la velocità media (5.b), mentre il moto casuale non contribuisce affatto alla corrente. Nel caso che i portatori di carica siano gli elettroni si trova per la velocità di origine browniana un valore medio dell'ordine di $v_b \approx 10^6$ m/s mentre per la velocità di drift è $v_d \approx 10^{-2}$ m/s. Il rapporto tra le due velocità risulta quindi molto piccolo, $v_d/v_b = 10^{-8}$.

Le deduzioni sul moto delle cariche elettriche in conduttori ohmici confermano come la presenza del reticolo cristallino e quindi dei campi elettrici ionici che si

oppongono al moto degli elettroni, influenzano in modo sensibile il moto di questi portatori di carica. Gli elettroni, negli urti con gli ioni del reticolo cristallino, cedono parte della loro energia e questa si ritrova sotto forma di calore ceduto all'ambiente da parte della resistenza (effetto Joule).

Con un'analogia di tipo macroscopico, tale moto assomiglia a quello di caduta di un corpo in un fluido, dove in aggiunta alla forza costante del peso, si sovrappone una forza di attrito viscoso che porta, in condizioni stazionarie, ad un moto con velocità costante (si veda, per esempio, l'esperienza di Millikan).

1.2 Circuiti shunt

Un qualsiasi strumento di misura è caratterizzato dal valore massimo della grandezza fisica che esso può ancora apprezzare con un errore ragionevolmente piccolo. In generale tale valore rappresenta la *portata* dello strumento. Per strumenti quali gli amperometri la massima corrente che può essere misurata dallo strumento rappresenta il *valore di fondo scala* o brevemente *fondo scala*. Per esempio un amperometro avente un fondo scala di 1 A non permette la misura di correnti superiori a questo valore: volendo comunque procedere si rischia gravi danni allo strumento.

D'altra parte con opportuni accorgimenti si può aumentare il valore di fondo scala e cioè accedere a valori superiori al valore massimo apprezzabile dallo strumento. Questa operazione consiste nell'inserire delle resistenze opportune in parallelo allo strumento ossia nel predisporre uno *shunt* o *deviazione*. Rifacendoci alla fig. 2 sia I la corrente totale da misurare (valore superiore al fondo scala dello strumento) e con I_A la corrente che attraversa l'amperometro. La prima legge di Kirchhoff applicata ad uno dei due nodi implica che la corrente I_S che attraversa la resistenza R_S dello shunt valga

$$I_S = I - I_A.$$

Poiché la resistenza interna dell'amperometro R_A è in parallelo con quella dello shunt la seconda legge di Kirchhoff permette di scrivere la

$$R_S(I - I_A) = r_A I_A,$$

per cui, esplicitando la corrente I si giunge alla

$$I = \left(1 + \frac{r_A}{R_S}\right) I_A.$$

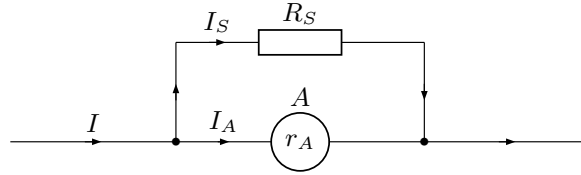


Fig. 2. Circuito shunt.

Quest'ultima esprime, noto il rapporto tra la resistenza interna e quella dello shunt, la corrente incognita I tramite la misura della I_A . Diventa pertanto possibile stimare la I in modo indiretto tramite la misura di I_A .

La medesima relazione ci fornisce pure una semplice regola per calcolare il valore di R_S da porre in parallelo allo strumento per aumentare di n volte il suo fondo scala. Difatti posto

$$\frac{I}{I_A} = n$$

è pure

$$n = 1 + \frac{r_A}{R_S}$$

da cui si ricava

$$R_S = \frac{r_A}{n - 1}.$$

In particolare se si vuole ottenere $n = 10, 100, 1000 \dots$ come di solito si fa nella pratica, R_S deve valere rispettivamente

$$R_S = \frac{r_A}{9}, \quad R_S = \frac{r_A}{99} \quad R_S = \frac{r_A}{999}.$$

Onde non introdurre ulteriori cause d'errore, le resistenze R_S da porre in parallelo devono essere tarate con molta precisione e costruite con materiali opportuni in modo da non modificare sostanzialmente la sensibilità dello strumento.

1.3 Generatori di tensione

Sappiamo che un generatore di tensione rappresenta un elemento di circuito elettrico in grado di mantenere ai suoi capi (detti *poli* o anche *morsetti*) una differenza di potenziale costante nel tempo. Ne segue che un generatore di tensione ideale, chiuso su una resistenza R sufficientemente piccola, sarebbe in grado di fornire pure una corrente arbitrariamente grande. Un tale componente potrebbe pertanto fornire una potenza comunque grande data dalla $P = V_0 I = V_0^2 / R$ ed avente l'andamento espresso dal grafico di fig. 3 al variare del *carico* esterno R .

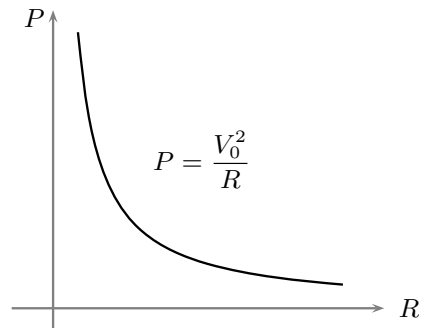


Fig. 3. Potenza fornita da un generatore ideale in funzione di R .

In effetti un generatore di tensione reale è un dispositivo che, pur essendo capace di generare la d.d.p. V_0 , offre esso stesso al passaggio della corrente una resistenza r_i , detta *resistenza interna* che non può essere eliminata essendo una caratteristica costruttiva del generatore. L'esistenza di una tale resistenza si può evidenziare studiando la variazione della d.d.p. ai capi di un tale generatore (per esempio ai capi di una batteria o di un accumulatore) tramite il circuito di fig. 4.

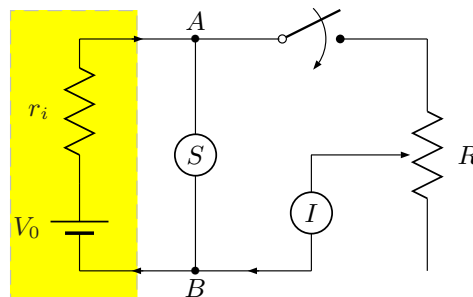


Fig. 4.

Inizialmente, a circuito aperto e quindi quando il generatore non eroga corrente, il voltmetro S rileva una d.d.p. pari a V_0 che si suole chiamare *forza elettromotrice* o *f.e.m.* del generatore. Se successivamente si chiude il circuito ai capi di una resistenza variabile R , per esempio un reostato, e misurando la corrente I che lo attraversa con un amperometro in serie, i valori che si rilevano per la d.d.p. V ai capi del generatore non rimangono costanti (caso ideale) al variare di R (e quindi di I), ma seguono l'andamento di fig. 5 che suggerisce un legge lineare del tipo

$$V = -kI + V_0. \quad (1)$$

Poiché la costante k ha le dimensioni di una resistenza e risulta dipendente dal solo generatore, viene appunto indicata come la sua *resistenza interna* $k = r_i$. Essa

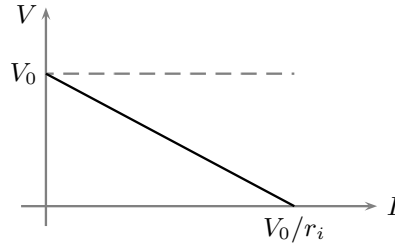


Fig. 5. Tensione ai capi di un generatore in funzione di I .

rappresenta la resistenza dell'insieme dei conduttori che costituiscono il generatore e, se questo è costituito da celle elettrolitiche, comprende pure la resistenza degli elementi elettrolitici non metallici.

Poiché ai capi della resistenza R si ha $V = RI$ si può riscrivere la (1) come

$$V_0 = V + r_i I = RI + r_i I = (R + r_i)I \quad (2)$$

che suggerisce la schematizzazione di un generatore reale: questo si può considerare come un generatore ideale di f.e.m. V_0 avente in serie una resistenza interna r_i (parte compresa nel rettangolo in colore di fig. 4). In tal modo la resistenza totale del circuito è rappresentata dalla somma tra la resistenza interna r_i e quella esterna R . Si noti che nel caso di resistenza esterna nulla, $R = 0$ (situazione di corto circuito), la d.d.p. ai capi esterni del generatore si annulla $V = 0$ ma la corrente non assume valori arbitrariamente grandi. Il valore massimo della corrente dipende dalla f.e.m. e dalla resistenza interna ed è dato da $I_{max} = V_0/r_i$ che rappresenta la *corrente di corto circuito* del generatore.

Volendo esprimere la d.d.p. ai capi del generatore in funzione di R conviene eliminare in (2) la dipendenza dalla corrente erogata I . Poiché sussiste la $I = V/R$ sostituita nella $V_0 = V + r_i I$ ed esplicitata la V risulta

$$V = V_0 \left(\frac{R}{R + r_i} \right) = V_0 \left[\frac{1}{1 + (r_i/R)} \right].$$

Detta $x = \frac{R}{r_i}$ si ottiene la funzione

$$V = V_0 \left[\frac{1}{1 + (1/x)} \right] = V_0 \left(\frac{x}{1 + x} \right)$$

che matematicamente rappresenta una funzione omografica. I valori significativi $x > 0$ comportano il grafico di fig. 6.

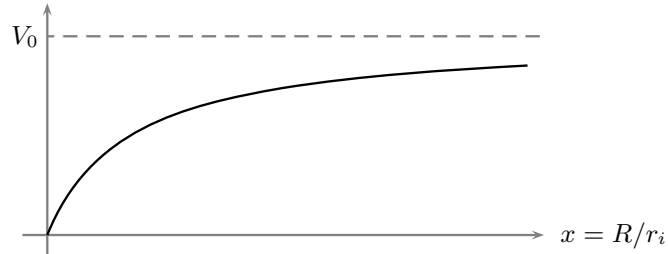


Fig. 6. Andamento della tensione in funzione di R/r_i .

Questo mostra come il comportamento del generatore tenda a quello del generatore ideale (indicato dalla retta asintotica tratteggiata), solo nel limite

$$x \rightarrow \infty \quad \text{che equivale a} \quad \frac{R}{r_i} \rightarrow \infty$$

ossia quando la resistenza interna risulta molto piccola rispetto a quella esterna. Poiché d'altra parte i valori di V_0 e r_i sono caratteristiche costruttive del generatore reale, l'approssimazione al suo comportamento ideale dipende dalla resistenza R di utilizzazione cioè dipende dal circuito che si trova al suo esterno. Ne segue che tutte le volte in cui si considereranno generatori di tensione privi della loro resistenza interna significherà che la resistenza esterna applicata risulterà sensibilmente maggiore di quella interna ritenuta trascurabile.

1.4 Misure di corrente continua

Per misurare l'intensità di corrente che attraversa un circuito o un elemento di circuito, vanno utilizzati a seconda dell'ordine di grandezza della corrente coinvolta l'*amperometro*, il *milliamperometro* oppure il *microamperometro*. Lo strumento va inserito in serie al tratto di circuito interessato in modo che la corrente da rilevare attraversi completamente lo strumento. Ciò si realizza interrompendo nel punto scelto il circuito e richiudendo la connessione mediante lo strumento. È evidente che questa operazione introduce una perturbazione nel circuito nel senso che altera il valore della corrente da misurare. Infatti lo strumento essendo costituito a sua volta da conduttori metallici possiede una sua resistenza interna r_A . Volendo misurare la corrente I che attraversa il ramo di circuito di fig. 7a, avente resistenza R e ai capi del quale è applicata la d.d.p. V_0 la legge di Ohm implica per la corrente effettiva da misurare, il valore

$$I = \frac{V_0}{R}. \quad (1)$$

L'inserimento dell'amperometro modifica il ramo del circuito in quello rappresentato dalla fig. 7b per cui la corrente realmente misurata dallo strumento è

invece

$$I_A = \frac{V_0}{R + r_A}. \quad (2)$$

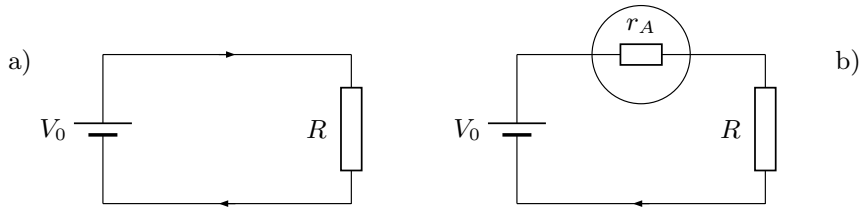


Fig. 7.

Eliminando da (1) e (2) la dipendenza da V_0 si ottiene $RI = (R + r_A)I_A$ da cui

$$I = I_A \left(1 + \frac{r_A}{R}\right)$$

che mostra come I_A sia sistematicamente minore di I a causa del termine entro parentesi proporzionale a r_A . In particolare la differenza $I - I_A$ dipende da r_A come

$$I - I_A = \frac{r_A}{R} I_A,$$

che chiarisce l'errore sistematico che si compie con tale operazione. Solo se fosse $r_A = 0$ (strumento ideale) non si verificherebbe tale errore. Inoltre la sua entità non dipende solo da una grandezza tipica dello strumento com'è r_A ma pure da una che riguarda il circuito coinvolto, cioè R . Ne segue che per eseguire una misura attendibile ci si dovrà porre nella situazione limite

$$\frac{r_A}{R} \rightarrow 0 \quad \text{dove} \quad \frac{I}{I_A} = \left(1 + \frac{r_A}{R}\right) \rightarrow 1$$

cosicché le correnti risulteranno $I \approx I_A$. In concreto, sarà possibile comunque ritenere trascurabile tale perturbazione solo se la resistenza interna r_A dell'amperometro risulta molto piccola rispetto ad R . In tal modo si comprende la ragione secondo la quale un amperometro, a parità di altri fattori, è tanto più pregevole quanto più piccola è la sua resistenza interna.

1.5 Misure di d.d.p. in continua

Sfruttando la legge di Ohm una misura di corrente può essere trasformata in una misura di d.d.p.. Basta collegare i due punti del circuito tra i quali si vuole misurare la d.d.p. mediante un milliamperometro la cui piccola resistenza interna

r_A sia stata sensibilmente aumentata mediante l'aggiunta di un'alta resistenza R posta in serie a r_A . Con questa operazione si è costruito un *voltmetro* che come risulta evidente da quanto detto, deve sempre essere collegato in parallelo all'elemento ai capi del quale si vuole misurare la d.d.p.. Indicando con V_{AB} la d.d.p. tra i punti A e B dell'elemento di circuito e I_V la corrente che attraversa il milliamperometro (fig. 8) si ha

$$V_{AB} = (R + r_A)I_V = R_V I_V$$

in cui R e r_A sono rispettivamente la resistenza aggiunta e la resistenza interna dello strumento. La quantità $R_V = R + r_A$ viene chiamata *resistenza interna* del voltmetro.

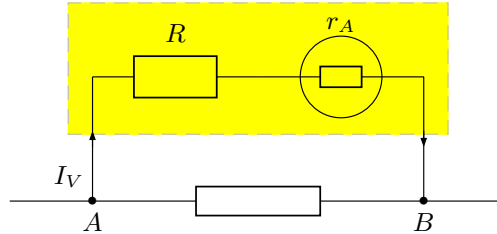


Fig. 8.

Come gli amperometri, i voltmetri così costruiti evidentemente introducono una perturbazione nel circuito in cui si vuole misurare la differenza di potenziale. Per calcolare tale perturbazione consideriamo il circuito di fig. 9a privo del voltmetro e quello di fig. 9b dove il voltmetro è inserito in parallelo alla resistenza R nei punti A e B . La V_{AB} ai capi della resistenza R si ottiene applicando le leggi di Ohm e vale

$$V_{AB} = \left(\frac{V_0}{R + R_1} \right) \cdot R, \quad (3)$$

mentre, dopo l'inserzione (fig. 9b) la differenza di potenziale rilevata V'_{AB} si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} V'_{AB} = R_V I_V \\ R_V I_V = R(I - I_V) \\ V_0 = \left(R_1 + \frac{RR_V}{R + R_V} \right) I \end{cases}$$

dove la prima dà la d.d.p. ai capi del voltmetro, la seconda esprime la relazione che intercorre tra le resistenze R e R_V e le correnti che le attraversano, mentre

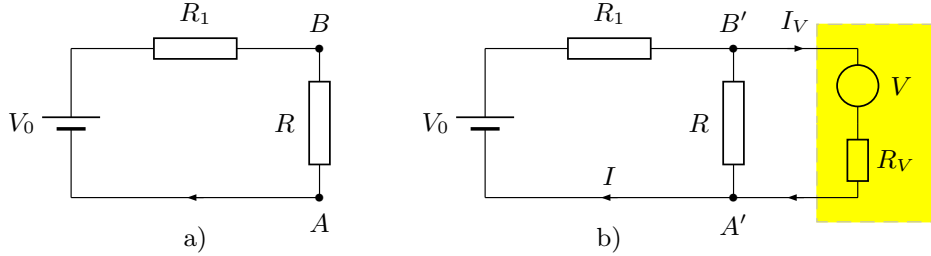


Fig. 9.

la terza fornisce la corrente I erogata dal generatore in funzione della resistenza dell'intero circuito e della f.e.m. V_0 del generatore. Eliminando la I si ottiene per la d.d.p. effettivamente misurata

$$V'_{AB} = \frac{RR_V V_0}{R_1(R_V + R) + RR_V} = \frac{V_0}{1 + R_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \right)}. \quad (4)$$

Poiché $V'_{AB} < V_{AB}$ la misura risulta sistematicamente in difetto. Eseguendo il rapporto tra la (3) e la (4) si ha

$$\begin{aligned} \frac{V'_{AB}}{V_{AB}} &= \frac{RR_V V_0}{R_1(R_V + R) + RR_V} \cdot \frac{R + R_1}{RV_0} = \frac{R_V(R + R_1)}{R_1 R_V + R_1 R + RR_V} \\ &= \frac{R_V(R + R_1)}{R_V(R + R_1) + RR_1} = \frac{1}{1 + \frac{R_1 R}{R_V(R + R_1)}} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{R_1}{R + R_1} \right) \cdot \frac{R}{R_V}}. \end{aligned}$$

Considerando come assegnate le resistenze R e R_1 questo rapporto tende ad 1 quando $R/R_V \rightarrow 0$ ossia

$$\frac{V'_{AB}}{V_{AB}} \rightarrow 1 \quad \text{se} \quad \frac{R}{R_V} \rightarrow 0.$$

In definitiva, contrariamente all'amperometro, un voltmetro risulta tanto più attendibile quanto più elevata è la sua resistenza interna R_V .

1.6 Ponte di Wheatstone

Il circuito di fig. 10, detto *ponte di Wheatstone*, permette di misurare la resistenza incognita R_x in termini di quelle note R_1, R_2, R_3 .

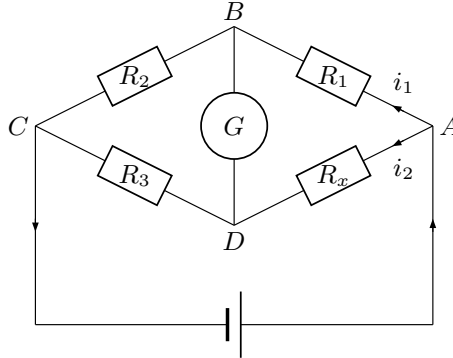


Fig. 10. Ponte di Wheatstone.

Supponiamo di disporre di varie resistenze note, tali che inserite opportunamente nei rami AB , BC , e CD , realizzino la *condizione di corrente nulla* attraverso l'amperometro G (meglio se galvanometro).

In tali ipotesi $V_B = V_D$ e perciò la corrente i_1 che entra nel nodo B , proveniente dal ramo AB , sarà la stessa che ne esce, attraversando la resistenza R_2 . Per lo stesso motivo (I legge di Kirchhoff), se i_2 attraversa R_x , questa percorrerà anche R_3 . Allora

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= R_1 i_1 & V_B - V_C &= R_2 i_1 \\ V_A - V_D &= R_x i_2 & V_D - V_C &= R_3 i_2 \end{aligned} \quad (1)$$

ed essendo $V_B = V_D$, è anche

$$V_A - V_B = V_A - V_D \quad V_B - V_C = V_D - V_C.$$

Facendo i rapporti del primo e terzo termine e del secondo e quarto delle (1) si ha

$$\frac{R_1 i_1}{R_x i_2} = \frac{R_2 i_1}{R_3 i_2}.$$

Moltiplicando per i_2/i_1 , si ottiene

$$\frac{R_1}{R_x} = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{da cui} \quad R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

che permette di conoscere R_x in termini delle altre resistenze note.

1.7 Dimensioni e unità della resistività nel C.G.S.

Posto ρ = resistività, R = resistenza, S = superficie, l = lunghezza, V = differenza di potenziale, I = corrente, q = carica, L = lavoro, F = forza,

t = tempo, dalle leggi di Ohm discende

$$\rho = \frac{RS}{l} = \frac{V}{I} \cdot \left(\frac{S}{l} \right) = \frac{L}{qI} \cdot \frac{S}{l} = \frac{F \cdot l}{q \cdot q/t} \cdot \frac{S}{l} = \frac{FSt}{q^2}$$

e poiché nel C.G.S. $F = q^2/l^2$ cioè $q^2 = Fl^2$, sostituendo

$$\rho = \frac{FSt}{Fl^2} = t$$

dove si è tenuto presente che la superficie è dimensionalmente una [lunghezza]².

La dimensione fisica è allora un tempo e l'unità di misura il secondo. La resistività di un corpo nel C.G.S. si misura in secondi! Ciò si può collegare all'interpretazione delle leggi di Ohm per quanto riguarda il moto dei portatori di carica nei conduttori.