Esame liceo Scientifico 2010: ordinamento

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMI

Problema 1. Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$, $x \in \mathbf{R}$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0,1)$? E nel punto $S(1,0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

Problema 2. Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b. La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e (e = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

QUESTIONARIO

Quesito 1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

Quesito 2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

Quesito 3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

Quesito 4. Si calcoli $\lim_{x\to\infty} 4x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Quesito 5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità del serbatoio?

Quesito 6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$

Quesito 7. Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

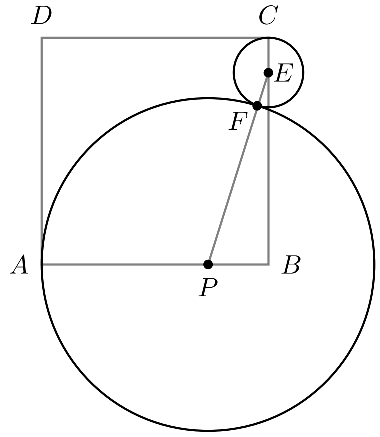
Quesito 8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

Quesito 9. Si provi che non esiste un triangolo ABC, con $AB = 3$, $AC = 2$ e $\widehat{ABC} = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\widehat{ABC} = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

Quesito 10. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

PROBLEMI

Problema 1. Si ha $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1$ e $P \in AB \Longrightarrow \overline{AP} = x$ con $0 \leq x \leq 1$.



1) Detto r il raggio incognito di λ cioè $\overline{CE} = r = \overline{EF}$, essendo F il punto di tangenza delle due circonferenze γ e λ. Il triangolo $\triangle PBE$ è rettangolo per cui, per Pitagora

$$\overline{PE}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BE}^2. \tag{1}$$

Ma

$$\begin{aligned}
\overline{PE} &= \overline{PF} + \overline{EF} = \overline{AP} + \overline{EF} = x + r, \\
\overline{PB} &= \overline{AB} + \overline{AP} = 1 - x, \\
\overline{BE} &= \overline{BC} + \overline{CE} = 1 - r.
\end{aligned}$$

Ne segue dalla (1)

$$\begin{gathered}
(x + r)^2 = (1 - x)^2 + (1 - r)^2 \\
x^2 + r^2 + 2rx = 1 + x^2 - 2x + 1 + r^2 - 2r \\
2rx + 2r = 2 - 2x \\
2r(x + 1) = 2(1 - x)
\end{gathered}$$

e quindi

$$r = \frac{1 - x}{1 + x} \quad \text{con } x + 1 \neq 0,$$

che, per le condizioni è certamente soddisfatta.
2) La funzione

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$$

ha dominio $\mathcal{D} = \mathbf{R} - \{-1\}$ in quanto deve essere $x + 1 \neq 0$.
La funzione è conosciuta in quanto rientra nelle funzioni omografiche. È pertanto un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti e traslata. Gli asintoti

di tale funzione sono dati dal rapporto dei coefficienti della x del numeratore e denominatore:

$$y_A = \frac{-1}{1} = -1 \quad \text{per quello orizzontale,}$$

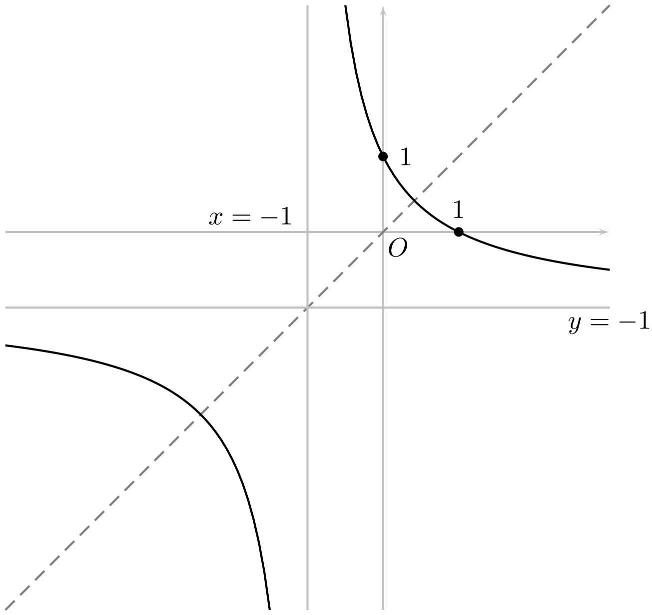
dalla

$$1 + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \quad \text{per quello verticale.}$$

Poiché

$$f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1,$$

il grafico discende immediatamente $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$.



Affinché una funzione sia invertibile deve essere:
a) suriettiva e $f(x)$ lo è dato che l'insieme di "arrivo" $f : A \longrightarrow B$ non è stato definito esplicitamente e quindi coincide con il codominio $\mathsf{R} - \{-1\}$.
b) iniettiva, difatti da $f(x_1) = f(x_2)$ risulta

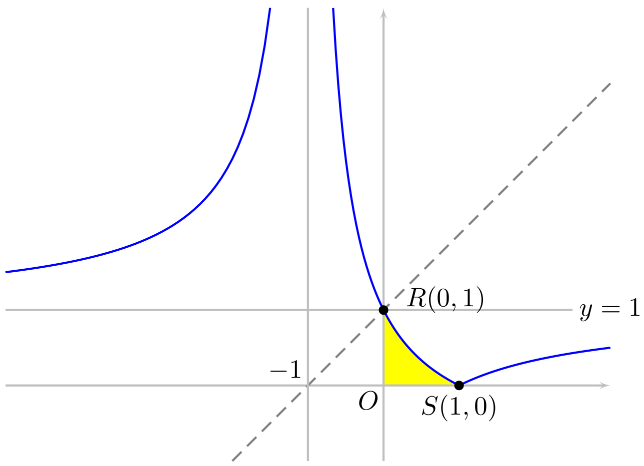
$$\begin{aligned}\frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \quad &\Longrightarrow \quad (1-x_1)(1+x_2) = (1-x_2)(1+x_1)\\ &\Longrightarrow \quad 1 + x_2 - x_1 - x_1x_2 = 1 + x_1 - x_2 - x_1x_2\\ &\Longrightarrow \quad 2x_2 = 2x_1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = x_1 \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{D}.\end{aligned}$$

La funzione è pertanto invertibile e il grafico della inversa si ottiene da quello studiato con una simmetria assiale di asse $y = x$. Poiché comunque il grafico di $f(x)$ risulta quello di un'iperbole equilatera e quest'ultima è simmetrica rispetto all'asse focale, asse che coincide con la retta $y = x$, il grafico della inversa è il grafico di $f(x)$ stesso.

3) Sia

$$g(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|, \quad x \in \mathbf{R} - \{-1\}.$$

Il grafico di $g(x)$ si ottiene ribaltando quello di $f(x)$ nei punti del dominio dove è $f(x) < 0$ (cioè per $x < -1 \veebar x > 1$) mentre coincide con quello di $f(x)$ là dove $f(x) \geq 0$, cioè per $-1 \leq x \leq 1$.



In $R(0,1)$ l'equazione della tangente si ottiene da

$$f'(x) = \frac{-1(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$t : y - f(0) = f'(0)(x-0) \quad \Longrightarrow \quad y - 1 = \frac{-2}{(1+0)^2} \cdot x$$

$$\Longrightarrow \quad y = -2x + 1.$$

Nel punto $S(1,0)$ la tangente non esiste essendo un punto angoloso. Esistono solo la tangente destra e sinistra: quella sinistra è

$$y - 0 = f'(1) \cdot (x-1) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}(x-1),$$

quella destra è

$$y - 0 = -f'(1) \cdot (x-1) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x-1).$$

4) L'area richiesta evidenziata nella figura precedente si ottiene dall'integrale definito

$$\mathcal{A}(ROS) = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \mathrm{d}x$$

Riscritta $f(x)$ come

$$\frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x},$$

forma ottenuta eseguendo la divisione con Ruffini dei polinomi $1-x$ con $1+x$

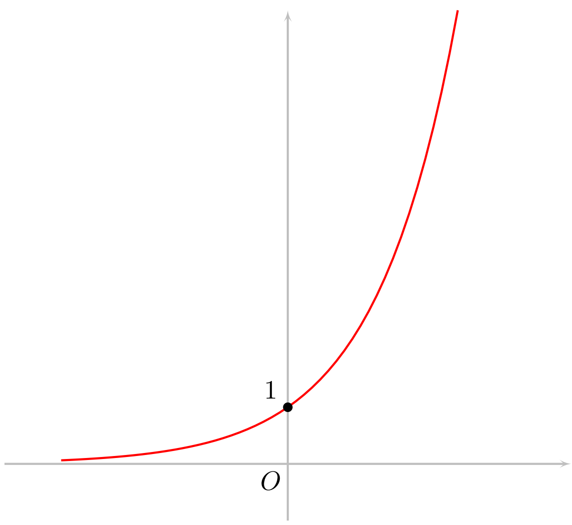
$$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 1 \\ -1 & & 1 \\ \hline & -1 & 2 \end{array}$$

l'integrale si suddivide

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ROS) &= \int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \\ &= -[x]_0^1 + 2[\ln|1+x|]_0^1 = \\ &= -1 + 2\ln 2 \approx 0.3863.\end{aligned}$$

Problema 2. $f(x) = b^x$, con $b > 0 \wedge b \neq 1$.
1) Se $b > 1$ il grafico G_b di $f(x) = b^x$ è quello della funzione esponenziale a base maggiore di 1. Tale grafico è noto e risulta sempre crescente con i limiti

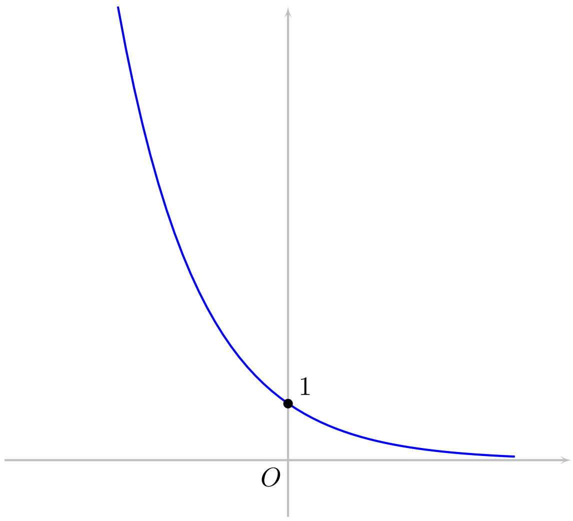
$$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty.$$



Se invece $0 < b < 1$, il grafico corrispondente è dato dalla seguente figura, dove

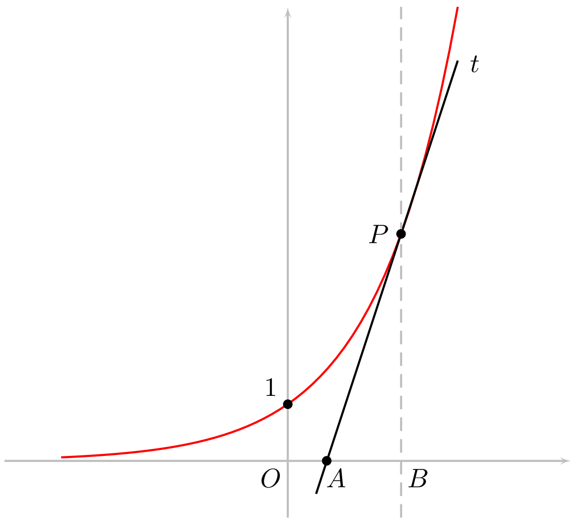
$$\lim_{x\to-\infty} b^x = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} b^x = 0,$$

e la funzione $f(x) = b^x$ è decrescente.



2) Sia $P(x_0, b^{x_0})$. Segue $B(x_0, 0)$ mentre l'equazione della retta tangente in P è

$$t : y - b^{x_0} = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$



Poiché

$$f'(x) = \mathcal{D}(b^x) = \mathcal{D}(e^{x \ln b}) = b^x \cdot \ln b,$$

risulta

$$t : y - b^{x_0} = b^{x_0} \cdot \ln b(x - x_0)$$

e l'ascissa di A si ottiene ponendo $y = 0$ da cui

$$0 - b^{x_0} = b^{x_0} \ln b(x - x_0)$$
$$-1 = x \cdot \ln b - x_0 \ln b, \quad x \ln b = x_0 \ln b - 1$$
$$x_A = x_0 - \frac{1}{\ln b}.$$

Segue

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = \left| x_0 - x_0 + \frac{1}{\ln b} \right| = \left| \frac{1}{\ln b} \right|$$

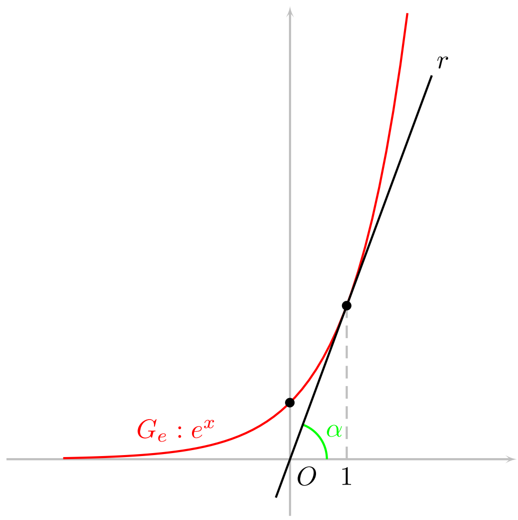
che, essendo indipendente da x_0, dimostra la costanza di $\overline{AB}$. Se $\overline{AB} = 1$ si deduce

$$1 = \frac{1}{|\ln b|} \quad \Longrightarrow \quad |\ln b| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \ln b = 1 \\ \ln b > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad b = e$$

oppure

$$\begin{cases} \ln b < 0 \\ -\ln b = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \ln b = -1 \quad \Longrightarrow \quad b = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

3) Per ottenere la retta tangente a G_e è sufficiente porre $x_A = 0$, ossia che $A \equiv O$.



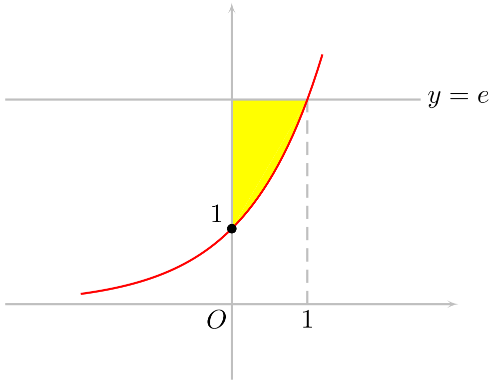
Allora posto $b = e$, $\ln e = 1$ e $x_A = x_0 - 1 = 0$ cioè $x_0 = 1$ e la retta r ha coefficiente angolare

$$f'(1) = e^1 \cdot \ln e = e = m_r.$$

Poiché il coefficiente angolare è pure la tangente goniometrica dell'angolo che la retta r forma con il semiasse x positivo, si ha

$$\operatorname{tg} \alpha = m_r \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = e \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} e \approx 1.2183 \text{ rad}.$$

4) La funzione e^x interseca $y = e$ nel punto $e^x = e$ da cui $x = 1$.



Pertanto l'area richiesta è

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (e - e^x)\mathrm{d}x = [ex - e^x]_0^1 =$$
$$= e - e - \left(0 - e^0\right) = 0 + 1 = 1.$$

QUESTIONARIO

Quesito 1. $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.
Eseguendo $p'(x)$ si ottiene

$$p'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1.$$

Analogamente $p''(x)$

$$p''(x) = a_n \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2;$$

ne segue

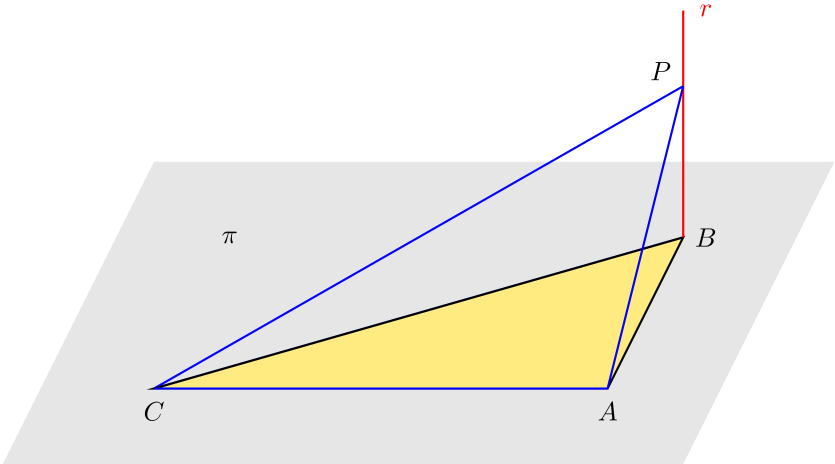
$$p^k(x) = a_n \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot x^{n-k} + \ldots + a_k$$

e quindi con $k = n$

$$p^n(x) = a_n \cdot n(n-1) \cdots (n-n+1) \quad \text{cioè}$$
$$= a_n \cdot n(n-1) \cdots 1 = a_n \cdot n!$$

essendo $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

Quesito 2. Il triangolo $\triangle PBC$ è retto in B perché r è perpendicolare al piano π del triangolo e quindi è perpendicolare ad ogni retta appartenente a π.
Analogamente $\triangle PAB$ è retto in B perché $r \perp \pi$ e quindi pure $r \perp AB$. Infine, poiché $CA \perp AB$ e $AB \perp PB$, il teorema delle tre perpendicolari assicura pure $CA \perp AP$.



Quesito 3. $f(x) = e^{3x} + 1$.
Calcolata $f'(x) = e^{3x} \cdot 3$, questa esprime la pendenza della retta tangente per cui basta porre

$$3e^{3x} = 2 \quad \Longrightarrow \quad e^{3x} = \frac{2}{3},$$

da cui

$$3x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

Quesito 4. $\lim\limits_{x\to\infty} 4x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

Posto $\frac{1}{x} = t$ si ha

$$\lim_{x\to\infty} t = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

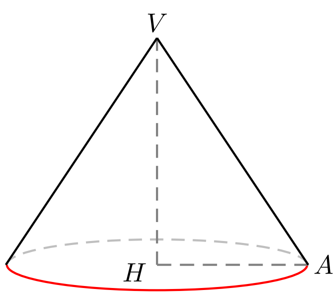
cosicché il limite diviene

$$\lim_{x\to\infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} 4 \cdot \frac{1}{t} \operatorname{sen} t = \lim_{t\to 0} 4 \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

e risulta uguale a $4 \cdot 1 = 4$ essendo

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \quad \text{(limite fondamentale)}.$$

Quesito 5. Si ha $\overline{AV} = 80$ cm.



Posto $x = \overline{VH}$ con $0 \le x \le 80$ cm,

$$\overline{AH}^2 = \overline{VA}^2 - \overline{VH}^2 = 80^2 - x^2.$$

Il volume è pertanto

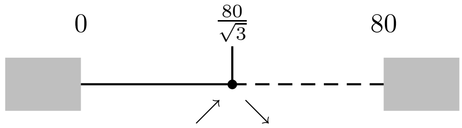
$$\begin{cases} \mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{\pi}{3}(80^2 - x^2) \cdot x \\ 0 \le x \le 80. \end{cases}$$

La $\mathcal{V}'$ fornisce $\mathcal{V}' = \dfrac{\pi}{3}[80^2 - 3x^2] \ge 0$,

$$80^2 - 3x^2 \ge 0, \quad x^2 \le \frac{80^2}{3}, \quad -\sqrt{\frac{80^2}{3}} \le x \le \sqrt{\frac{80^2}{3}}$$

ossia

$$0 \le x \le \frac{80}{\sqrt{3}}.$$



Il volume corrispondente è

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\pi}{3}\left(80^2 - \frac{80^2}{3}\right) \cdot \frac{80}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 80^3 = \\ &= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \cdot 80^3 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \cdot 80^3 \approx 206370.06 \text{ cm}^3 = \\ &= 206370 \cdot 10^{-3} \text{ l} = 206.37 \text{ l}. \end{aligned}$$

Quesito 6. $f(x) = \sqrt{\cos x}$. Il suo dominio è

$$\cos x \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Quesito 7. La continuità in $x = 4$ della funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4 & \text{per } x \le 4 \\ kx^2 - 2x - 1 & \text{per } x > 4 \end{cases}$$

implica

$$\lim_{x \to 4^-} 3x^2 - 11x - 4 = h(4) = 3 \cdot 16 - 11 \cdot 4 - 4 = 0$$

e tale limite sinistro deve essere uguale a quello destro:

$$0 = \lim_{x \to 4^+} kx^2 - 2x - 1 = k \cdot 4^2 - 8 - 1 = 16k - 9$$

da cui $k = 9/16$.

Quesito 8. Posto $\binom{n}{n-1} = a_{n-1}$, $a_{n-2} = \binom{n}{n-2}$ e $a_{n-3} = \binom{n}{n-3}$ con $n > 3$, l'essere in progressione aritmetica vuol dire che la differenza tra un elemento della successione e il precedente (o il successivo) è una costante ossia

$$a_{n-1} - a_{n-2} = \text{costante} = a_{n-2} - a_{n-3}.$$

Tenuto conto della definizione di coefficiente binomiale si ottiene l'equazione con $n > 3$

$$\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-3}$$

$$\frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} - \frac{n!}{(n-2)(n-n+2)!} = \frac{n!}{(n-2)(n-n+2)} - \frac{n!}{n-n+3}.$$

Poiché $n! = n \cdot (n-1)!$ e ricorsivamente:

$$n! = n(n-1)(n-2)!$$
$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$$

i numeratori si riscrivono come

$$\frac{n(n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!3!}$$

e quindi si semplificano in

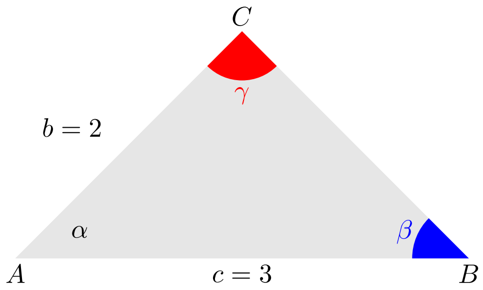
$$\begin{aligned} n - \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad \text{dividendo per } n \\ 1 - \frac{n-1}{2} &= \frac{n-1}{2} - \frac{n^2-3n+2}{6} \\ 1 - (n-1) &= -\frac{n^2-3n+2}{6} \\ 12 - 6n &= -n^2 + 3n - 2 \quad \Longrightarrow \quad n^2 - 9n + 14 = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$n = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow 7 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

e risulta accettabile solo $n = 7$.

Quesito 9. $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$, $\widehat{ABC} = \beta = \frac{\pi}{4} = 45°$. Con le solite convenzioni dei triangoli è pure $c = 3$ e $b = 2$.



Applicando il teorema dei seni

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{\overline{AB}\operatorname{sen}\beta}{\overline{AC}}$$

per cui

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{3}{2}\operatorname{sen}45^\circ = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1$$

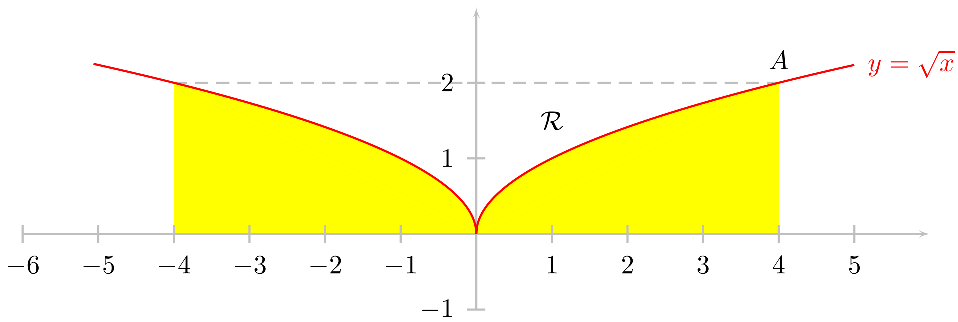
per cui non esiste alcun angolo γ. Se invece $\beta = 30^\circ = \pi/6$:

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{3}{2}\operatorname{sen}30^\circ = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

per cui $\gamma = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 48.59^\circ$ oppure $\gamma' = \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 131.4^\circ$.

In corrispondenza di γ, il terzo angolo è $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \approx 101.4^\circ$, mentre se $\gamma' \approx 131.4^\circ$ si ottiene $\alpha' = 180^\circ - \beta - \gamma' \approx 18.59^\circ$.

Quesito 10. La $y = \sqrt{x}$ rappresenta un arco di parabola in quanto, posto $x \geq 0$ e $y \geq 0$, si riduce a $x = y^2$. Se $x = 4$ risulta $y = \sqrt{4} = 2$, con $A(4,2)$ intersezione della retta $x = 4$ con l'arco.
Il volume del solido richiesto si può ottenere come differenza tra il volume del cilindro $\mathcal{V}_{\text{cil}}$ avente raggio di base $r = 4$ ed altezza 2, e il volume del solido di rotazione della regione $\mathcal{R}$ di figura e compresa tra l'asse y, l'arco di parabola e la retta $y = 2$.



Si ha pertanto

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{cil}} - \pi\int_0^2 \left(y^2\right)^2 \mathrm{d}y$$

dove si è considerato l'asse y come asse di integrazione. Si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \pi(4)^2 \cdot 2 - \pi\left[\frac{y}{5}\right]_0^2 = 32\pi - \pi\left(\frac{32}{5}\right) = 32\pi\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \\ &= 32\pi \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{5}\pi.\end{aligned}$$