Integrazione definita: le somme di Riemann

Lorenzo Roi (luglio 2022)

Nota

Questo notebook di *Mathematica* riporta la traccia di una lezione introduttiva all'integrale definito proposta ad una classe quinta di liceo scientifico.

Funzioni e codice

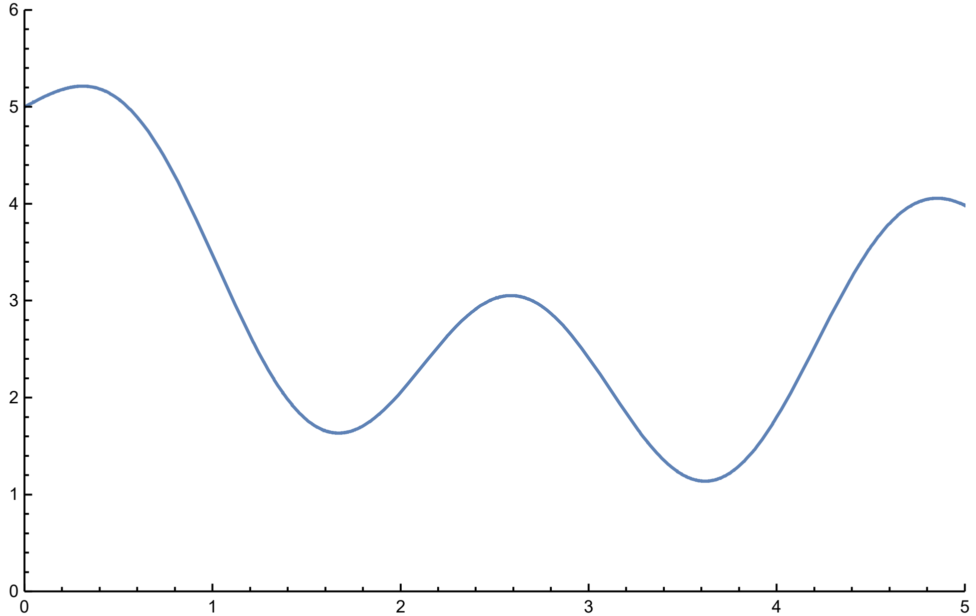
Area del trapezoide e dei plurirettangoli

Definita la funzione

$$f[x\_] := \frac{1}{3} x^2 - 2x + 5 + \mathrm{Sin}[3x];$$

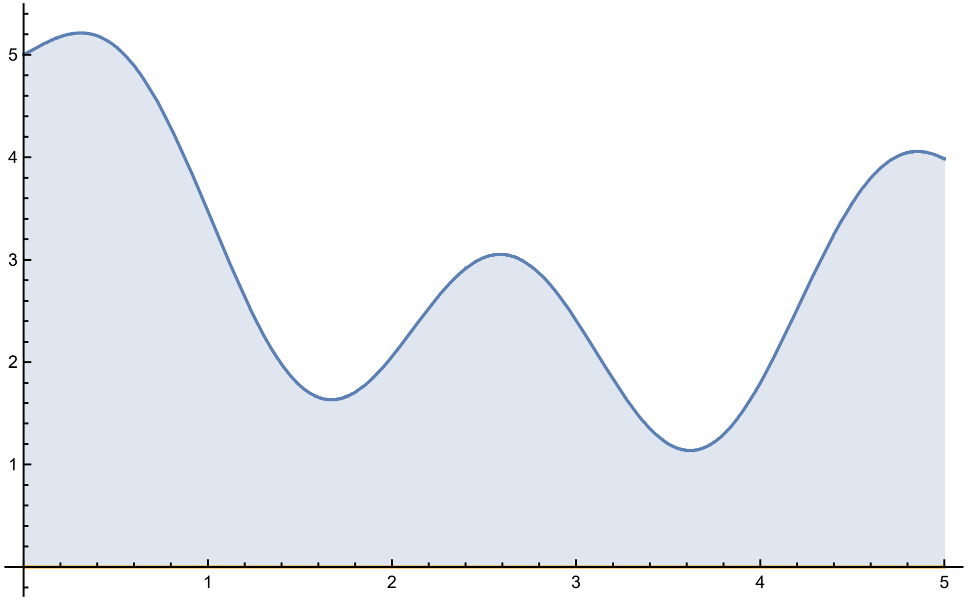
studiamone il grafico in un intervallo chiuso $[a, b]$, per esempio $[0, 5]$.

```
a = 0; b = 5;
graficoFunzione = Plot[f[x], {x, a, b}, PlotRange → {{a, b}, {0, 6}}]
```



Osserviamo che la funzione $f(x)$ risulta in $[0, 5]$ sempre positiva. Il nostro scopo è di determinare l'area della regione compresa tra le rette di equazione $x = 0$, $x = 5$, la curva grafico di f, e l'asse delle ascisse, regione ben evidenziata nel grafico sottostante e chiamata trapezoide.
Va subito notato che tale area dipende dalle scelte che abbiamo fatto ossia sostanzialmente dalla funzione f e dagli estremi dell'intervallo $[a, b]$ cioè da 0 e da 5.

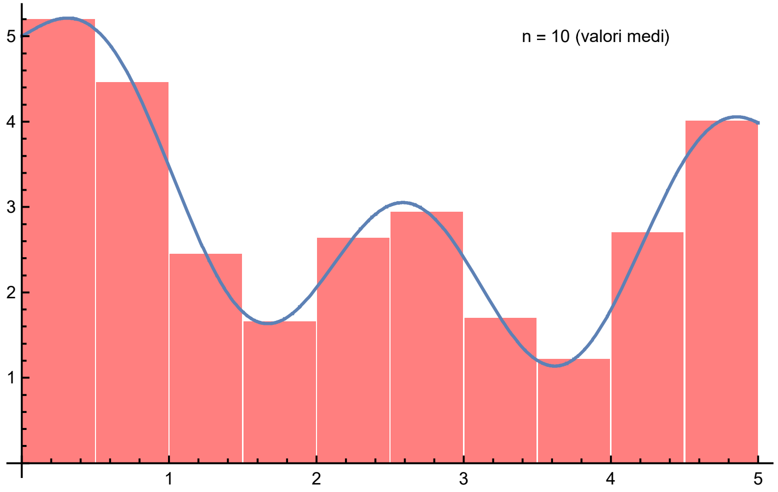
```
trapezoide = Plot[{f[x], 0}, {x, a, b}, Filling → Axis]
```



Per determinare l'area del trapezoide suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in *n* intervallini di ampiezza uguale e consideriamo la figura formata dall'unione di tutti i rettangoli aventi per basi gli intervalli di ampiezza $\frac{b-a}{n}$ ed altezze pari al valore della funzione f calcolata nel punto medio di ciascun intervallino. Figure di tal genere, analoghe ai tradizionali istogrammi, vengono indicate come *plurirettangoli* associati alla funzione.
Se identifichiamo l'estremo inferiore *a* con l'estremo inferiore del primo intervallino (cioè $x_0 = a$) e l'estremo superiore *b* di $[a, b]$ con l'estremo superiore dell'*n*-esimo intervallino ($x_n = b$), ne segue che l'indice i potrà assumere i valori tra $(1 ... n)$ e l'i-esimo intervallino avrà estremi $[x_{i-1}, x_i]$. In termini dell'ampiezza comune $amp = \frac{b-a}{n}$ risultano le seguenti espressioni:

- ascissa degli estremi: $x_i = a + i * amp$, $\quad i = 1 .. n$
- ascissa del punto medio di quest'ultimo risulta $x_{m,i} = \frac{(x_{i-1}+x_i)}{2} = a + \frac{amp}{2}(2 i - 1)$

Le istruzioni sottostanti costruiscono il plurirettangolo e lo rappresentano assieme al grafico della funzione. Si noti che si è scelta una suddivisione dell'intervallo in 10 intervallini $(n = 10)$ e che la funzione viene calcolata in $x_{m,i}$.

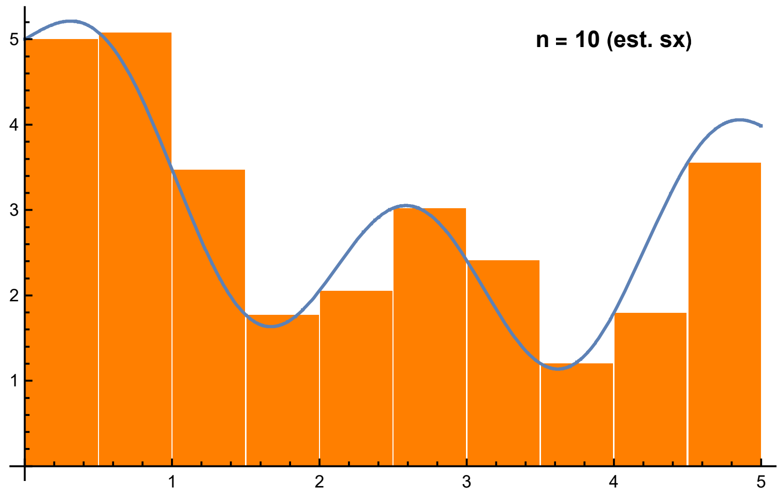


L'area di questo plurirettangolo viene calcolata dalla funzione successiva ed è evidentemente data dalla somma delle aree dei singoli rettangoli componenti: è questa la prima somma di Riemann che presentiamo:
fissato $n = 10$, l'area del plurirettangolo corrispondente è

```
areaPluriRettMed10 = metodoRettangoliMed[a, b, 10, f] // N
```

```
14.4996
```

Anziché calcolare le altezze dei singoli rettangoli nel punto medio dell'intervallo si potrebbe scegliere di calcolarle nell'estremo sinistro di ciascuno e cioè in $x_{i-1} = a + amp * (i - 1)$. È quanto viene fatto dalle funzioni che seguono

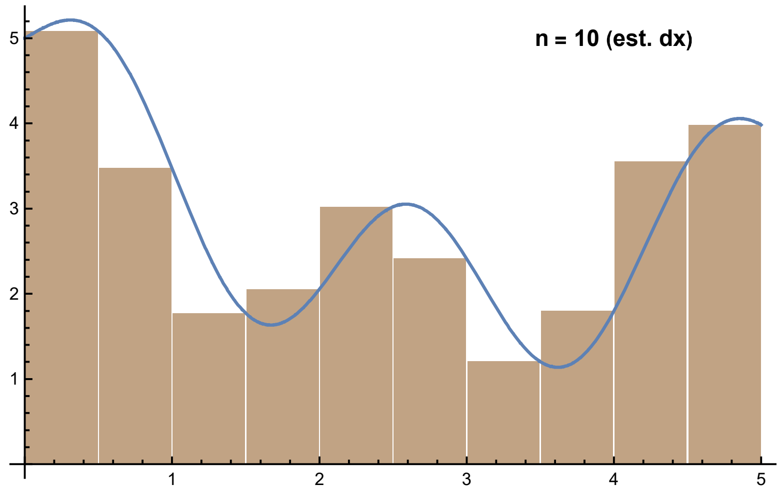


La funzione che fornisce l'area diviene in tal caso

```
areaPluriRettEstSx10 = metodoRettangoliEstSx[a, b, 10, f] // N
```

```
14.6847
```

Come si può facilmente constatare disponiamo già di due valori approssimati dell'area del trapezoide, entrambi corrispondenti ad una suddivisione in 10 intervallini. Nello stesso modo, e solo con leggere modifiche al codice, costruiamo il plurirettangolo con le altezze calcolate nell'estremo destro $x_i = a + amp * i$ di ciascun intervallino e

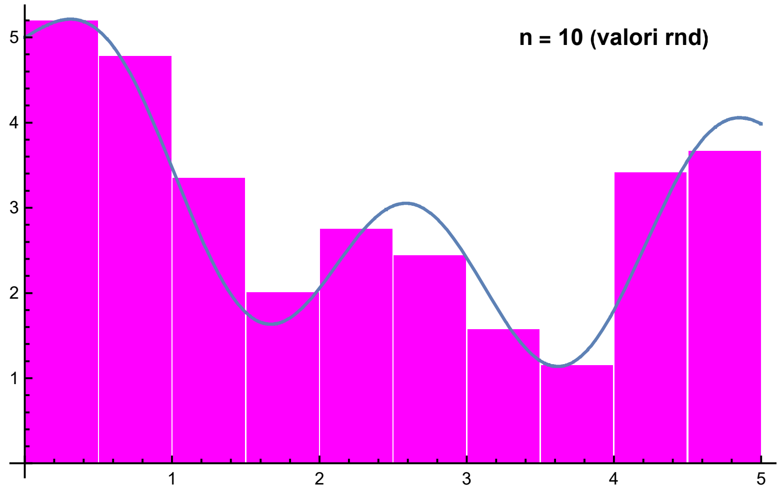


calcoliamo poi il valore dell'area del nuovo plurirettangolo

```
areaPluriRettEstDx10 = metodoRettangoliEstDx[a, b, 10, f] // N
```

```
14.1765
```

Diviene ora evidente come sia possibile costruire diversi plurirettangoli in corrispondenza di una medesima suddivisione dell'intervallo originario: per esempio potremmo considerare il minimo (o il massimo) assoluto assunti dalla funzione in ciascun intervallino e identificare questi valori come le altezze dei diversi rettangoli oppure, ed è quanto seguiremo, potremo calcolare le altezze in un punto scelto a caso all'interno di ciascun intervallino.
Difatti di seguito otteniamo sia l'istogramma rappresentativo



sia l'area del plurirettangolo.

```
areaPluriRettRnd10 = metodoRettangoliRnd[a, b, 10, f] // N
```

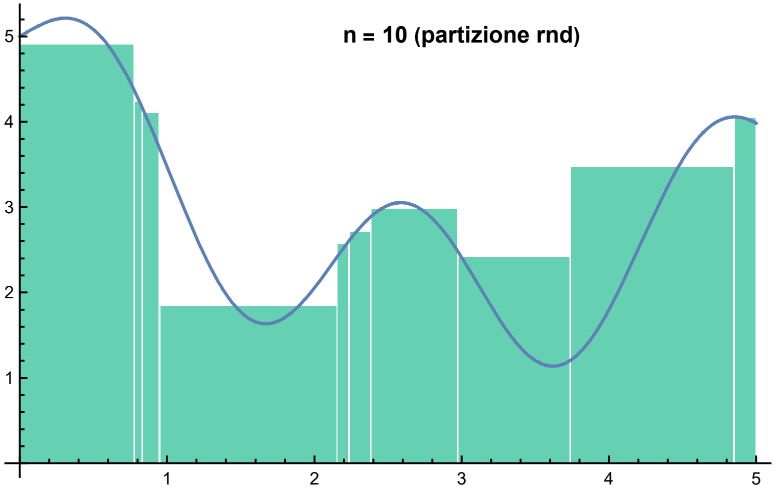
```
14.5411
```

Con questa scelta risulta chiaro che, fissata una certa suddivisione dell'intervallo $[a, b]$, abbiamo infinite possibilità per costruire un plurirettangolo e di conseguenza, infiniti valori per la sua area. Difatti è sufficiente ricalcolare l'area per ottenere un altro valore generalmente diverso per quest'ultima.

```
areaPluriRettRnd10 = metodoRettangoliRnd[a, b, 10, f] // N
```

```
14.8497
```

Per sottolineare ulteriormente la libertà esistente nel costruire i plurirettangoli intendiamo infine rimuovere pure l'unica restrizione che finora abbiamo sempre rispettato e che consiste nel suddividere l'intervallo $[a, b]$ in intervallini di uguale ampiezza. Procederemo pertanto ad una suddivisione casuale di $[a, b]$ cioè ad una sua partizione in intervallini di ampiezza generalmente diversa. A tal fine, facendo coincidere ancora l'estremo inferiore del primo con a e l'estremo superiore dell'n-esimo con b, è sufficiente scegliere in modo casuale $n - 1$ punti interni di $[a, b]$. Il codice, un po' più complesso dei precedenti, realizza ciò sfruttando uno dei più importanti strumenti di Mathematica ossia le liste. Al solito, si costruisce dapprima l'istogramma e poi la corrispondente somma di Riemann.



La corrispondente somma di Riemann fornisce, per n = 10

```
areaPluriRettPartRnd10 = metodoRettangoliPartRnd[a, b, 10, f] // N
```

```
17.7079
```

Riassumiamo infine in una tabella i valori finora ottenuti:

	area plurirettangoli n=10
con valore medio	14.4996
estr. sx	14.6847
estr. dx	14.1765
valore casuale	14.8497
partizione casuale	17.7079

Come si vede i valori sono tutti diversi (e ci mancherebbe!) pur non essendo, tra loro, sensibilmente diversi. Il metodo finora seguito, e quest'ultima osservazione, suggeriscono naturalmente di aumentare le suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ in modo tale che i plurirettangoli approssimino in modo più fine il trapezoide. Nella prossima sezione intendiamo quindi studiare, al variare del numero n di intervallini, come vari l'area dei plurirettangoli e, particolarmente, il suo andamento quando $n \to +\infty$.

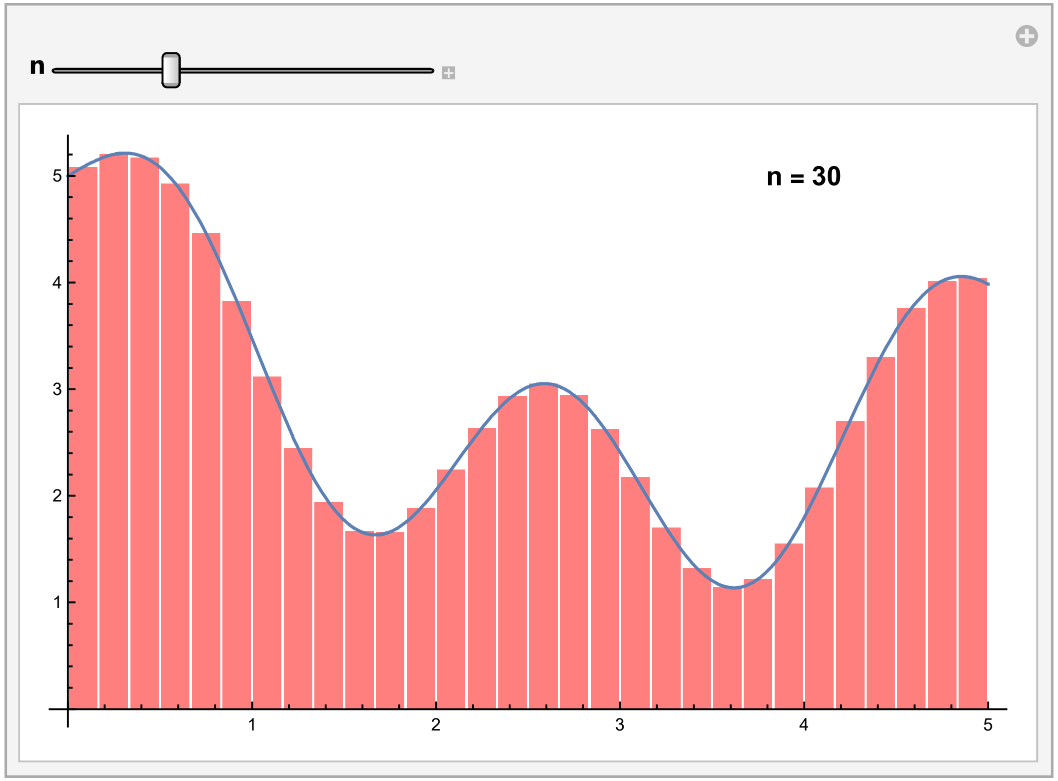
Andamento dell'area dei plurirettangoli

Definiamo una funzione più flessibile delle precedenti e con la quale, tramite una semplice opzione (che può assumere i valori *med*, *sx*, *dx*, *rnd*, *partRnd*), si possa selezionare una delle cinque tecniche viste sopra per il calcolo dell'area. In mancanza di questa verrà attivato il calcolo nel punto medio degli intervallini.
Per puro controllo ricalcoliamo l'area nei punti medi

```
areaPluriRettangolo[a, b, 10, f, metodo → med]
```

```
14.4996
```

Come detto, appare naturale aumentare il numero di suddivisioni dell'intervallo originario in modo da migliorare la nostra approssimazione all'area del trapezoide. Un'animazione grafica, per $n = 1 - 100$, mette bene in evidenza questo fatto geometrico.

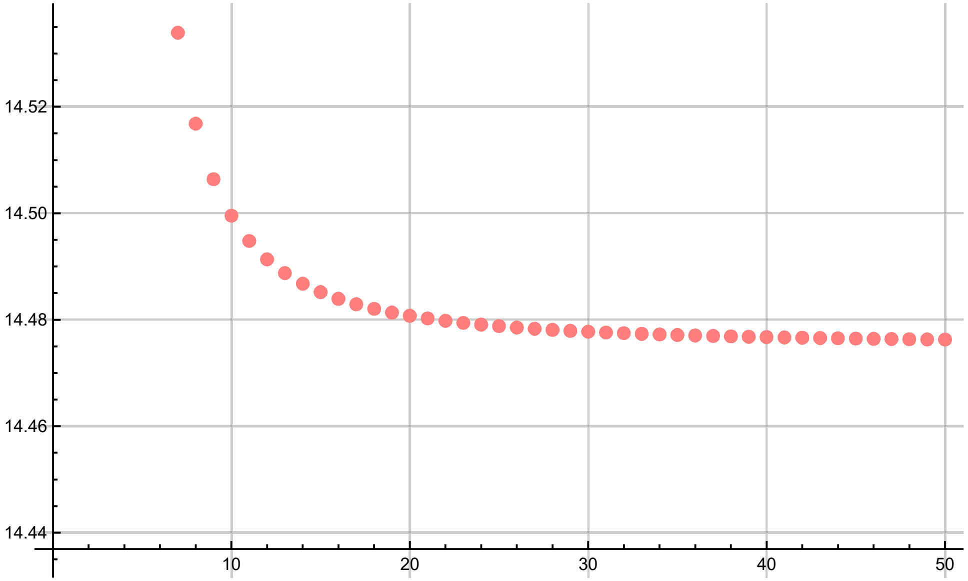


Formiamo quindi una tabella di valori che metta in corrispondenza il numero *n* di intervallini (a partire da 1 e fino a 50) con le aree dei rispettivi plurirettangoli.

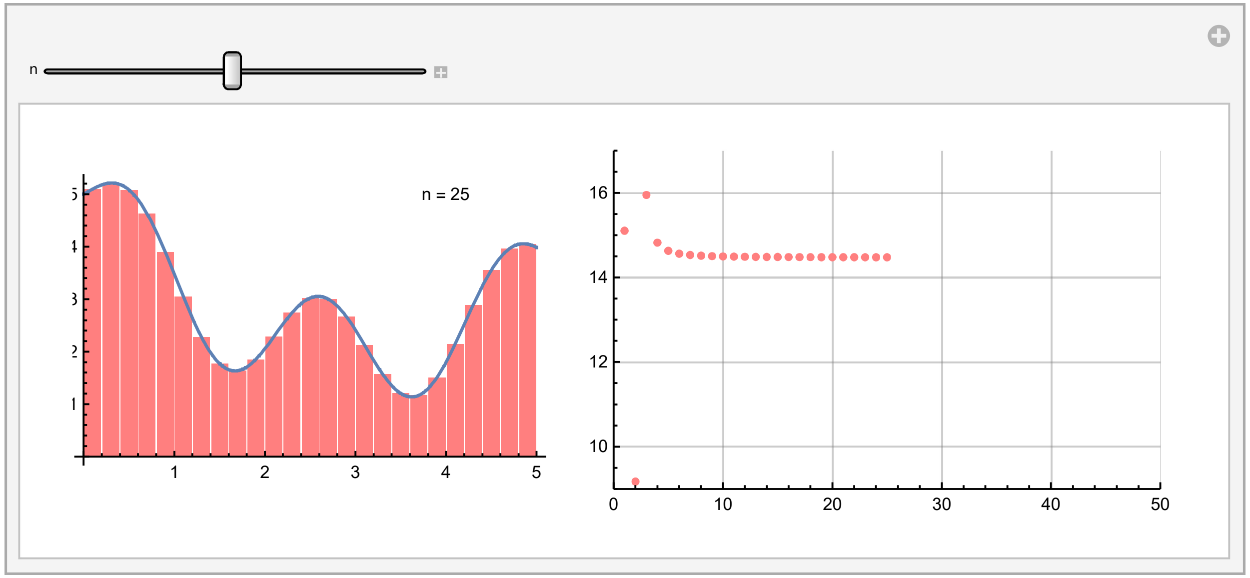
num.intervallini	area (med)
1	15.1067
2	9.17241
3	15.9533
4	14.8246
5	14.6321
6	14.5651
7	14.5339
8	14.5168
9	14.5064
10	14.4996
11	14.4948
12	14.4913
13	14.4888
14	14.4868
15	14.4852
16	14.4839
17	14.4829
18	14.4821
19	14.4813
20	14.4807
21	14.4802
22	14.4798
23	14.4794
24	14.4791
25	14.4788
26	14.4785
27	14.4783
28	14.4781
29	14.4779
30	14.4777
31	14.4776
32	14.4775
33	14.4773
34	14.4772
35	14.4771
36	14.477

37	14.477
38	14.4769
39	14.4768
40	14.4767
41	14.4767
42	14.4766
43	14.4766
44	14.4765
45	14.4765
46	14.4764
47	14.4764
48	14.4763
49	14.4763
50	14.4763

Come si vede e come aspettato, l'approssimazione all'area del trapezoide, appare migliorare all'aumentare del numero di suddivisioni. Sottolineiamo inoltre che tale tabella può essere interpretata come l'elenco dei primi 50 termini di una successione, successione della quale intendiamo studiare (numericamente) il limite per $n \to +\infty$. Per disporre comunque di una visione d'insieme di tali risultati è utile una rappresentazione grafica che ponga in ascissa in numero n e in ordinata la corrispondente area del plurirettangolo.



Una seconda animazione permette di associare la situazione geometrica con l'andamento dell'area dei plurirettangoli all'aumentare di n.



L'andamento riesce del tutto evidente: la successione appare convergere asintoticamente ad un certo valore. Generalizziamo ulteriormente tale approccio costruendo una tabella comprensiva di tutti e cinque i metodi di calcolo presentati nella sezione precedente, sempre per n che varia da 1 a 50.

num. intervallini	area (medi)	area (est.sx)	area (est.dx)	area (rnd)	area (part.rnd)
1	15.1067	25.	19.9181	8.23586	14.4957
2	9.17241	20.0533	17.5124	17.0447	19.6026
3	15.9533	13.5445	11.8505	18.6998	12.8301
4	14.8246	14.6129	13.3424	14.387	13.3087
5	14.6321	14.7373	13.7209	14.2006	14.0327
6	14.5651	14.7489	13.9019	15.2285	13.6578
7	14.5339	14.7364	14.0104	14.2776	15.6016
8	14.5168	14.7187	14.0835	13.9967	14.3855
9	14.5064	14.701	14.1363	13.6868	14.2543
10	14.4996	14.6847	14.1765	15.7883	13.3779
11	14.4948	14.67	14.208	14.5804	15.9923
12	14.4913	14.657	14.2335	14.6875	11.1027
13	14.4888	14.6454	14.2545	14.7194	14.8017
14	14.4868	14.6352	14.2722	14.3077	15.3436
15	14.4852	14.626	14.2872	14.3632	13.5923
16	14.4839	14.6178	14.3002	14.8702	14.9877
17	14.4829	14.6104	14.3115	14.4885	14.0773

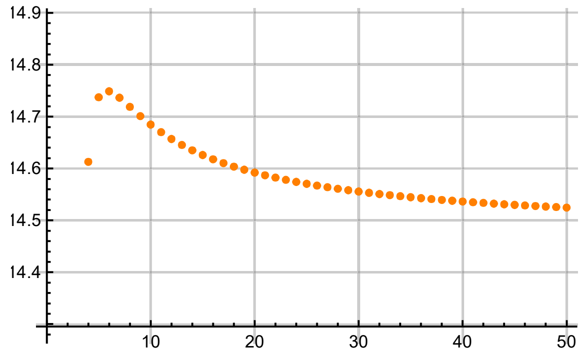
18	14.4821	14.6037	14.3214	14.5703	15.6673
19	14.4813	14.5976	14.3302	14.5686	14.8647
20	14.4807	14.5921	14.338	14.4981	14.0884
21	14.4802	14.587	14.345	14.6946	14.6842
22	14.4798	14.5824	14.3514	14.2529	14.0235
23	14.4794	14.5781	14.3572	14.3589	13.407
24	14.4791	14.5742	14.3624	14.7942	14.5394
25	14.4788	14.5705	14.3672	14.5157	14.263
26	14.4785	14.5671	14.3716	14.2598	15.0682
27	14.4783	14.5639	14.3757	14.2226	14.844
28	14.4781	14.561	14.3795	14.3282	14.3466
29	14.4779	14.5582	14.383	14.5176	15.1536
30	14.4777	14.5556	14.3862	14.3477	14.7739
31	14.4776	14.5532	14.3892	14.605	15.0607
32	14.4775	14.5509	14.392	14.4093	14.3675
33	14.4773	14.5487	14.3947	14.4518	14.9018
34	14.4772	14.5466	14.3972	14.4636	13.9552
35	14.4771	14.5447	14.3995	14.5209	14.2893
36	14.477	14.5429	14.4017	14.5411	14.8318
37	14.477	14.5411	14.4038	14.5007	13.9906
38	14.4769	14.5395	14.4058	14.3834	13.8269
39	14.4768	14.5379	14.4076	14.3426	14.4911
40	14.4767	14.5364	14.4094	14.4646	14.8202
41	14.4767	14.535	14.4111	14.4215	14.4305
42	14.4766	14.5336	14.4126	14.5163	14.6314
43	14.4766	14.5323	14.4142	14.4424	14.6553
44	14.4765	14.5311	14.4156	14.4203	14.4268
45	14.4765	14.5299	14.417	14.4396	14.5741
46	14.4764	14.5288	14.4183	14.5221	14.5241
47	14.4764	14.5277	14.4195	14.4852	14.3488
48	14.4763	14.5266	14.4207	14.4541	14.2471
49	14.4763	14.5256	14.4219	14.4578	14.3422
50	14.4763	14.5246	14.423	14.4742	14.1787

Ancora, si nota la tendenza alla

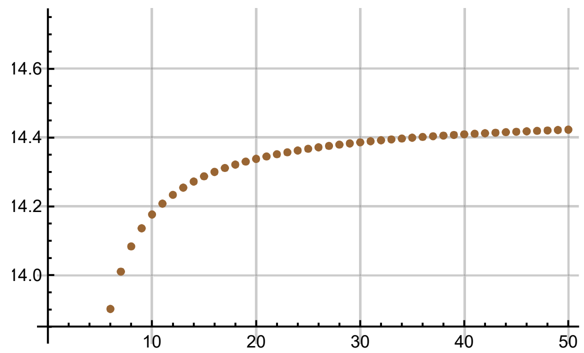
- convergenza di ciascuna successione e, cosa particolarmente importante,
- le differenze tra le aree calcolate con ciascun metodo, tendono a diminuire.

La rappresentazione grafica permette di cogliere tutte queste proprietà in modo sintetico ed immediato,

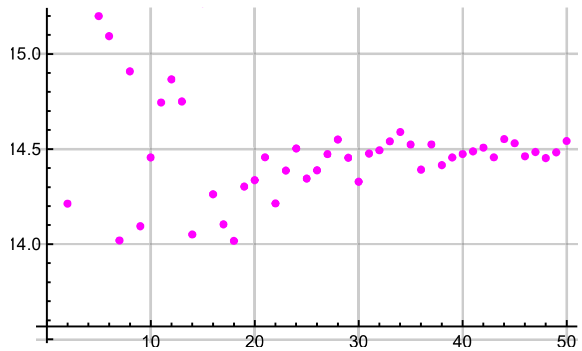
Estremo sx



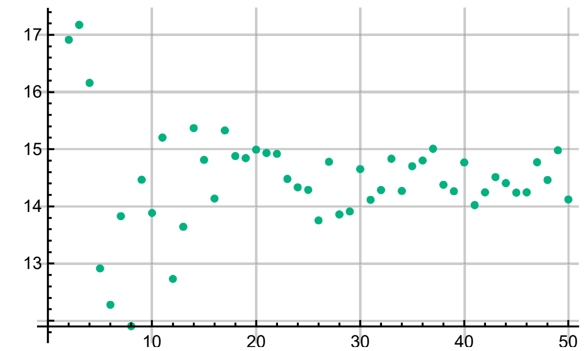
Estremo dx



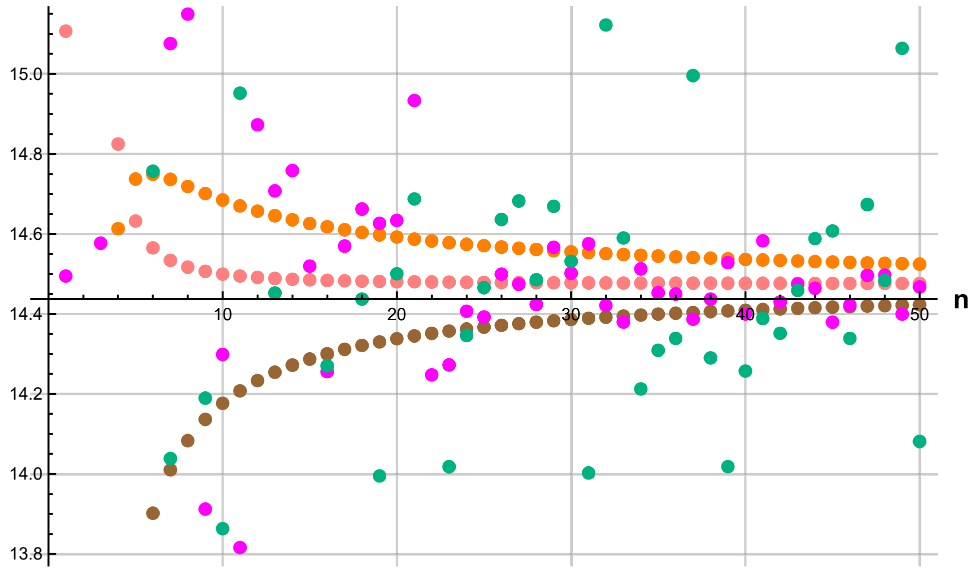
Valore casuale



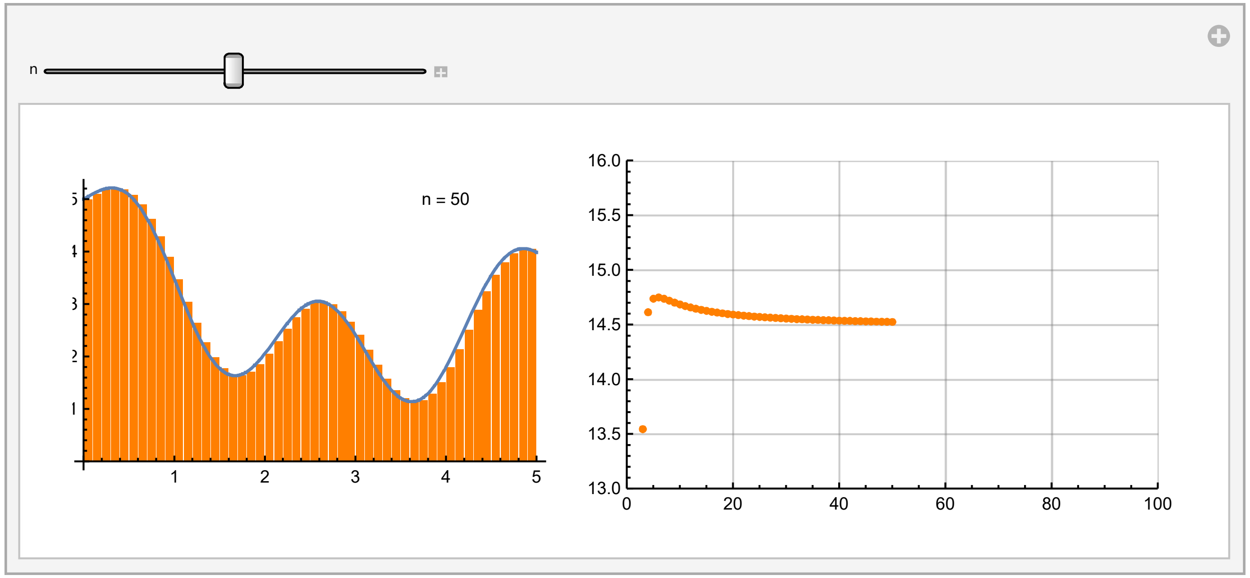
Partizione casuale

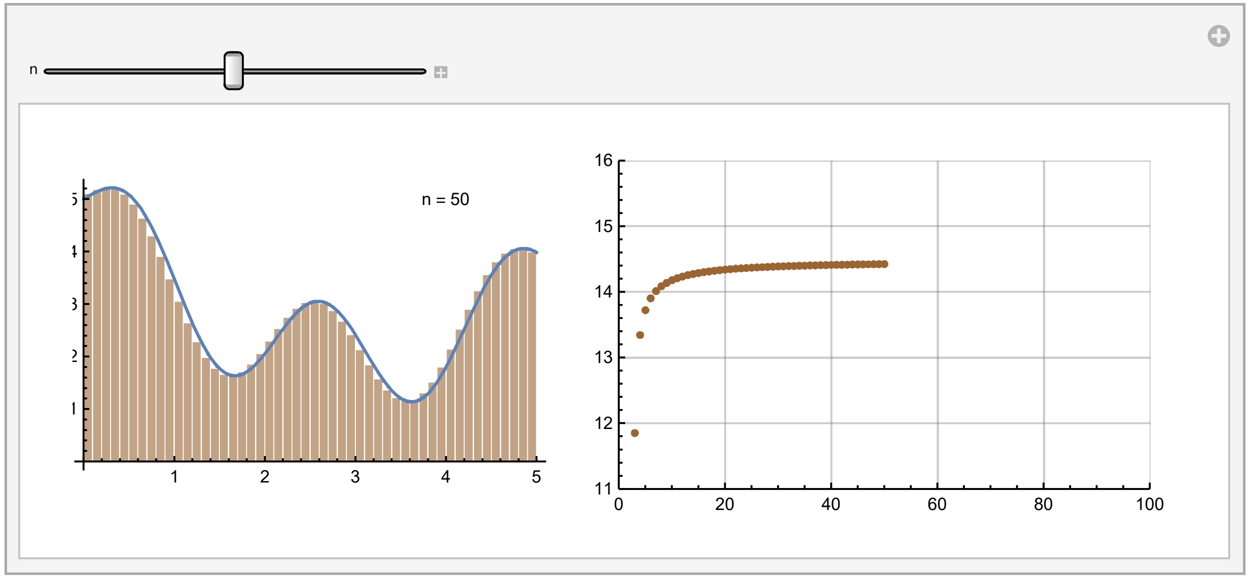


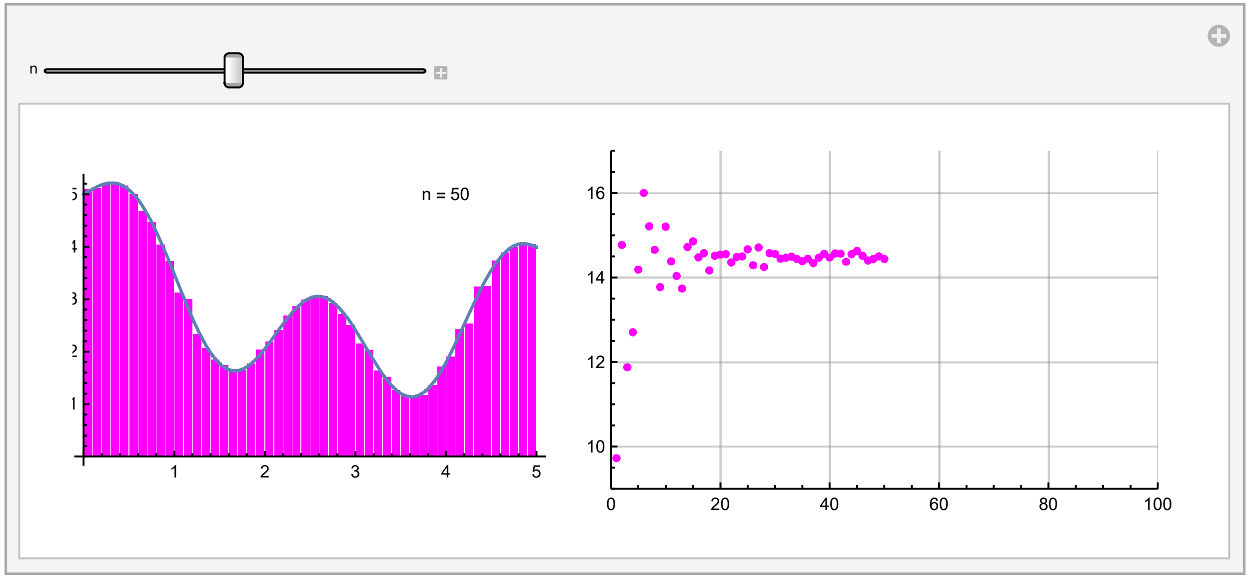
in particolare, quando tutti gli andamenti vengono riportati sul medesimo piano.

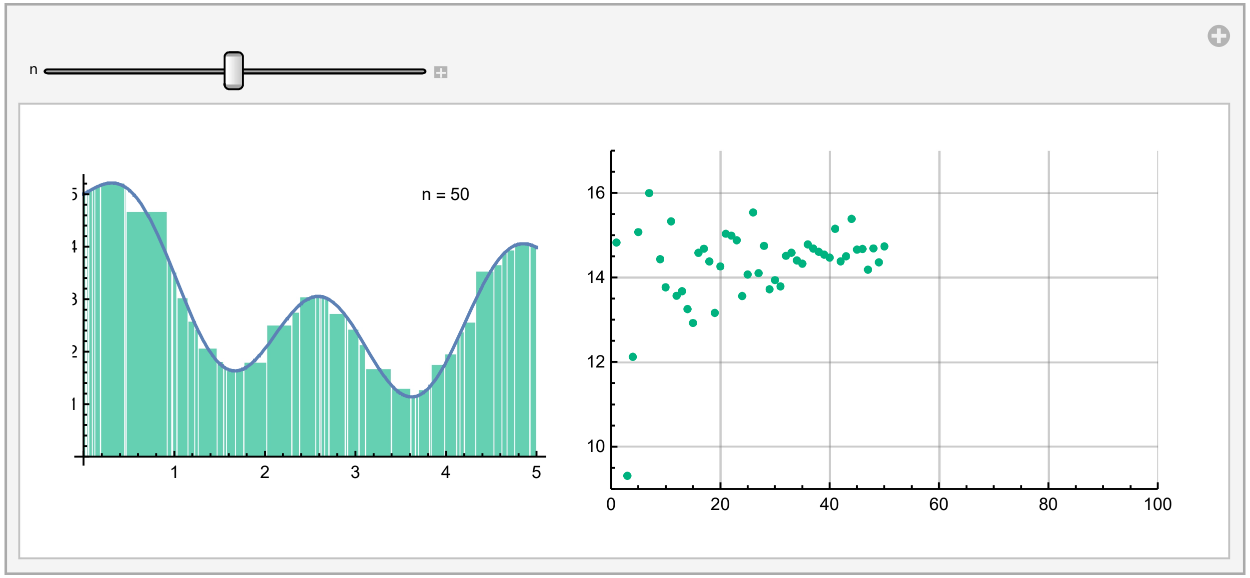


Riportiamo ancora in un'animazione sia i plurirettangoli che il grafico dell'andamento della successione delle somme di Riemann nei rimanenti quattro casi.




n
n = 50
1
2
3
4
5
16
15
14
13
12
11
0
20
40
60
80
100

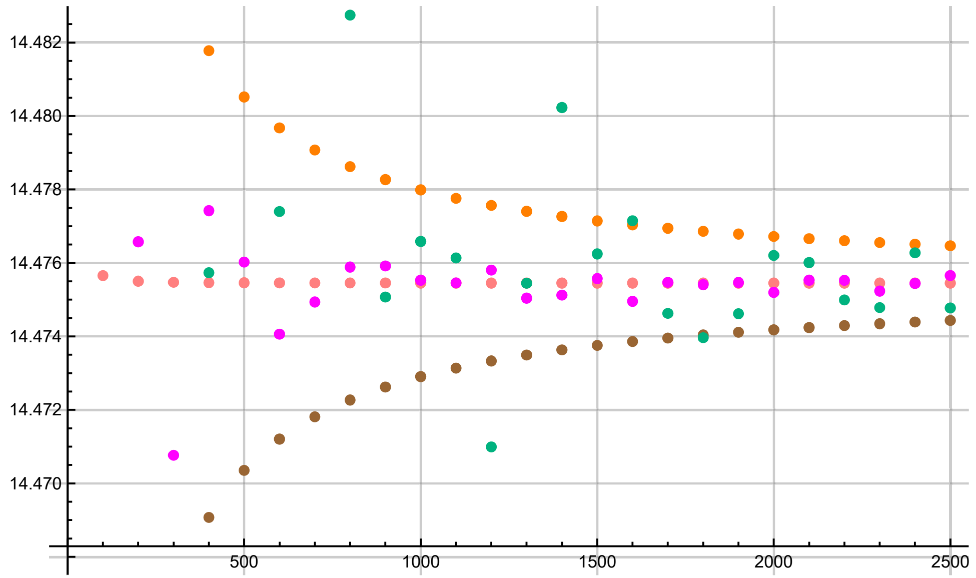

n
n = 50
1
2
3
4
5
16
14
12
10
0
20
40
60
80
100



Infine studiamo il limite di tali somme quando n assume valori ancora maggiori (tra 100 e 2500 con incrementi di 100).

num. intervallini	area (medi)	area (est.sx)	area (est.dx)	area (rnd)	area (part.rnd)
100	14.4757	14.5005	14.4496	14.4851	14.5642
200	14.4755	14.4881	14.4626	14.4763	14.4899
300	14.4755	14.4839	14.4669	14.4737	14.4812
400	14.4755	14.4818	14.4691	14.4769	14.4891
500	14.4755	14.4805	14.4704	14.4776	14.4771
600	14.4755	14.4797	14.4712	14.4753	14.4768
700	14.4755	14.4791	14.4718	14.4753	14.4757
800	14.4755	14.4786	14.4723	14.4748	14.4742
900	14.4755	14.4783	14.4726	14.4752	14.4755
1000	14.4755	14.478	14.4729	14.4755	14.4726
1100	14.4755	14.4778	14.4731	14.4752	14.4727
1200	14.4755	14.4776	14.4733	14.4755	14.4739
1300	14.4755	14.4774	14.4735	14.4753	14.475
1400	14.4755	14.4773	14.4736	14.4749	14.4753
1500	14.4755	14.4771	14.4738	14.4761	14.4743
1600	14.4755	14.477	14.4739	14.475	14.4756
1700	14.4755	14.4769	14.474	14.4757	14.4777
1800	14.4755	14.4769	14.474	14.4755	14.4736
1900	14.4755	14.4768	14.4741	14.4755	14.4761
2000	14.4755	14.4767	14.4742	14.4756	14.4743
2100	14.4755	14.4767	14.4742	14.4753	14.4749
2200	14.4755	14.4766	14.4743	14.4756	14.474
2300	14.4755	14.4766	14.4743	14.4756	14.4751
2400	14.4755	14.4765	14.4744	14.4753	14.4765
2500	14.4755	14.4765	14.4744	14.4753	14.4755

Quanto osservato circa la convergenza di ciascuna successione appare confermato così come la diminuzione delle differenze esistenti tra una successione e l'altra. Graficamente tutto ciò appare evidente se si osserva la diversa scala dell'asse delle ordinate del grafico seguente.



Definizione di integrale definito

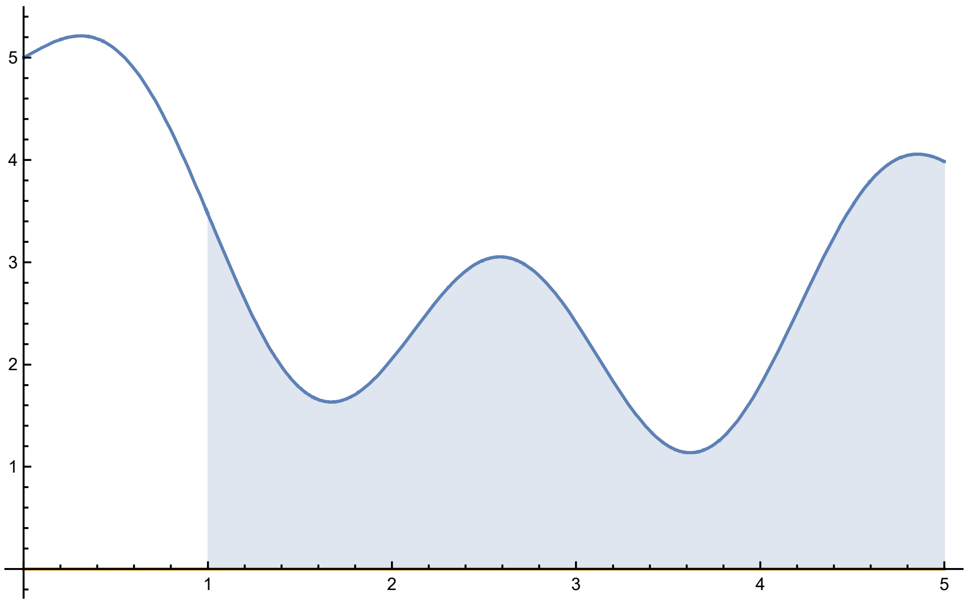
In definitiva possiamo proporre una stima dell'area del trapezoide: essa, a meno di 1×10^{-3}(pari alla semidispersione dei risultati relativi a $n = 2500$), risulta essere

$A_{stima} = 14.475$

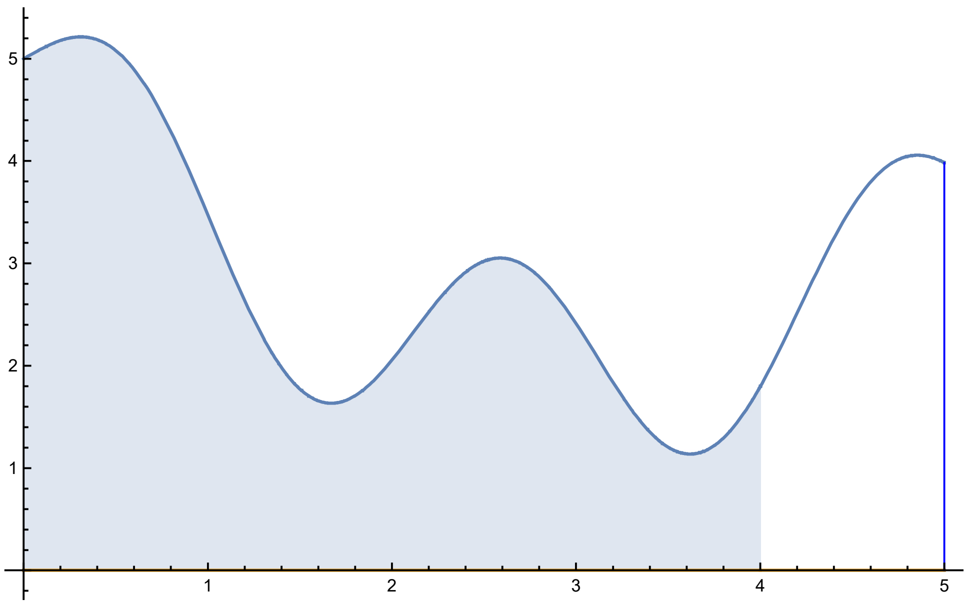
Ben più importante appare invece la definizione che emerge per l'area A del trapezoide: detta A_n l'area del plurirettangolo corrispondente ad una suddivisione dell'intervallo iniziale in n intervallini e termine generale della successione delle somme di Riemann, l'area del trapezoide sarà data dal limite della successione A_n al tendere di $n \to +\infty$ ossia

$A = \lim_{n\to+\infty} A_n$

qualsiasi sia il modo in cui il plurirettangolo venga costruito. Come affermato inizialmente basandoci sull'intuizione geometrica, è ora immediato verificare la dipendenza dell'area del trapezoide dagli estremi *a* e/o *b*. Difatti, già a livello grafico appare evidente come l'area del trapezoide debba dipendere dall'estremo inferiore (la figura seguente evidenzia ora il trapezoide compreso nell'intervallo [1, 5])



così come dall'estremo superiore (nella figura successiva appare il trapezoide compreso in [0, 4])



Passando al calcolo esplicito e supponendo una partizione di questi intervalli in 2500 intervallini, con la tecnica dei valori medi si ottengono rispettivamente i risultati

```
aa = 1; bb = 5; areaPluriRettangolo[aa, bb, 2500, f, metodo → med]
```

```
9.70101
```

```
aa = 0; bb = 4; areaPluriRettangolo[aa, bb, 2500, f, metodo → med]
```

```
11.1632
```

ben diversi dal valore finora ottenuto con gli estremi scelti all'inizio. Quindi l'area del trapezoide dipende dai valori degli estremi a, b, oltreché dalla funzione f.
Pertanto, volendo generalizzare e a prescindere dal significato geometrico di area del trapezoide finora discusso, va considerato che tale limite è

- funzione di a,
- funzione di b
- e dipende dalla particolare funzione scelta f.

Verrà pertanto indicato con il simbolo

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

che intende mettere in evidenza tutto ciò. Esso si legge: integrale definito della funzione $f(x)$ esteso all'intervallo $[a, b]$.
Come curiosità, il metodo di calcolo che ha origine da tale definizione, fornisce per l'area del trapezoide discusso finora

$$\text{areaTrapezoide} = \int_0^5 f[x]\,dx \;//\; N[\#, 20]\;\&$$

```
14.475451526508495980
```

valore peraltro ben evidenziato dall'andamento delle somme ottenute con i valori medi (punti rossi nell'ultimo grafico), somme che mostrano una sostanziale convergenza già a partire da $n = 200$.