

Formule goniometriche

Lorenzo Roi (luglio 2022)

Deduzione delle principali identità goniometriche

Premessa

Questo notebook presenta le deduzioni delle principali identità goniometriche a partire dalle definizioni delle funzioni $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e $\tan(\alpha)$ introdotte invece nel notebook *IntroduzioneFunzGonio* e sostanzialmente indipendente da questo. A partire dall'identità fondamentale della Goniometria si trattano quindi i valori delle funzioni goniometriche di angoli associati per passare poi, con il supporto di un'animazione grafica, alle formule di addizione e sottrazione e relative conseguenze. Si ottengono infine le formule di Werner e prostaferesi.

Nota didattica

Poiché *Mathematica* procede in automatico ad elaborare argomenti numerici o simbolici di funzioni nonché valori delle stesse fornendo di norma i risultati del calcolo senza presentare i passaggi intermedi, tale caratteristica ovviamente utile in numerose occasioni diventa al contrario un condizionamento tutte le volte che si intende sviluppare un graduale processo deduttivo nel quale l'uso di manipolazioni algebriche di un'espressione conduca alla dimostrazione di un asserto. Se ad esempio si considera il semplice input seguente

$$\text{Sin}\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] == \text{Cos}[\alpha]$$

True

Mathematica semplifica automaticamente il primo membro riducendolo a $\text{Cos}[\alpha]$ per cui, essendo uguale al secondo, fornisce in output l'esito del confronto con True. In ambiti opportuni può invece essere conveniente mantenere l'input, o parti di esso, inalterato nell'output. In sostanza, *Mathematica* sembra inadatto in quelle situazioni, peraltro attività comune per l'insegnante, dove all'importanza o all'utilità dei risultati si affianca pure l'obiettivo di una loro documentata deduzione.

Nota tecnica

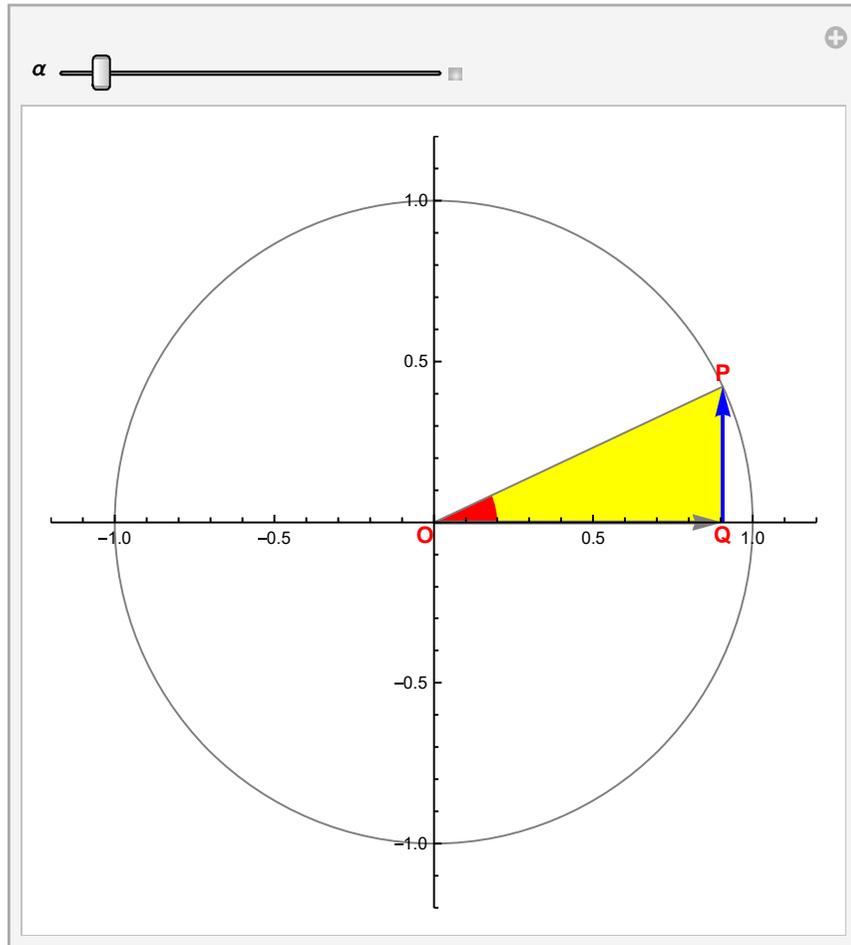
Questo notebook rappresenta sostanzialmente una sperimentazione personale attorno ad alcune funzioni raramente usate in *Mathematica* allo scopo di poter, in qualche modo, aggirare l'ostacolo accennato nella nota precedente. Pur esistendo in Internet alcuni interventi su queste problematiche (non molti per la verità) sotto forma di notebook o package e certamente più ampi e approfonditi di questo tentativo, ho preferito non utilizzarli per provare soluzioni più limitate e controllabili

anche se meno generali. Il processo di calcolo di *Mathematica* è pertanto stato aggirato creando gradualmente una base di regole per le "nuove" funzioni `sen[]`, `cos[]` e `tan[]` evitando di utilizzare le funzioni predefinite `Sin[]`, `Cos[]` e `Tan[]`. Quando opportuno, si è "congelato" momentaneamente l'automatismo di calcolo di *Mathematica* con la funzione `HoldForm` per poi riattivarlo con una funzione (rilascia) creata ad hoc. In ogni caso si è cercato di sviluppare un insieme di funzioni minimale allo scopo.

I comandi che vanno eseguiti prima di procedere alle varie deduzioni sono quelli contenuti nella sezione **Funzioni di base** e quelli inseriti all'inizio di ogni sezione e compresi in **Identità dimostrate**. Altre brevi informazioni sulle funzioni implementate si trovano sotto forma di commenti nella sezione che segue.

Funzioni di base

Identità fondamentale



Dimostrazione dell'identità fondamentale

Riportiamo le definizioni di carattere geometrico delle principali funzioni goniometriche discusse in un precedente notebook e, assieme, forniamo le relazioni che le legano tra di loro al medesimo angolo α . I segmenti OQ e QP vanno considerati come segmenti orientati (o componenti del vettore \mathbf{OP}). OP è invece la misura (positiva) del raggio della circonferenza associata al sistema cartesiano di figura (o anche il modulo di \mathbf{OP}). È questo l'insieme di "regole" da cui iniziamo.

$$\frac{QP}{OP} = \text{sen}[\alpha]$$

$$\frac{OQ}{OP} = \text{cos}[\alpha]$$

$$\frac{QP}{OQ} = \text{tan}[\alpha]$$

$$\text{tan}[\alpha] = \frac{\text{sen}[\alpha]}{\text{cos}[\alpha]}$$

$$\text{cot}[\alpha] = \frac{\text{cos}[\alpha]}{\text{sen}[\alpha]}$$

$$\frac{1}{\text{tan}[\alpha]} = \text{cot}[\alpha]$$

L'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo OQP permette di scrivere

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2$$

per cui sostituendo le espressioni di OQ e QP dedotte dalle definizioni di seno e coseno si ha

$$OP^2 = OP^2 \cos^2[\alpha] + OP^2 \text{sen}^2[\alpha]$$

Eliminando ora il termine OP^2 comune ai due membri si ottiene

$$\cos^2[\alpha] + \text{sen}^2[\alpha] = 1$$

relazione che costituisce l'*identità fondamentale* della Goniometria.

Funzioni goniometriche in termini di una di esse

Identità dimostrate

Nota la funzione $\text{sen}[\alpha]$

Per determinare il coseno e la tangente in termini del seno dello stesso angolo facciamo uso dell'identità appena dimostrata esplicitando dapprima il coseno ossia sottraendo $\text{sen}^2[\alpha]$ ad entrambi i membri

$$\cos^2[\alpha] = 1 - \text{sen}^2[\alpha]$$

L'estrazione della radice quadrata fornisce

$$\sqrt{\cos^2[\alpha]} = \sqrt{1 - \text{sen}^2[\alpha]}$$

ma dato che $\sqrt{\cos^2[\alpha]} = |\cos[\alpha]|$ risulta

$$\text{Abs}[\cos[\alpha]] = \sqrt{1 - \text{sen}^2[\alpha]}$$

To rules

Tangente in termini del seno

La funzione tangente invece si ottiene partendo dalla

$$\tan[\alpha] = \frac{\text{sen}[\alpha]}{\text{cos}[\alpha]}$$

e considerandola in valore assoluto

$$|\tan(\alpha)| = \frac{|\text{sen}(\alpha)|}{|\text{cos}(\alpha)|}$$

Sostituendo il risultato precedente giungiamo alla relazione cercata

$$\text{Abs}[\tan[\alpha]] = \frac{\text{Abs}[\text{sen}[\alpha]]}{\sqrt{1 - \text{sen}[\alpha]^2}}$$

To rules

Nota la funzione $\cos[\alpha]$

In modo del tutto analogo si procede se si intende esprimere il seno e tangente in termini del coseno: riportiamo senza commento la procedura.

$$\text{sen}[\alpha]^2 = 1 - \text{cos}[\alpha]^2$$

$$\sqrt{\text{sen}[\alpha]^2} = \sqrt{1 - \text{cos}[\alpha]^2}$$

$$\text{Abs}[\text{sen}[\alpha]] = \sqrt{1 - \text{cos}[\alpha]^2}$$

To rules

Tangente in termini del coseno

$$\tan[\alpha] = \frac{\text{sen}[\alpha]}{\text{cos}[\alpha]}$$

$$\text{Abs}[\tan[\alpha]] = \frac{\text{Abs}[\text{sen}[\alpha]]}{\text{Abs}[\text{cos}[\alpha]]}$$

$$\text{Abs}[\tan[\alpha]] = \frac{\sqrt{1 - \cos[\alpha]^2}}{\text{Abs}[\cos[\alpha]]}$$

Nota la funzione $\tan[\alpha]$

Ritenendo conosciuto il valore di $\tan[\alpha]$ iniziamo dalla evidente identità

$$\text{sen}[\alpha]^2 = \text{sen}[\alpha]^2$$

e riscriviamo il denominatore ($= 1$) del secondo membro sfruttando l'identità fondamentale

$$\text{sen}[\alpha]^2 = \frac{\text{sen}[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2 + \text{sen}[\alpha]^2}$$

Dividiamo ora il numeratore e denominatore del secondo membro per $\cos[\alpha]^2 \neq 0$ supponendo quindi che $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{sen}[\alpha]^2 = \frac{\frac{\text{sen}[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2}}{\frac{\cos[\alpha]^2 + \text{sen}[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2}}$$

Applicando la proprietà distributiva e sapendo che $\tan[\alpha] = \text{sen}[\alpha]/\cos[\alpha]$ otteniamo

$$\text{sen}[\alpha]^2 = \frac{\tan[\alpha]^2}{1 + \tan[\alpha]^2}$$

da cui l'estrazione della radice quadrata in entrambi i membri fornisce

$$\sqrt{\text{sen}[\alpha]^2} = \sqrt{\frac{\tan[\alpha]^2}{1 + \tan[\alpha]^2}}$$

per cui risulta

$$\text{Abs}[\text{sen}[\alpha]] = \sqrt{\frac{\tan[\alpha]^2}{1 + \tan[\alpha]^2}}$$

Con la stessa successione di passaggi si ottiene il valore assoluto del coseno in termini della tangente: sinteticamente

$$\cos[\alpha]^2 = \cos[\alpha]^2$$

$$\cos[\alpha]^2 = \frac{\cos[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2 + \text{sen}[\alpha]^2}$$

$$\cos[\alpha]^2 = \frac{\frac{\cos[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2}}{\frac{\cos[\alpha]^2 + \sin[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2}}$$

$$\cos[\alpha]^2 = \frac{1}{1 + \tan[\alpha]^2}$$

$$\sqrt{\cos[\alpha]^2} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan[\alpha]^2}}$$

$$\text{Abs}[\cos[\alpha]] = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan[\alpha]^2}}$$

In definitiva abbiamo ottenuto le seguenti identità in termini dell'angolo α

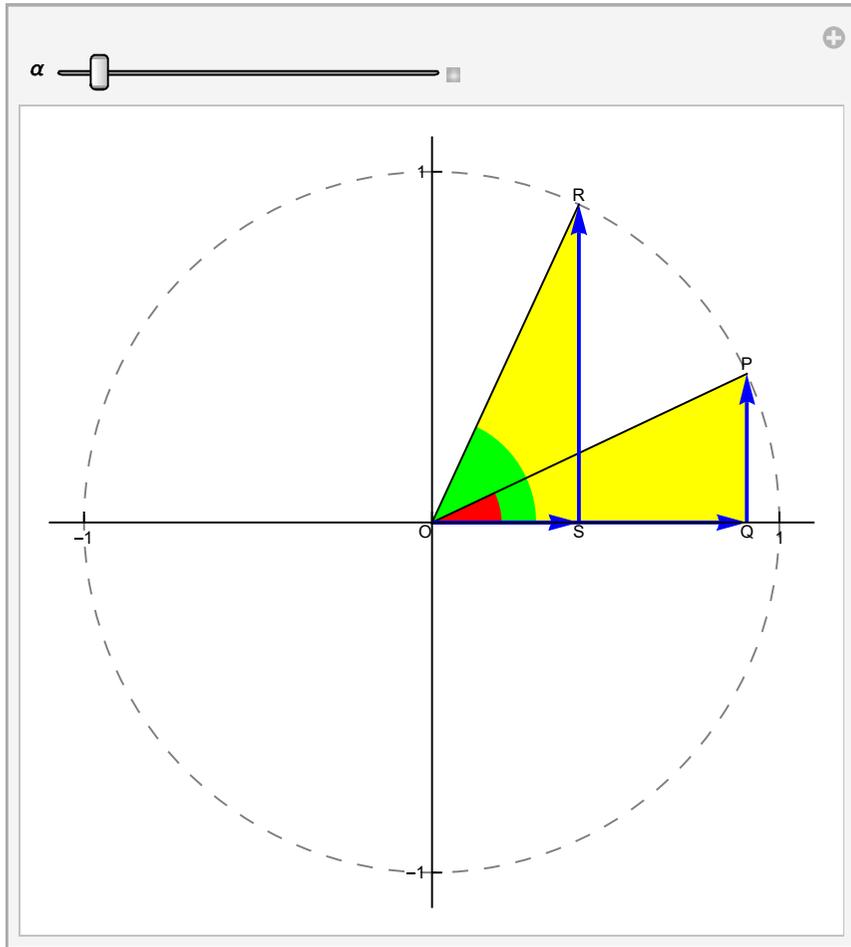
idFondamentale	$\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)^2 = 1$
cosNotosen	$ \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin(\alpha)^2}$
tanNotosen	$ \tan(\alpha) = \frac{ \sin(\alpha) }{\sqrt{1 - \sin(\alpha)^2}}$
senNotocos	$ \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$
tanNotocos	$ \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{ \cos(\alpha) }$
senNototan	$ \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha) + 1}}$
cosNototan	$ \cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{\tan^2(\alpha) + 1}}$

Nel seguito riprenderemo, di queste, solo l'identità fondamentale in quanto solo questa si dimostrerà necessaria.

Angoli associati e relative identità

Identità dimostrate

Angoli complementari



Seno di un angolo complementare

Sia α l'ampiezza di un angolo orientato. Questo individua nella circonferenza γ con centro nell'origine O di un sistema cartesiano il triangolo OQP . In fig. 2 α , per comodità, appare un angolo compreso nel I quadrante (in rosso) ma le relazioni che dedurremo si dimostrano valide qualsiasi sia il suo valore. L'angolo complementare, di ampiezza $\frac{\pi}{2} - \alpha$ che si associa ad α definisce a sua volta il triangolo OSR : siamo interessati ad esprimere le funzioni goniometriche di quest'ultimo in termini di quelle dell'angolo α . Dalla definizione discende quindi che

$$\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{SR}{OR}$$

ma la congruenza tra i triangoli $\triangle OQP \cong \triangle OSR$ comporta che si abbia, anche in segno, $SR = OQ$ e $OR = OP$. Pertanto sostituendo queste uguaglianze nella precedente

$$\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{OQ}{OP}$$

Ma per la definizione delle funzioni goniometriche relative all'angolo α , in particolare quella del coseno, risulta che

$$\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \cos[\alpha]$$

Coseno di un angolo complementare

Procediamo nello stesso modo per determinare $\cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]$ in termini di funzioni dell'angolo α .

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{OS}{OR}$$

Osservata la validità di $OS = QP$ (fig.2) discende

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{QP}{OP}$$

e utilizzando la definizione di $\operatorname{sen}[\alpha]$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \operatorname{sen}[\alpha]$$

Identità dimostrate

Tangente di un angolo complementare

Infine, la definizione di tangente per l'angolo complementare comporta l'uguaglianza

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{SR}{OS}$$

ma la congruenza dei triangoli già esposta assicura che $SR = OQ$ e $OS = QP$ (fig. 2) per cui

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{OQ}{QP}$$

che è equivalente alla

$$\frac{QP \tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]}{OQ} = 1$$

Per la definizione di tangente risulta anche

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] \times \tan[\alpha] = 1$$

da cui, dividendo per $\tan[\alpha]$

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{1}{\tan[\alpha]}$$

che si può riscrivere nei due modi seguenti

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \cot[\alpha]$$

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{\cos[\alpha]}{\sin[\alpha]}$$

In alternativa

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]}$$

per cui sfruttando le identità già dimostrate per seno e coseno, riesce

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = \frac{\cos[\alpha]}{\sin[\alpha]}$$

Abbiamo pertanto dimostrato le identità:

Angoli complementari

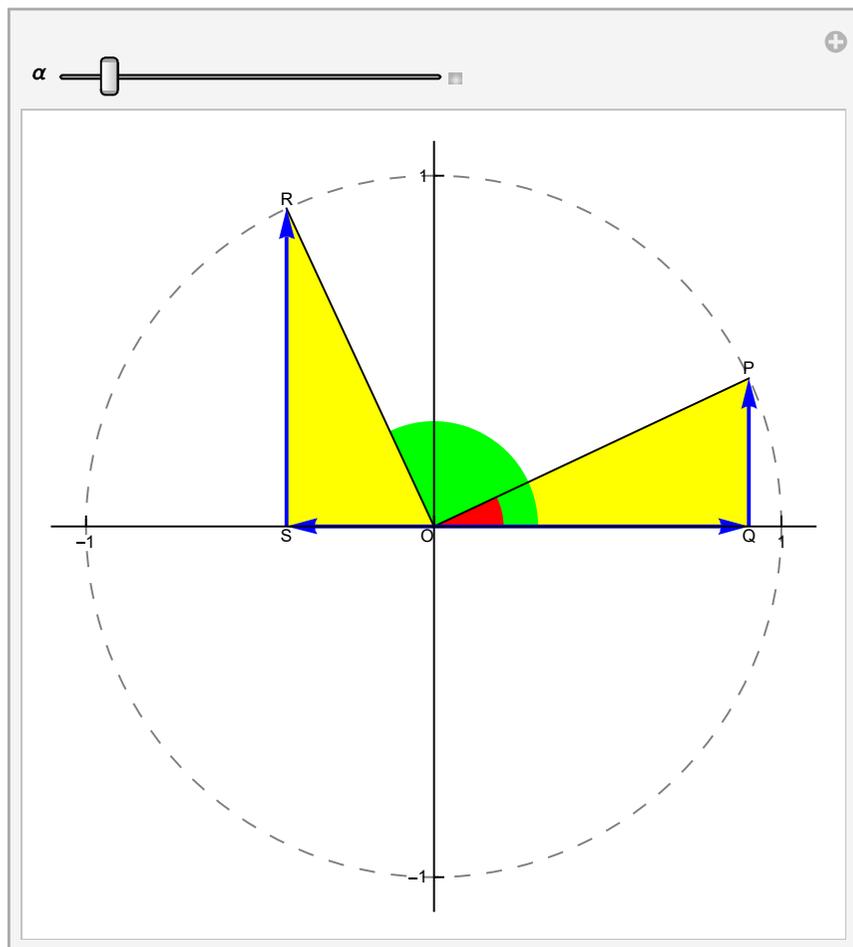
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Identità dimostrate

Angoli che differiscono per un angolo retto



Seno di un angolo che differisce di $\frac{\pi}{2}$

Angoli che differiscono per un angolo retto danno origine alla configurazione geometrica di fig. 3. Ancora è soddisfatta la congruenza di tipo geometrico $\triangle OQP \cong \triangle OSR$ mentre, osservando i versi delle componenti, risulta $SR = OQ$ e $OS = -QP$. Ne segue

$$\text{sen} \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = \frac{\text{SR}}{\text{OR}}$$

che si riscrive

$$\text{sen} \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = \frac{\text{OQ}}{\text{OP}}$$

e, in base alla definizione, risulta

$$\text{sen} \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = \cos [\alpha]$$

Coseno di un angolo che differisce di $\frac{\pi}{2}$

Dalla definizione

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = \frac{\text{OS}}{\text{OR}}$$

ma per quanto osservato sopra nel caso del seno diviene

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = -\frac{\text{QP}}{\text{OP}}$$

per cui

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = -\text{sen} [\alpha]$$

Tangente di un angolo che differisce di $\frac{\pi}{2}$

Con le medesime osservazioni e iniziando dalla definizione

$$\tan \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = \frac{\text{SR}}{\text{OS}}$$

risulta che l'espressione precedente si modifica in

$$\tan \left[\frac{\pi}{2} + \alpha \right] = -\frac{\text{OQ}}{\text{QP}}$$

da cui, moltiplicando per il reciproco del secondo membro

$$\frac{QP \tan\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right]}{OQ} = -1$$

si ottiene un'espressione dove appare la definizione di $\tan[\alpha]$

$$\tan[\alpha] \times \tan\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right] = -1$$

Dividendo per tale funzione si ha

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right] = -\frac{1}{\tan[\alpha]}$$

che si può riscrivere anche come

$$\tan\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right] = -\frac{\cos[\alpha]}{\sin[\alpha]}$$

Riassumiamo in riquadro quanto ottenuto

Angoli angolo che differiscono per retto un

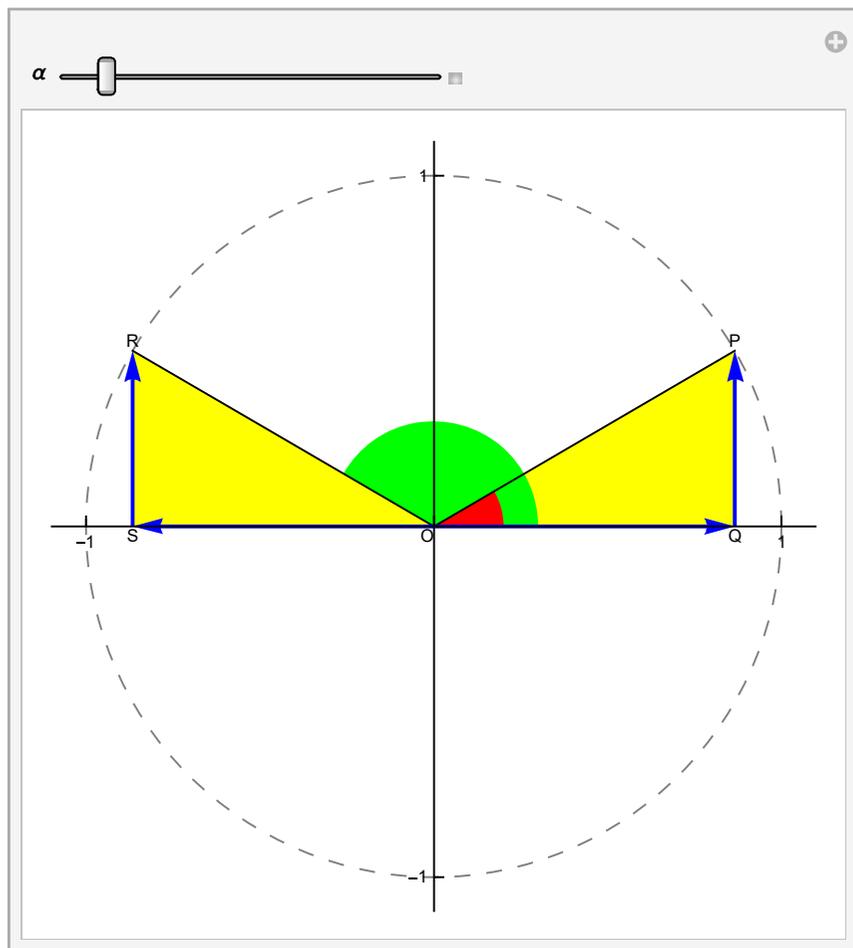
$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\alpha) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Identità dimostrate

Angoli supplementari



Seno di un angolo supplementare

Ancora una volta l'espressione delle funzioni goniometriche di un angolo associato ad α , in tal caso l'angolo supplementare, si basa sull'osservazione della congruenza dei triangoli individuati dai lati terminali dei due angoli, nel caso in esame, $\triangle OSR$ e $\triangle OQP$ (fig. 4). Valgono pertanto le relazioni tra componenti $OS = -OQ$ e $SR = QP$ e di conseguenza discende

$$\operatorname{sen}[\pi - \alpha] = \frac{SR}{OR}$$

$$\operatorname{sen}[\pi - \alpha] = \frac{QP}{OP}$$

$$\operatorname{sen}[\pi - \alpha] = \operatorname{sen}[\alpha]$$

Coseno di un angolo supplementare

Nello stesso modo

$$\operatorname{cos}[\pi - \alpha] = \frac{OS}{OR}$$

$$\operatorname{cos}[\pi - \alpha] = -\frac{OQ}{OP}$$

$$\operatorname{cos}[\pi - \alpha] = -\operatorname{cos}[\alpha]$$

Tangente di un angolo supplementare

Infine, la definizione di tangente implica

$$\operatorname{tan}[\pi - \alpha] = \frac{SR}{OS}$$

e le osservazioni fatte inizialmente permettono di riscriverla come

$$\operatorname{tan}[\pi - \alpha] = -\frac{QP}{OQ}$$

da cui

$$\operatorname{tan}[\pi - \alpha] = -\operatorname{tan}[\alpha]$$

Abbiamo dimostrato quindi le ulteriori tre relazioni

Angoli supplementari

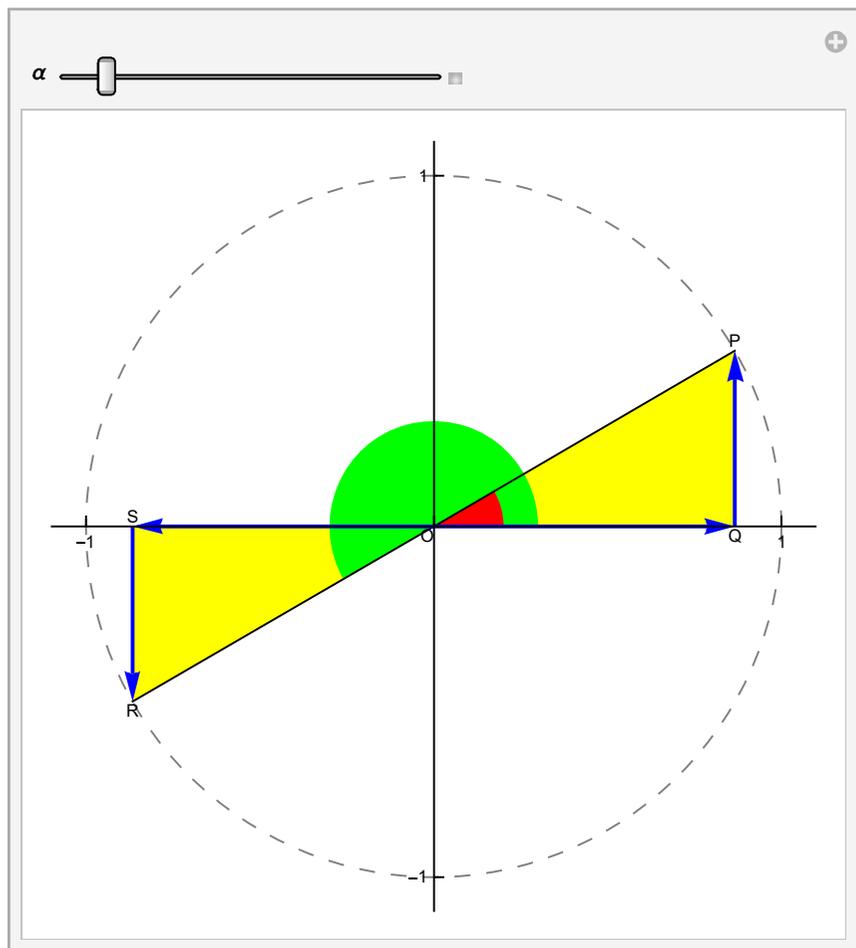
$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{cos}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cos}(\alpha)$$

$$\operatorname{tan}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tan}(\alpha)$$

Identità dimostrate

Angoli che differiscono di π



Seno di un angolo che differisce di π

Con riferimento alla fig. 5 osserviamo al solito modo che $OS = OQ$ così come $SR = QP$. Poiché per definizione risulta

$$\text{sen}[\pi + \alpha] = \frac{SR}{OR}$$

le precedenti danno luogo alla

$$\operatorname{sen} [\pi + \alpha] = -\frac{QP}{OP}$$

e quindi, riprese le definizioni per l'angolo α , segue

$$\operatorname{sen} [\pi + \alpha] = -\operatorname{sen} [\alpha]$$

Coseno di un angolo che differisce di π

La definizione di coseno implica per l'angolo esplementare $\alpha + \pi$ (fig. 5)

$$\operatorname{cos} [\pi + \alpha] = \frac{OS}{OR}$$

ma le relazioni tra componenti già discusse permettono di scrivere

$$\operatorname{cos} [\pi + \alpha] = -\frac{OQ}{OP}$$

da cui

$$\operatorname{cos} [\pi + \alpha] = -\operatorname{cos} [\alpha]$$

Tangente di un angolo che differisce di π

Infine sfruttando ancora la definizione di tangente

$$\operatorname{tan} [\pi + \alpha] = \frac{SR}{OS}$$

e le relazioni tra componenti

$$\operatorname{tan} [\pi + \alpha] = \frac{QP}{OQ}$$

risulta

$$\operatorname{tan} [\pi + \alpha] = \operatorname{tan} [\alpha]$$

Questa identità conferma e dimostra la periodicità della funzione tangente: il suo periodo è pari a π .

In definitiva abbiamo che le funzioni goniometriche di angoli che differiscono per π sono collegate a quelle dell'angolo originario dalle seguenti identità

π Angoli che di differiscono

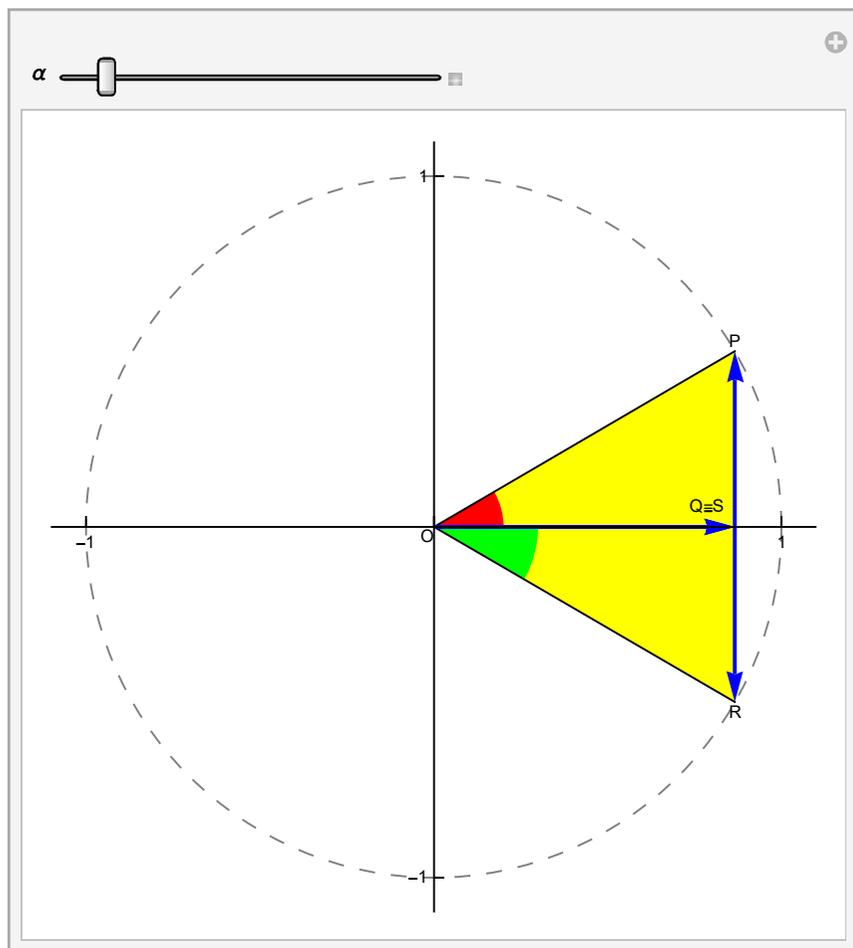
$$\text{sen}(\alpha + \pi) = -\text{sen}(\alpha)$$

$$\text{cos}(\alpha + \pi) = -\text{cos}(\alpha)$$

$$\text{tan}(\alpha + \pi) = \text{tan}(\alpha)$$

Identità dimostrate

Angoli opposti



Seno di un angolo opposto

Dalla congruenza più volte notata $\triangle OSR \cong \triangle OQP$ discende ora $SR = -QP$ e $OS = OQ$ (fig. 6). Ne deriva che

$$\operatorname{sen}[-\alpha] = \frac{SR}{OR}$$

$$\operatorname{sen}[-\alpha] = -\frac{QP}{OP}$$

$$\operatorname{sen}[-\alpha] = -\operatorname{sen}[\alpha]$$

Questo risultato, valido per $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ stabilisce che la funzione seno è una *funzione dispari*: il suo grafico risulta pertanto simmetrico rispetto all'origine di un sistema cartesiano che abbia in ascissa la variabile angolare α e in ordinata il valore $\operatorname{sen}[\alpha]$.

Coseno di un angolo opposto

Analogamente a quanto finora visto e in base alla configurazione di fig. 6

$$\operatorname{cos}[-\alpha] = \frac{OS}{OR}$$

$$\operatorname{cos}[-\alpha] = \frac{OQ}{OP}$$

$$\operatorname{cos}[-\alpha] = \operatorname{cos}[\alpha]$$

Anche questa identità, valida per $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ codifica una proprietà importante della funzione coseno: questa è una *funzione pari* con grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate del sistema cartesiano associato all'equazione $y = \operatorname{cos}[\alpha]$.

Tangente di un angolo opposto

Per la definizione di tangente e in base a quanto osservato precedentemente

$$\operatorname{tan}[-\alpha] = \frac{SR}{OS}$$

$$\operatorname{tan}[-\alpha] = -\frac{QP}{OQ}$$

$$\operatorname{tan}[-\alpha] = -\operatorname{tan}[\alpha]$$

Come già visto per la funzione seno, poiché l'identità precedente vale per $\forall \alpha \in \operatorname{Dom}(\operatorname{tan}) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ stabilisce che pure la funzione tangente è una *funzione*

dispari con grafico quindi simmetrico rispetto all'origine di un sistema cartesiano con in ascissa la variabile angolare e in ordinata il valore di $\tan[\alpha]$.

Abbiamo ottenuto quindi

Angoli opposti

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$$

$$\text{cos}(-\alpha) = \text{cos}(\alpha)$$

$$\text{tan}(-\alpha) = -\text{tan}(\alpha)$$

Identità dimostrate

Introduzione grafica e prima identità

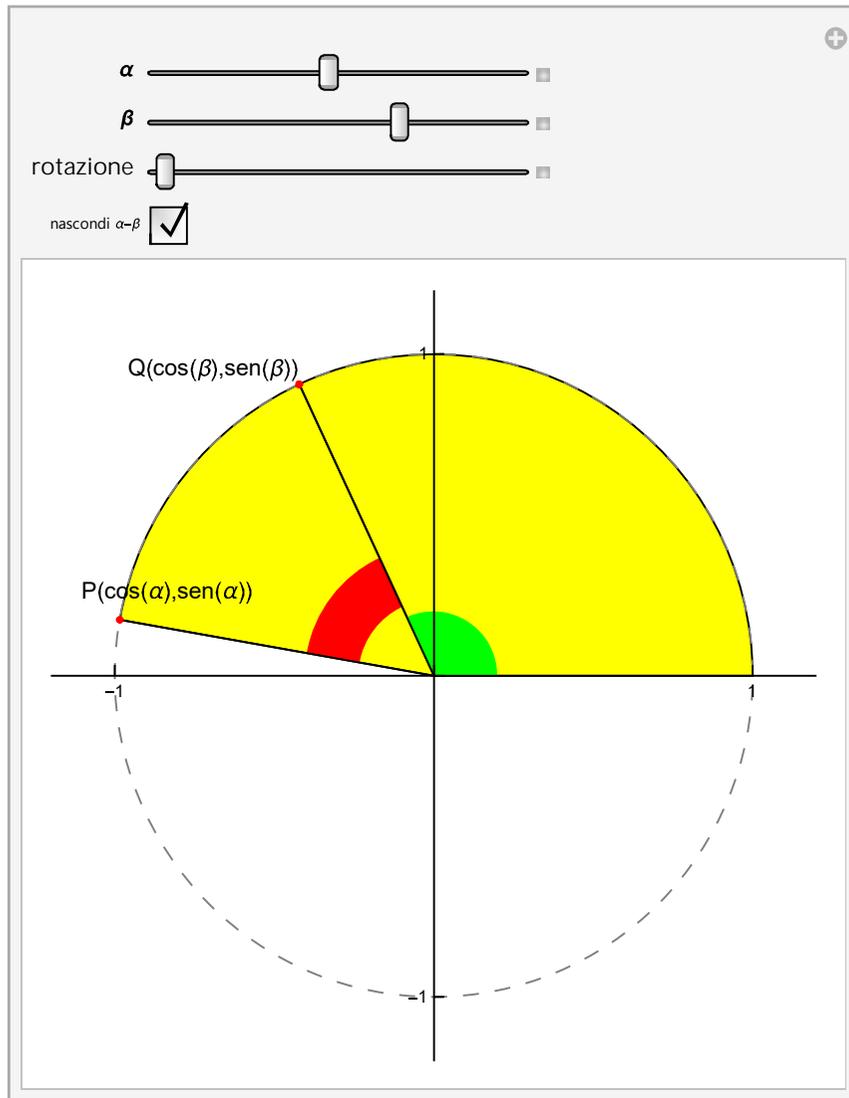
Analisi grafica

Affrontiamo in questa sezione la dimostrazione dell'identità che lega il coseno di una differenza di angoli alle funzioni goniometriche degli angoli stessi. In base a questa relazione sarà possibile dedurre una (lunga) serie di identità che specificano di volta in volta nuove proprietà delle funzioni goniometriche.

Definiamo nella circonferenza goniometrica γ i due angoli $\alpha = 170^\circ$ e $\beta = 115^\circ$, il primo indicato in giallo nella figura sottostante e tale da ricoprire un intero settore circolare di γ e il secondo in verde. I lati non coincidenti con il semiasse positivo delle x di questi angoli intersecano la circonferenza nei due punti, $P(\text{cos}(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ e $Q(\text{cos}(\beta), \text{sen}(\beta))$.

$$pP = \{\text{Cos}[\alpha], \text{Sin}[\alpha]\};$$

$$pQ = \{\text{Cos}[\beta], \text{Sin}[\beta]\};$$



Dal punto di vista geometrico, la differenza $\alpha - \beta$ appare come l'angolo evidenziato in color rosso. Poiché le convenzioni sugli angoli in goniometria impongono di trattare questi con un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse, eseguiamo una rotazione attorno all'origine pari all'angolo β in modo da riportare quest'angolo nell'ambito convenzionale corretto.

Ulteriori osservazioni

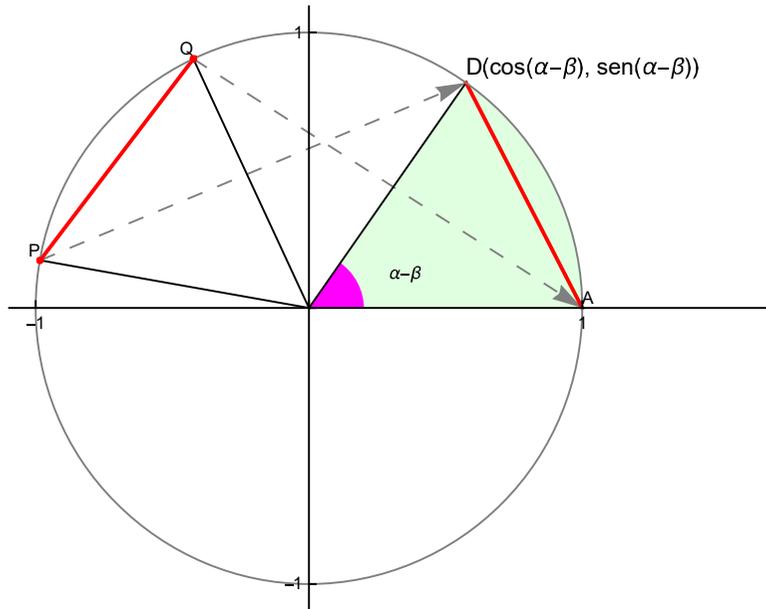
Appare evidente come in tale rotazione il punto Q , alla fine, vada a coincidere con il punto $A(1, 0)$ di fig. 8 mentre il punto P a sua volta ha per immagine finale il punto $D(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$.

$$pA = \{1, 0\};$$

$$pD = \{\cos[\alpha - \beta], \sin[\alpha - \beta]\};$$

In particolare, essendo le rotazioni delle isometrie, la lunghezza della corda PQ rimane invariata cosicché possiamo porre in relazione la lunghezza del segmento originario PQ con quella della sua immagine DA : queste lunghezze sono uguali per cui vale $PQ = DA$ oppure, elevando al quadrato

$$PQ^2 = DA^2.$$



Formula di sottrazione per il coseno

Identità dimostrate

Dimostrazione

Poiché i punti P , Q , A e D sono descritti dalle coppie ordinate

$$pP = \{\cos[\alpha], \sin[\alpha]\};$$

$$pQ = \{\cos[\beta], \sin[\beta]\};$$

$$pA = \{1, 0\};$$

$$pD = \{\cos[\alpha - \beta], \sin[\alpha - \beta]\};$$

ne segue che i quadrati dei segmenti PQquadrato e DAquadrato in termini degli angoli α e β risultano

$$PQquadrato = (\cos[\alpha] - \cos[\beta])^2 + (\sin[\alpha] - \sin[\beta])^2$$

$$DAquadrato = (-1 + \cos[\alpha - \beta])^2 + \sin[\alpha - \beta]^2$$

Posti, per quanto visto, uguali ne discende l'equazione

$$(\cos[\alpha] - \cos[\beta])^2 + (\sin[\alpha] - \sin[\beta])^2 = (-1 + \cos[\alpha - \beta])^2 + \sin[\alpha - \beta]^2$$

Possiamo ora eseguire i quadrati coinvolti nei due membri

$$\cos[\alpha]^2 - 2 \cos[\alpha] \times \cos[\beta] + \cos[\beta]^2 + \sin[\alpha]^2 - 2 \sin[\alpha] \times \sin[\beta] + \sin[\beta]^2 = 1 - 2 \cos[\alpha - \beta] + \cos[\alpha - \beta]^2 + \sin[\alpha - \beta]^2$$

e quindi utilizzando l'identità goniometrica fondamentale $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ridurre l'equazione alla forma equivalente più semplice

$$2 - 2 \cos[\alpha] \times \cos[\beta] - 2 \sin[\alpha] \times \sin[\beta] = 2 - 2 \cos[\alpha - \beta]$$

Sottraendo 2 ad entrambi i membri

$$-2 \cos[\alpha] \times \cos[\beta] - 2 \sin[\alpha] \times \sin[\beta] = -2 \cos[\alpha - \beta]$$

e, dopo aver diviso per -2 , scambiamo i due membri e semplifichiamo

$$\cos[\alpha - \beta] = \cos[\alpha] \times \cos[\beta] + \sin[\alpha] \times \sin[\beta]$$

In definitiva siamo giunti a dimostrare la validità dell'espressione

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Il coseno di una differenza è pertanto, ben diverso dall'aspettativa ingenua che lo "vorrebbe" pari alla differenza dei coseni! In termini più formali questa identità (e le analoghe seguenti) dimostrano che le funzioni goniometriche non sono delle funzioni lineari dei propri argomenti.

Formule di addizione e sottrazione

Identità dimostrate

Formula di addizione per il coseno

La precedente identità collega il *coseno della differenza di due angoli* α e β con le funzioni goniometriche di questi e costituisce la *formula di sottrazione per il coseno*.

Questo risultato si può facilmente estendere e in questa sezione otterremo, per prima, la corrispondente formula di addizione e successivamente le formule di addizione e sottrazione per seno e tangente. A tal fine sostituiamo nell'identità appena dimostrata

$$\cos[\alpha - \beta] = \cos[\alpha] \times \cos[\beta] + \sin[\alpha] \times \sin[\beta]$$

all'angolo β l'angolo $-\beta$

$$\cos[\alpha + \beta] = \cos[\alpha] \times \cos[-\beta] + \sin[\alpha] \times \sin[-\beta]$$

Tenendo presente quanto già dimostrato ossia che il seno è una funzione dispari valendo $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$ mentre il coseno è pari dato che $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, l'espressione precedente diviene

$$\cos[\alpha + \beta] = \cos[\alpha] \times \cos[\beta] - \sin[\alpha] \times \sin[\beta]$$

Il coseno della somma in termini delle funzioni di α e β risulta quindi

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Formule di addizione e sottrazione per il seno

Identità dimostrate

Seno della differenza

Sfruttiamo l'identità $\sin(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ per dedurre la formula di sottrazione per la funzione seno.

$$\sin[\alpha - \beta] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right]$$

e, in base alla proprietà associativa, riscriviamo il secondo membro sostituendo a $\frac{\pi}{2} - \alpha = \gamma$

$$\sin[\alpha - \beta] = \cos[\beta + \gamma]$$

Possiamo ora applicare la formula di addizione per il coseno appena ottenuta

$$\sin[\alpha - \beta] = \cos[\beta] \times \cos[\gamma] - \sin[\beta] \times \sin[\gamma]$$

e ritornando ad esprimere γ in termini di α

$$\sin[\alpha - \beta] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] \times \cos[\beta] - \sin\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] \times \sin[\beta]$$

Per l'identità già ricordata e per quella analoga riguardante il seno di angoli complementari $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$, la precedente fornisce

$$\sin[\alpha - \beta] = \cos[\beta] \times \sin[\alpha] - \cos[\alpha] \times \sin[\beta]$$

che è quanto si voleva ottenere.

To rules

Identità dimostrate

Seno della somma

Nello stesso modo seguito per il coseno, sostituiamo a β l'angolo $-\beta$

$$\text{sen}[\alpha + \beta] = \cos[-\beta] \times \text{sen}[\alpha] - \cos[\alpha] \times \text{sen}[-\beta]$$

Per le proprietà di simmetria del seno $\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}(\beta)$ e del coseno, $\cos(-\beta) = \cos(\beta) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$\text{sen}[\alpha + \beta] = \cos[\beta] \times \text{sen}[\alpha] + \cos[\alpha] \times \text{sen}[\beta]$$

Riassumiamo in un'unica espressione le due identità dimostrate

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \cos(\beta) \text{sen}(\alpha) \pm \cos(\alpha) \text{sen}(\beta)$$

intendendo che i segni vanno considerati nell'ordine indicato ossia il segno superiore a primo membro va associato al segno superiore a secondo e così per quello inferiore.

Formule di addizione e sottrazione per la tangente

Identità dimostrate

Tangente della somma

Sfruttiamo le identità appena trovate per dimostrare quelle coinvolgenti la tangente di una somma o di una differenza. Poiché la tangente di un angolo si può esprimere come il rapporto tra il seno e il coseno, abbiamo

$$\tan[\alpha + \beta] = \frac{\text{sen}[\alpha + \beta]}{\cos[\alpha + \beta]}$$

Sviluppiamo il numeratore e denominatore della precedente utilizzando le formule di addizione per il seno e coseno

$$\tan[\alpha + \beta] = \frac{\cos[\beta] \times \text{sen}[\alpha] + \cos[\alpha] \times \text{sen}[\beta]}{\cos[\alpha] \times \cos[\beta] - \text{sen}[\alpha] \times \text{sen}[\beta]}$$

Supponendo $\cos(\alpha) \cos(\beta) \neq 0$ cioè $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, dividiamo numeratore e denominatore del secondo membro per tale termine

$$\tan[\alpha + \beta] = \frac{\frac{\cos[\beta] \cdot \text{sen}[\alpha] + \cos[\alpha] \cdot \text{sen}[\beta]}{\cos[\alpha] \times \cos[\beta]}}{\frac{\cos[\alpha] \times \cos[\beta] - \text{sen}[\alpha] \times \text{sen}[\beta]}{\cos[\alpha] \times \cos[\beta]}}$$

e quindi semplificando e tenendo conto della definizione di tangente in termini del seno e coseno, gli elementi coinvolti a secondo membro divengono rispettivamente

$$\tan[\alpha + \beta] = \frac{\frac{\text{sen}[\alpha]}{\cos[\alpha]} + \frac{\text{sen}[\beta]}{\cos[\beta]}}{1 - \frac{\text{sen}[\alpha] \times \text{sen}[\beta]}{\cos[\alpha] \times \cos[\beta]}}$$

$$\tan[\alpha + \beta] = \frac{\tan[\alpha] + \tan[\beta]}{1 - \tan[\alpha] \times \tan[\beta]}$$

che è la formula cercata.

Identità dimostrate

Tangente della differenza

Per ottenere la formula corrispondente e relativa alla differenza degli angoli, procediamo alla sostituzione $\beta \rightarrow -\beta$

$$\tan[\alpha - \beta] = \frac{\tan[\alpha] + \tan[-\beta]}{1 - \tan[\alpha] \times \tan[-\beta]}$$

Ricordando che la tangente è una funzione dispari che soddisfa quindi alla identità $\tan(-\beta) = -\tan(\beta)$ giungiamo infine alla

$$\tan[\alpha - \beta] = \frac{\tan[\alpha] - \tan[\beta]}{1 + \tan[\alpha] \times \tan[\beta]}$$

In definitiva le formule di addizione e sottrazione per la tangente sono

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Formule di duplicazione

Identità dimostrate

Formule di duplicazione per seno coseno e tangente

Dall'insieme delle formule discusse finora possiamo derivare facilmente un altro gruppo di importanti identità goniometriche. Iniziamo da quelle di duplicazione, formule che collegano le funzioni goniometriche dell'angolo 2α con quelle dell'angolo α .

Partendo dalla

$$\sin[\alpha + \beta] = \cos[\beta] \times \sin[\alpha] + \cos[\alpha] \times \sin[\beta]$$

basta porre $\beta = \alpha$ per ottenere quanto si voleva

$$\sin[2\alpha] = 2 \cos[\alpha] \times \sin[\alpha]$$

Analogamente per il coseno si ottiene immediatamente

$$\cos[\alpha + \beta] = \cos[\alpha] \times \cos[\beta] - \sin[\alpha] \times \sin[\beta]$$

$$\cos[2\alpha] = \cos[\alpha]^2 - \sin[\alpha]^2$$

Tenendo conto dell'identità goniometrica fondamentale quest'ultima si può riscrivere anche in termini alternativi appena si sostituisca $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$

$$\cos[2\alpha] = 1 - 2 \sin[\alpha]^2$$

$$\cos[2\alpha] \Rightarrow 1 - 2 \sin[\alpha]^2$$

oppure ancora, in base alla $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$, si ottiene una terza forma

$$\cos[2\alpha] = -1 + 2 \cos[\alpha]^2$$

Infine la formula di addizione per la tangente

$$\tan[\alpha + \beta] = \frac{\tan[\alpha] + \tan[\beta]}{1 - \tan[\alpha] \times \tan[\beta]}$$

fornisce con la sostituzione $\beta \rightarrow \alpha$ l'espressione cercata

$$\tan[2\alpha] = \frac{2 \tan[\alpha]}{1 - \tan[\alpha]^2}$$

Le formule di duplicazione sono pertanto

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

To rules

Formule di bisezione

Identità dimostrate

Formule di bisezione per seno, coseno, tangente

In modo inverso rispetto alle formule di duplicazione, quelle di bisezione esprimono le funzioni goniometriche di un angolo in termini dell'angolo doppio. Iniziamo sfruttando una delle tre forme della formula di duplicazione per il $\cos(2\alpha)$

$$\cos [2\alpha] = 1 - 2 \operatorname{sen} [\alpha]^2$$

ed esplicitiamo il $\operatorname{sen}(\alpha)$ in funzione del $\cos(2\alpha)$

$$-1 + \cos [2\alpha] = -2 \operatorname{sen} [\alpha]^2$$

$$\operatorname{sen} [\alpha]^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos [2\alpha])$$

L'estrazione della radice quadrata comporta

$$\sqrt{\operatorname{sen} [\alpha]^2} = \frac{\sqrt{1 - \cos [2\alpha]}}{\sqrt{2}}$$

e quindi ricordando che il primo membro rappresenta un valore assoluto, l'espressione diventa

$$\operatorname{Abs} [\operatorname{sen} [\alpha]] = \frac{\sqrt{1 - \cos [2\alpha]}}{\sqrt{2}}$$

Sostituendo ad α l'angolo $\frac{\alpha}{2}$ otteniamo quanto richiesto

$$\operatorname{Abs} \left[\operatorname{sen} \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right] = \frac{\sqrt{1 - \cos [\alpha]}}{\sqrt{2}}$$

Si tenga presente che per utilizzare proficuamente formule di questo tipo, contenenti il valore assoluto di una funzione goniometrica, sarà necessario conoscere il quadrante dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$ così da riconoscere il segno della funzione ad argomento e "aprire" il valore assoluto.

Abbiamo in sostanza dimostrato

$$\left| \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

Identità dimostrate

Formula di bisezione per il coseno

Partendo invece dalla forma

$$\cos [2 \alpha] = -1 + 2 \cos [\alpha]^2$$

esplicitiamo il $\cos(\alpha)$

$$\cos [\alpha]^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos [2 \alpha])$$

e quindi l'estrazione della radice quadrata conduce alla

$$\sqrt{\cos [\alpha]^2} = \frac{\sqrt{1 + \cos [2 \alpha]}}{\sqrt{2}}$$

ossia

$$\operatorname{Abs} [\cos [\alpha]] = \frac{\sqrt{1 + \cos [2 \alpha]}}{\sqrt{2}}$$

Eseguiamo infine la sostituzione $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$ per ottenere la scrittura canonica per tale identità

$$\operatorname{Abs} \left[\cos \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right] = \frac{\sqrt{1 + \cos [\alpha]}}{\sqrt{2}}$$

To rules

Bisezione per la tangente

Volendo giungere anche alla formula di bisezione per la tangente è sufficiente eseguire il rapporto, membro a membro, delle due identità appena trovate: ovviamente quanto si deduce vale nell'ipotesi che il denominatore sia diverso dallo zero ($\alpha \neq \pi + 2k\pi$). Difatti

$$\frac{\operatorname{Abs} \left[\operatorname{sen} \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right]}{\operatorname{Abs} \left[\cos \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right]} = \frac{\sqrt{1 - \cos [\alpha]}}{\sqrt{1 + \cos [\alpha]}}$$

Possiamo quindi porre

$$\text{Abs} \left[\text{Tan} \left[\frac{\alpha}{2} \right] \right] = \frac{\sqrt{1 - \cos[\alpha]}}{\sqrt{1 + \cos[\alpha]}}$$

Le tre identità ottenute sono in conclusione

$$\left| \text{sen} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\left| \text{cos} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\left| \text{tan} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

To rules

Formule parametriche razionali

Identità dimostrate

Formule parametriche razionali di seno, coseno e tangente

Le formule che dimostreremo in questa sezione si mostrano utili in diverse occasioni, in particolare quando non si dispone di sufficienti informazioni sul quadrante di appartenenza dell'angolo α . Difatti nelle seguenti relazioni non compaiono termini entro valori assoluti per i quali è necessario disporre di tale informazione.

Partiamo dalla formula di duplicazione del seno

$$\text{sen}[2\alpha] = 2 \cos[\alpha] \times \text{sen}[\alpha]$$

e scriviamo il denominatore del secondo membro (che vale evidentemente 1) come $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

$$\text{sen}[2\alpha] = \frac{2 \cos[\alpha] \times \text{sen}[\alpha]}{\cos[\alpha]^2 + \text{sen}[\alpha]^2}$$

Dividiamo ora il numeratore e il denominatore per $\cos^2(\alpha) \neq 0$ supponendo quindi che $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\operatorname{sen}[2\alpha] = \frac{\frac{2 \cos[\alpha] \cdot \operatorname{sen}[\alpha]}{\cos[\alpha]^2}}{\frac{\cos[\alpha]^2 + \operatorname{sen}[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2}}$$

Ricordando che $\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ il secondo membro si riscrive

$$\operatorname{sen}[2\alpha] = \frac{2 \tan[\alpha]}{1 + \tan[\alpha]^2}$$

Infine per riportare l'identità appena trovata alla forma canonica eseguiamo la sostituzione $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{sen}[\alpha] = \frac{2 \tan\left[\frac{\alpha}{2}\right]}{1 + \tan\left[\frac{\alpha}{2}\right]^2}$$

Procedendo allo stesso modo possiamo giungere all'identità collegata al coseno: difatti, riscritta

$$\cos[2\alpha] = \cos[\alpha]^2 - \operatorname{sen}[\alpha]^2$$

come

$$\cos[2\alpha] = \frac{\cos[\alpha]^2 - \operatorname{sen}[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2 + \operatorname{sen}[\alpha]^2}$$

dividiamo ancora il numeratore e il denominatore per $\cos^2(\alpha) \neq 0$ supponendo quindi che $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\cos[2\alpha] = \frac{\frac{\cos[\alpha]^2 - \operatorname{sen}[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2}}{\frac{\cos[\alpha]^2 + \operatorname{sen}[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2}}$$

Per la proprietà distributiva e la definizione della tangente, questa diviene

$$\cos[2\alpha] = \frac{1 - \tan[\alpha]^2}{1 + \tan[\alpha]^2}$$

L'applicazione della sostituzione $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$ implica

$$\cos[\alpha] = \frac{1 - \tan\left[\frac{\alpha}{2}\right]^2}{1 + \tan\left[\frac{\alpha}{2}\right]^2}$$

La terza ed ultima formula di bisezione si ottiene immediatamente con la sostituzione $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$ a partire da quella di duplicazione per la tangente

$$\tan [2 \alpha] = \frac{2 \tan [\alpha]}{1 - \tan [\alpha]^2}$$

Difatti si ha

$$\tan [\alpha] = \frac{2 \tan \left[\frac{\alpha}{2} \right]}{1 - \tan \left[\frac{\alpha}{2} \right]^2}$$

In conclusione, le formule di bisezione ottenute sono

$$\sin(\alpha) = \frac{\alpha \left(2 \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)}{\tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 1} \neq 2 k\pi + \pi$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\alpha \left(1 - \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)}{\tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 1} \neq 2 k\pi + \pi$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\alpha \left(2 \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)}{1 - \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \neq 2 k\pi + \pi$$

To rules

Formule di Werner e prostaferesi

Identità dimostrate

Formule di Werner

Riportate di seguito le formule di addizione e sottrazione per il seno e coseno, deduciamo da queste delle ulteriori identità con le quali potremo collegare prodotti di funzioni goniometriche con somme.

$$(1) \text{ senAdd} \quad \sin [\alpha + \beta] = \cos [\beta] \times \sin [\alpha] + \cos [\alpha] \times \sin [\beta]$$

$$(2) \text{ senDiff} \quad \sin [\alpha - \beta] = \cos [\beta] \times \sin [\alpha] - \cos [\alpha] \times \sin [\beta]$$

$$(3) \text{ cosAdd} \quad \cos [\alpha + \beta] = \cos [\alpha] \times \cos [\beta] - \sin [\alpha] \times \sin [\beta]$$

$$(4) \text{ cosDiff} \quad \cos [\alpha - \beta] = \cos [\alpha] \times \cos [\beta] + \sin [\alpha] \times \sin [\beta]$$

Sommando quindi in colonna le prime due, otteniamo

$$\sin [\alpha - \beta] + \sin [\alpha + \beta] = 2 \cos [\beta] \times \sin [\alpha]$$

che evidentemente associa il prodotto del seno e coseno con una somma. Dividendo per 2 e scrivendo il secondo membro come primo abbiamo

$$\cos [\beta] \times \operatorname{sen} [\alpha] = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} [\alpha - \beta] + \operatorname{sen} [\alpha + \beta])$$

espressione che costituisce la prima formula di Werner. Se, al contrario, eseguiamo la differenza delle prime due identità e procediamo allo stesso modo otteniamo

$$2 \cos [\alpha] \times \operatorname{sen} [\beta] = -\operatorname{sen} [\alpha - \beta] + \operatorname{sen} [\alpha + \beta]$$

$$\cos [\alpha] \times \operatorname{sen} [\beta] = \frac{1}{2} (-\operatorname{sen} [\alpha - \beta] + \operatorname{sen} [\alpha + \beta])$$

che sostanzialmente mostra il medesimo risultato a parte lo scambio dell'angolo α con β . Eseguendo invece la somma della terza e quarta identità

$$\cos [\alpha - \beta] + \cos [\alpha + \beta] = 2 \cos [\alpha] \times \cos [\beta]$$

giungiamo, dopo aver scambiato i membri e diviso per 2

$$\cos [\alpha] \times \cos [\beta] = \frac{1}{2} (\cos [\alpha - \beta] + \cos [\alpha + \beta])$$

alla seconda formula di Werner: questa collega il prodotto di due coseni con una somma. Infine sottraendo la quarta dalla terza

$$-\cos [\alpha - \beta] + \cos [\alpha + \beta] = -2 \operatorname{sen} [\alpha] \times \operatorname{sen} [\beta]$$

e semplificata dividendola per -2 e quindi scambiati i membri, ricaviamo la terza formula di Werner che riporta un prodotto di seni in una somma.

$$\operatorname{sen} [\alpha] \times \operatorname{sen} [\beta] = \frac{1}{2} (\cos [\alpha - \beta] - \cos [\alpha + \beta])$$

To rules

Formule di prostaferesi

Infine, le quattro formule di prostaferesi si deducono dalle espressioni intermedie servite per giungere alle relazioni di Werner. A tal fine si sostituiscono, in luogo degli angoli α e β , le nuove variabili

$$\begin{cases} p = \alpha + \beta \\ q = \alpha - \beta \end{cases}$$

Esplicitati α e β in termini di p e q

$$\left\{ \alpha \rightarrow \frac{p+q}{2}, \beta \rightarrow \frac{p-q}{2} \right\}$$

e, dopo aver sommato la formula di addizione per il seno con quella della sottrazione,

$$\operatorname{sen}[\alpha - \beta] + \operatorname{sen}[\alpha + \beta] = 2 \cos[\beta] \times \operatorname{sen}[\alpha]$$

è sufficiente sostituire le nuove variabili

$$\operatorname{sen}\left[\frac{p-q}{2} + \frac{p+q}{2}\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(-p+q) + \frac{p+q}{2}\right] = 2 \cos\left[\frac{p-q}{2}\right] \times \operatorname{sen}\left[\frac{p+q}{2}\right]$$

e semplificare

$$\operatorname{sen}[p] + \operatorname{sen}[q] = 2 \cos\left[\frac{p-q}{2}\right] \times \operatorname{sen}\left[\frac{p+q}{2}\right]$$

È questa la prima formula di prostaferesi che, come appare evidente, riduce una somma di seni ad un prodotto. Le altre si ottengono in maniera analoga: per ottenere la seconda identità di prostaferesi, riferendoci sempre alle identità di inizio sezione va sottratta la seconda dalla prima

$$-\operatorname{sen}[\alpha - \beta] + \operatorname{sen}[\alpha + \beta] = 2 \cos[\alpha] \times \operatorname{sen}[\beta]$$

per cui, scambiati i membri

$$2 \cos[\alpha] \times \operatorname{sen}[\beta] = -\operatorname{sen}[\alpha - \beta] + \operatorname{sen}[\alpha + \beta]$$

e sostituite le nuove variabili angolari si ottiene

$$\operatorname{sen}[p] = 2 \cos\left[\frac{p+q}{2}\right] \times \operatorname{sen}\left[\frac{p-q}{2}\right] + \operatorname{sen}[q]$$

$$\operatorname{sen}[p] - \operatorname{sen}[q] = 2 \cos\left[\frac{p+q}{2}\right] \times \operatorname{sen}\left[\frac{p-q}{2}\right]$$

$$\operatorname{sen}[p_-] - \operatorname{sen}[q_-] \Rightarrow 2 \cos\left[\frac{p+q}{2}\right] \times \operatorname{sen}\left[\frac{p-q}{2}\right]$$

Per la terza di prostaferesi, si parte invece dalla somma della terza identità iniziale con la quarta

$$\cos[\alpha - \beta] + \cos[\alpha + \beta] = 2 \cos[\alpha] \times \cos[\beta]$$

e con il medesimo processo si trova

$$\cos[p] + \cos[q] = 2 \cos\left[\frac{p-q}{2}\right] \times \cos\left[\frac{p+q}{2}\right]$$

Per ultimo, sottraendo la quarta dalla terza

$$-\cos[\alpha - \beta] + \cos[\alpha + \beta] = -2 \operatorname{sen}[\alpha] \times \operatorname{sen}[\beta]$$

e, inserite le variabili p e q

$$\cos[p] + 2 \operatorname{sen}\left[\frac{p-q}{2}\right] \times \operatorname{sen}\left[\frac{p+q}{2}\right] = \cos[q]$$

$$-\cos [p] + \cos [q] = 2 \operatorname{sen} \left[\frac{p-q}{2} \right] \times \operatorname{sen} \left[\frac{p+q}{2} \right]$$

la moltiplicazione per -1 conduce al risultato cercato

$$\cos [p] - \cos [q] = -2 \operatorname{sen} \left[\frac{p-q}{2} \right] \times \operatorname{sen} \left[\frac{p+q}{2} \right]$$

In conclusione le **3 formule distinte di Werner** sono

$$\cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta))$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

e collegano dei prodotti di funzioni con delle somme, mentre le quattro di **prostaferesi**

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

associano a somme delle medesime funzioni, dei prodotti.

To rules

Riassunto di tutte le identità dimostrate

Tabelle

Presentiamo infine due tabelle riassuntive di tutte le identità dimostrate in questo notebook con associati i rispettivi nomi simbolici usati.

Identità goniometriche dello stesso angolo

idFondamentale	$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$
cosNotosen	$ \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin(\alpha)^2}$
tanNotosen	$ \tan(\alpha) = \frac{ \sin(\alpha) }{\sqrt{1 - \sin(\alpha)^2}}$
senNotocos	$ \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2}$
tanNotocos	$ \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \cos(\alpha)^2}}{ \cos(\alpha) }$
senNototan	$ \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{\tan(\alpha)^2}{\tan(\alpha)^2 + 1}}$
cosNototan	$ \cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{\tan(\alpha)^2 + 1}}$

Identità goniometriche di angoli diversi

idFondamentale	$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$
senCompl	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
cosCompl	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$
tanCompl	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
senDiffPi2	$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$
cosDiffPi2	$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$
tanDiffPi2	$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
senSuppl	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
cosSuppl	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
tanSuppl	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
senExpl	$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
cosExpl	$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$

tanExpl	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$
senOpp	$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$
cosOpp	$\text{cos}(-\alpha) = \text{cos}(\alpha)$
tanOpp	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
cosDiff	$\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$
cosAdd	$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$
senDiff	$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{cos}(\beta) \text{sen}(\alpha) - \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\beta)$
senAdd	$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{cos}(\beta) \text{sen}(\alpha) + \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\beta)$
tanAdd	$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$
tanDiff	$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{\tan(\alpha) \tan(\beta) + 1}$
senDupl	$\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha)$
cosDupl	$\text{cos}(2\alpha) = \text{cos}(\alpha)^2 - \text{sen}(\alpha)^2$
cosDuplSen	$\text{cos}(2\alpha) = 1 - 2 \text{sen}(\alpha)^2$
cosDuplCos	$\text{cos}(2\alpha) = 2 \text{cos}(\alpha)^2 - 1$
tanDupl	$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)^2}$
senBis	$\left \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right = \frac{\sqrt{1 - \text{cos}(\alpha)}}{\sqrt{2}}$
cosBis	$\left \text{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right = \frac{\sqrt{\text{cos}(\alpha) + 1}}{\sqrt{2}}$
tanBis	$\left \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right = \frac{\sqrt{1 - \text{cos}(\alpha)}}{\sqrt{\text{cos}(\alpha) + 1}}$
senRaz	$\text{sen}(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1}$
cosRaz	$\text{cos}(\alpha) = \frac{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1}$
tanRaz	$\tan(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$

wernerCosSen	$\cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta))$
wernerCosCos	$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
wernerSenSen	$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
proSenAddSen	$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
proSenDiffSen	$\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
proCosAddCos	$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
proCosDiffCos	$\cos(p) - \cos(q) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)$